E.L. NIKOLAI

THEORETISCHE MECHANIK

TEIL II

VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

E. L. NIKOLAI

THEORETISCHE MECHANIK

TEIL II

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN



E. L. NIKOLAI · THEORETISCHE MECHANIK

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK
HERAUSGEGEBEN VON FRANZ X. EDER UND ROBERT ROMPE
BAND 22

THEORETISCHE MECHANIK

TEIL II

VON

E. L. NIKOLAI

1956
VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN
BERLIN

Е. Л. НИКОЛАЙ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1952 ЛЕНИНГРАД

Die Übersetzung und Bearbeitung besorgte ein Kollektiv unter der Leitung von
Prof. Dr.-Ing. H. Neuber

Verantwortlicher Verlagsredakteur: I. Scholz

Printed in Germany
Lizenz-Nr. 206 · 435/24/56
Gesamtherstellung: Druckerei Fortschritt, Werk II, Erfurt

Vom Verlag

Die vorliegende zehnte Auflage des zweiten Teiles der „Theoretischen Mechanik" von E. L. Nikolai ist ein unveränderter Nachdruck der achten Ausgabe, die nach dem Tode des Verfassers erschienen ist und sich von der siebenten Ausgabe hauptsächlich dadurch unterscheidet, daß zwei Teile hinzugefügt wurden: die „Lagrangeschen Gleichungen" und die „Theorie der kleinen Schwingungen", die früher zum Bestandteil des dritten Teiles des Lehrbuches gehörten (der dritte Abschnitt des dritten Teiles wurde fortgelassen, weil das Buch „Die Theorie der Kreisel" vorhanden ist).

Vorwort zur siebenten Auflage

In der vorliegenden neuen Auflage sind im Text des zweiten (dynamischen) Teiles meiner „Theoretischen Mechanik" einige Veränderungen und Ergänzungen vorgenommen worden. Am wesentlichsten ist die Veränderung der Paragraphen des Buches, die von den Trägheitskräften und dem D'ALEMBERTschen Prinzip handeln.

In den früheren Ausgaben wurden die Trägheitskräfte in Verbindung mit dem Satz von D'ALEMBERT als Kräfte behandelt, die tatsächlich nicht existieren, also „fiktive" Kräfte sind. Ich erkenne diesen Standpunkt als unrichtig an und habe mich bemüht, in der neuen Darlegung die Realität dieser Kräfte zu unterstreichen und gleichzeitig die Frage der Trägheitskräfte von der Darlegung des D'ALEMBERTschen Prinzips zu trennen.

Die Vorstellung von der Trägheitskraft wird zuerst im Kapitel I eingeführt, das den NEWTONschen Axiomen der Mechanik gewidmet ist. Die Trägheitskraft wird hier als eine reale Kraft eingeführt, und zwar als die Reaktion des Körpers, der die Beschleunigung erfährt. Ich kehre hiermit zu der Tradition zurück, die auf die große Schöpfung des Gründers der klassischen Mechanik zurückgeht.

Dem Prinzip von D'ALEMBERT ist eine Darlegung gegeben, die, wie mir scheint, besser der historischen Bedeutung dieses Prinzips entspricht, das zuerst die allgemeine Methode zum Aufbau der Dynamik der verbundenen Systeme gab. In dieser Auflage wird das Prinzip von D'ALEMBERT als ein Prinzip behandelt, das eine gewisse allgemeine Eigenschaft der Reaktionen der kinetischen Zusammenhänge in mechanischen Systemen feststellt.

Den Satz, daß „die an einem sich bewegenden materiellen System angreifenden Kräfte mit den Trägheitskräften der Punkte des Systems im Gleichgewicht stehen", darf man nicht mit dem Prinzip von D'ALEMBERT identifizieren. Mir scheint, daß man diesen Satz als eine rein formale, aber sehr nützliche Lösungsmethode von dynamischen Aufgaben ansehen muß. Im vorliegenden Buch wird die Rückführung einer dynamischen auf eine statische Aufgabe „die Methode der Kinetostatik" genannt; sie wird mehrfach in diesem Lehrbuch angewandt.

E. N.

INHALTSVERZEICHNIS

Erster Teil

DYNAMIK DES MATERIELLEN PUNKTES

KAPITEL I

DIE AXIOME DER MECHANIK

§ 1. Die Dynamik des materiellen Punktes. Die Dynamik des mechanischen Systems

Dynamik (oder *Kinetik*) heißt der Teil der Mechanik, in dem die Bewegungen der materiellen Körper im Zusammenhang mit den sie bestimmenden physikalischen Ursachen betrachtet werden. In der Statik des starren Körpers (1. Abschnitt des ersten Teiles des Lehrbuches) haben wir uns mit der Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen der am starren Körper angreifenden Kräfte beschäftigt. In der Kinematik (2. Abschnitt des zweiten Teiles des Lehrbuches) waren die geometrischen Eigenschaften der Bewegungen der Körper Gegenstand unseres Studiums; dabei blieb die Frage nach den Kräften, die diese oder jene Bewegung hervorrufen, außerhalb unseres Blickfeldes. In der Dynamik werden wir es mit solchen Fällen zu tun haben, wo die am materiellen Körper angreifenden Kräfte sich nicht im Gleichgewicht befinden; es wird dann unsere Aufgabe sein, den Zusammenhang zwischen den wirkenden Kräften und der durch sie hervorgerufenen Bewegung des Körpers zu untersuchen und die allgemeinen Gesetze der Bewegung aufzustellen, durch die dieser Zusammenhang ausgedrückt wird.

Wir gehen auf folgende Weise an diese Aufgabe heran. Wir wissen bereits (aus dem ersten Bande), daß wir uns in der Mechanik alle materiellen Körper in Gedanken als in *materielle Punkte* zerlegt vorstellen, d. h. in solche überaus kleine Teilchen, deren Abmessungen vernachlässigt werden können. Mit anderen Worten, wir stellen uns alle Körper als Ansammlungen oder Systeme von materiellen Punkten vor. Wir werden uns zunächst mit dem Studium der Bewegungsgesetze des einzelnen materiellen Punktes befassen. Wenn wir danach die gewonnenen Resultate auf mehrere materielle Punkte verallgemeinern, erhalten wir die Bewegungsgesetze eines Systems von materiellen Punkten oder eines sogenannten mechanischen Systems. Auf diesem Wege werden wir zu den allgemeinen Gesetzen kommen, denen die Bewegung jedes materiellen Körpers unterworfen ist.

Aus dem Gesagten folgt, daß das Lehrbuch der Dynamik naturgemäß in zwei Abschnitte zerfällt, die man die *Dynamik des materiellen Punktes* und die *Dynamik des mechanischen Systems* nennen kann. Natürlich ist von diesen zwei Abschnitten der

zweite der wichtigere, in dem die allgemeinsten Gesetze für die Bewegung materieller Körper aufgestellt werden; die Dynamik des materiellen Punktes kann man als Einführung in die Dynamik des mechanischen Systems betrachten.

Man muß jedoch im Auge behalten, daß die beim Studium der Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes ermittelten Resultate auch eine selbständige Bedeutung haben, die für die Betrachtung der materiellen Körper wichtig ist. Wir werden später sehen (im Kapitel XIV), daß in jedem Körper und in jedem System von Körpern ein Punkt vorhanden ist, dessen Bewegung nach denselben Gesetzen erfolgt, nach denen sich der einzelne materielle Punkt bewegt: Das ist der Schwerpunkt des Körpers oder des Systems von Körpern. Folglich können wir, wenn wir den Schwerpunkt eines Körpers oder eines Systems von Körpern untersuchen wollen, diesen als einen einzelnen materiellen Punkt behandeln. In vielen Fällen, und zwar wenn der Körper sich *fortschreitend* bewegt, wird die Bewegung des ganzen Körpers durch die Bewegung seines Schwerpunktes voll und ganz bestimmt. In solchen Fällen haben wir beim Studium der Bewegung des Körpers das Recht, den Körper als materiellen Punkt zu betrachten. Dabei nehmen wir an, daß die ganze Materie des Körpers in seinem Schwerpunkt konzentriert ist. So können wir, wenn wir z. B. die Bewegung eines Eisenbahnzuges untersuchen wollen, in erster Näherung seine Bewegung als fortschreitend betrachten (wobei wir die rotierende Bewegung der Radsätze, die schwingenden Bewegungen der Waggons auf den Federn und dergleichen vernachlässigen); damit haben wir das Recht, auf den Zug die Gesetze der Bewegung eines materiellen Punktes anzuwenden. Wenn wir den Einfluß der rotierenden Bewegung der Radsätze und der übrigen zusätzlichen Bewegungen berücksichtigen wollten, könnten wir schon nicht mehr den Zug als einen materiellen Punkt behandeln; wir müßten die in der Dynamik eines mechanischen Systems dargelegten Verfahren anwenden.

Somit können die Gesetze der Bewegung eines materiellen Punktes auch in bezug auf Körper von endlichen Abmessungen in all den Fällen angewandt werden, in denen der Körper sich fortschreitend bewegt.

§ 2. Das erste Axiom. Die Trägheit der Materie

Wenn wir an das Studium der Dynamik eines materiellen Punktes herangehen, fangen wir mit der Darlegung der Axiome der Mechanik an, d. h. jener Grundsätze, auf die sich die Wissenschaft von der Bewegung der materiellen Körper stützt; diese Grundsätze werden von uns als Prüfungsresultat betrachtet. Die Axiome der Mechanik wurden zuerst von NEWTON in seinem Werk „Philosophiae naturalis principia mathematica" (1687)[1] formuliert. Wir wollen uns einen *isolierten* materiellen Punkt vorstellen, d. h. einen materiellen Punkt, der sich außerhalb der Einwirkung anderer Körper befindet.

[1] Die auf diesen Axiomen aufgebaute Mechanik heißt die Newtonsche oder klassische Mechanik (zum Unterschied von anderen allgemeiner gefaßten Lehren von der Bewegung, die in neuester Zeit erschienen und mit dem Namen Einstein u. a. verbunden sind). In diesem Lehrbuch werden wir uns ausschließlich mit der klassischen Mechanik befassen.

Axiom I

Der isolierte materielle Punkt bewahrt unverändert seine Geschwindigkeit nach Größe und Richtung.

Das bedeutet, daß der isolierte materielle Punkt sich entweder in Ruhe befindet oder sich geradlinig und gleichförmig bewegt. Man kann dies auch so formulieren; *Die Beschleunigung des isolierten materiellen Punktes ist gleich Null.*

Auf diese Art stellen wir fest, daß der materielle Punkt seine Geschwindigkeit nicht selbst ändern kann, daß er sich nicht selbst eine Beschleunigung erteilen kann; er bedarf dazu einer Einwirkung von außen her. Das erste Axiom der Mechanik drückt eine Grundeigenschaft des materiellen Punktes aus — seine Unfähigkeit, sich selbst eine Beschleunigung zu erteilen. Diese Eigenschaft nennt man *Trägheit* des Stoffes. Das erste Axiom der Mechanik, das auch das Trägheitsprinzip genannt wird, wurde von GALILEI[1] aufgestellt; die geradlinige und gleichförmige Bewegung, von der im Axiom die Rede ist, heißt Trägheitsbewegung.

Im ersten Teil des Lehrbuches, § 89, wurde die Relativität jeder Bewegung erwähnt; vom Gesichtspunkt der Kinematik ist jede Bewegung relativ. Wir erinnern daran, daß wir mit „relative Bewegung" des Punktes in bezug auf ein sich bewegendes unveränderliches Medium die Bewegung bezeichnen, die von dem Beobachter beobachtet wird, der sich zusammen mit dem gegebenen Medium bewegt. Diese Bewegung beziehen wir auf ein Koordinatensystem, das unveränderlich mit dem Medium verbunden ist und sich zusammen mit demselben bewegt (Teil I, § 90). Anstatt von der relativen Bewegung in bezug auf das gegebene Medium zu sprechen, kann man auch von der relativen Bewegung in bezug auf das gegebene (sich bewegende) Koordinatensystem sprechen. Es ist klar, daß die Bewegung ein und desselben Punktes auf ganz verschiedene Art dargestellt werden kann, je nachdem, auf welches System wir sie beziehen werden. Um die Bewegung eines Punktes voll und ganz zu bestimmen, genügt es also nicht, zu sagen, *wie* er sich bewegt, sondern man muß auch noch angaben, *auf welches Koordinatensystem* seine Bewegung bezogen ist. Wir haben festgestellt, daß der isolierte materielle Punkt sich geradlinig und gleichförmig bewegt. Es erhebt sich die Frage, auf welches Koordinatensystem dabei die Bewegung des isolierten materiellen Punktes bezogen werden soll. Solange auf diese Frage keine Antwort gegeben ist, hat das von uns festgestellte Axiom eigentlich keinen bestimmten Sinn.

Auf den ersten Blick erscheint die Antwort auf die gestellte Frage einfach. Der isolierte materielle Punkt führt eine geradlinige und gleichförmige Bewegung in bezug auf das unbewegliche Koordinatensystem aus, d. h. in bezug auf das System, das seine Lage im unbeweglichen Raum nicht verändert. Die Schwierigkeit besteht jedoch darin, daß wir gar keine Mittel zur Beurteilung der Unbeweglichkeit solcher Koordinatensysteme haben. Selbst der Begriff des unbeweglichen Raumes entbehrt jeglichen Inhalts; folglich muß die vorgeschlagene Antwort als völlig sinnlos zurückgewiesen werden, und die von uns gestellte Frage über das *Grund-Koordinatensystem der*

[1] G. Galilei, Discorsi e dimostrazioni matematicche intorno a due nuove scienze (1638). Das Werk von Galilei ist in 6 Dialoge oder „Tage" eingeteilt, das Trägheitsprinzip ist am Anfang des vierten Tages formuliert.

Mechanik (so kann man jenes System nennen, auf welches die Bewegung des isolierten materiellen Punktes bezogen werden soll) bleibt offen. Ohne auf die Besprechung dieser Frage einzugehen, die bedeutende Schwierigkeiten bietet[1], wollen wir bemerken, daß in vielen Fällen (und insbesondere bei der Lösung der meisten Fragen der Dynamik, mit denen man es bei der technischen Anwendung zu tun hat) die Bewegung der Erde vernachlässigt werden kann; in solchen Fällen kann man das Grundkoordinatensystem, auf das die Bewegung bezogen wird, als unveränderlich mit der Erde verbunden betrachten. Wenn es bei der Lösung der gestellten Aufgabe notwendig ist, die Bewegung der Erde in Betracht zu ziehen (z. B. die Abweichung fallender Körper nach Osten, die Bewegung des FOUCAULTschen Pendels), kann man als Grundkoordinatensystem das System annehmen, das seinen Ursprung im Zentrum der Erde hat und in bezug auf irgendwelche unbewegliche Sterne gerichtet ist.

Die auf das Grundkoordinatensystem der Mechanik bezogene Bewegung werden wir die *absolute* Bewegung nennen. Im Hinblick auf die soeben gemachte Bemerkung werden wir bei den weiteren Untersuchungen (wenn nicht besonders vermerkt) diese Bezeichnung der Bewegung beilegen, die auf das unveränderlich mit der Erde verbundene Koordinatensystem bezogen ist.

§ 3. Das zweite Axiom. Die Masse. Die Grundgleichung der Dynamik

Wir wollen uns einen materiellen Punkt vorstellen, der sich nicht geradlinig und nicht gleichförmig bewegt, sondern eine gewisse Beschleunigung erfährt. Wir schließen, daß ein solcher materieller Punkt nicht isoliert ist: Er befindet sich unter dem Einfluß anderer materieller Körper. Die Wirkung anderer materieller Körper auf den gegebenen materiellen Punkt, deren Folge eine Beschleunigung in der Bewegung des Punktes ist, heißt Kraft. Der Zusammenhang zwischen der an dem materiellen Punkt angreifenden Kraft und der durch diese erteilten Beschleunigung wird durch das zweite Axiom festgestellt.

Axiom II

Die dem materiellen Punkt durch eine angreifende Kraft mitgeteilte Beschleunigung hat die Richtung der Kraft und ist der Größe nach proportional der Kraft.

Bezeichnen wir die am materiellen Punkt angreifende Kraft mit $\mathfrak{F}$ und die mitgeteilte Beschleunigung mit $\mathfrak{w}$, so gilt die Vektorgleichung

$$\mathfrak{F} = C\,\mathfrak{w},$$

wobei C eine konstante Größe ist.

Die Erfahrung zeigt, daß für verschiedene materielle Punkte die Konstante C verschiedene Werte hat. Je größer die Konstante C ist, eine um so größere Kraft $\mathfrak{F}$ muß man an den materiellen Punkt anlegen, um demselben die gegebene Beschleunigung $\mathfrak{w}$ zu erteilen. Mit anderen Worten: Je größer die Konstante C ist, desto größer ist die

---

[1] Auf die Literatur zu dieser Frage ist im Artikel von A. Voß „Die Prinzipien der rationellen Mechanik" in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, hingewiesen worden. Eine wesentlich neue Fragestellung hat diese Frage in der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein erhalten.

Trägheit des materiellen Punktes. Somit besitzen die verschiedenen materiellen Punkte einen verschiedenen Grad der Trägheit; als Maß für die Trägheit eines materiellen Punktes kann die Konstante C angenommen werden.

Andererseits rührt der verschiedene Trägheitsgrad materieller Körper daher, daß in den verschiedenen Körpern ungleiche Mengen Materie enthalten sind. Die Menge der Materie, die in einem Körper enthalten ist, heißt *Masse* dieses Körpers. Die Größe der Masse eines Körpers können wir durch die Größe der Trägheit dieses Körpers messen. Bezeichnen wir die Größe der Masse eines materiellen Punktes mit m und verwenden wir das Maß der Trägheit dieses materiellen Punktes als Maß seiner Masse, dann ist $m = C$.

In diesem Fall gilt:

$$m\mathfrak{w} = \mathfrak{F}.$$

Diese Vektorgleichung, die den Zusammenhang zwischen der Masse, der Kraft und der durch diese vermittelten Beschleunigung ausdrückt, nennen wir die *Grundgleichung der Dynamik.*

Wir haben soeben vereinbart, die Masse des Körpers durch seine Trägheit zu messen. Es besteht jedoch die Möglichkeit, auch noch eine andere allgemeine Eigenschaft der materiellen Körper der Messung der Masse zugrunde zu legen: Wir denken dabei an die *Gravitation.* Nach dem von NEWTON aufgestellten Gravitationsgesetz ist die Größe der Anziehungskraft zwischen zwei materiellen Punkten proportional dem Produkt der Massen dieser Punkte und umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung zwischen ihnen. Bezeichnen wir die Größe dieser Kraft mit F, so gilt

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

wobei m_1 und m_2 die Massen der Punkte, r der Abstand zwischen diesen und k der konstante Koeffizient (die sogenannte „Gravitationskonstante") ist.

Wir wenden diese Formel auf einen auf der Erdoberfläche befindlichen Körper an. Bezeichnen wir die Masse des Körpers mit m, sein Gewicht (d. h. die Anziehungskraft in Richtung auf das Zentrum der Erde) mit P, so gilt

$$P = k\frac{M m}{R^2},$$

wobei M die Masse der Erde und R der Radius der Erde ist.

Wir stellen uns nun einen materiellen Punkt mit der Masse m vor, der unter der Wirkung der Schwerkraft frei (im luftleeren Raum) auf die Erdoberfläche fällt. Wenn wir die Beschleunigung des Punktes mit $\mathfrak{w}$ bezeichnen und auf diesen Spezialfall die Grundgleichung der Dynamik anwenden, erhalten wir

$$m\mathfrak{w} = \mathfrak{P}$$

oder

$$m w = k\frac{M m}{R^2}, \tag{1}$$

woraus

$$w = \frac{kM}{R^2}$$

folgt.

Wie man sieht, hängt die Beschleunigung beim freien Fall nicht von der Masse m des fallenden Körpers ab.

Folglich fallen alle Körper im luftleeren Raum mit ein und derselben Beschleunigung. Diese Tatsache wurde von GALILEI experimentell noch vor der Gründung der Mechanik durch NEWTON festgestellt.[1]

Bezeichnen wir die Beschleunigung des freien Falles mit g (wobei $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 981\ \text{cm/s}^2$ ist)[2], so gilt

$$P = mg\,.$$

Das ist der Zusammenhang zwischen der Masse des Körpers und seinem Gewicht. Hieraus erhalten wir die Möglichkeit, die Masse des Körpers aus seinem Gewicht zu bestimmen (d. h. aus der Schwerkraft in Richtung zum Zentrum der Erde). Wenn wir das Gewicht P durch Wägen bestimmen, finden wir die Masse m nach der Formel

$$m = \frac{P}{g}\,.$$

Wir erinnern daran, daß es zwei Maßsysteme gibt: In dem ersten werden als Grundeinheiten die Einheiten der Länge, der Zeit und der Masse angenommen, in dem anderen die Einheiten der Länge, der Zeit und der Kraft; das erste Maßsystem kann man das physikalische nennen, das zweite (das allgemein bei technischen Anwendungen der Mechanik benutzte) wollen wir das technische nennen. Beschäftigen wir uns ein wenig mit diesen zwei Maßsystemen.

a) *Das physikalische Maßsystem.* Als Grundeinheiten der Länge, der Zeit und der Masse nehmen wir *Zentimeter*, *Sekunde* und *Gramm* an (d. h. die Masse eines Kubikzentimeters Wasser bei 4° C)[3].

---

[1] Es muß festgestellt werden, daß im linken Teil der Gleichung

$$mw = k\frac{Mm}{R^2}$$

mit m die Masse des materiellen Punktes bezeichnet ist, die aus seiner Trägheit bestimmt wurde; im rechten Teil derselben Gleichung dagegen muß man unter m die Masse verstehen, die aus der Anziehungskraft ermittelt ist. Der Umstand, daß alle Körper im luftleeren Raum tatsächlich mit ein und derselben Bedchleunigung fallen, erscheint als experimentelle Bestätigung dessen, daß wir beim Messen der Masse „nach der Trägheit" oder „nach der Gravitation" zu ein und demselben Resultat kommen. Bisweilen wird das surch die Worte „Die ‚träge' Masse des Körpers ist gleich seiner ‚schweren' Masse" ausgedrückt.

[2] Genauer wird die Beschleunigung g_0 durch die Schwerkraft auf dem Meeresspiegel des Ozeans durch folgende von Helmert gegebene Formel bestimmt:

$$g_0 = 978{,}030\,(1 + 0{,}005\,302 \sin^2\varphi - 0{,}000\,007 \sin^2 2\varphi)\ \text{cm/s}^2,$$

wobei φ die geographische Breite des gegebenen Ortes ist. Nach der Formel erhalten wir

auf dem Äquator ($\varphi = 0$): $g_0 = 978{,}030\ \text{cm/s}^2$,
auf der Breite ($\varphi = 45^\circ$): $g_0 = 980{,}616\ \text{cm/s}^2$,
auf dem Pol ($\varphi = 90^\circ$): $g_0 = 983{,}215\ \text{cm/s}^2$.

Da die Größe g von der geographischen Breite des Ortes abhängt, verändert sich das Gewicht $P = mg$ mit der Veränderung der Lage des Körpers auf der Erdoberfläche.

[3] Der Prototyp eines Kilogramms (ein Zylinder aus Platin mit abgerundeten Rändern) wird im Nationalarchiv in Paris aufbewahrt, seine Nachbildung im Internationalen Büro der Gewichte und Maße in Sèvres bei Paris. Die Masse des Kilogramm-Prototyps ist nicht genau gleich der Masse eines Kubikdezimeters Wasser bei 4° C. Gegenwärtig wird die Einheit der Masse (das Gramm) als Tausendstel der Masse des Prototyps bestimmt.

Als Einheit der Kraft müssen wir die Kraft annehmen, die der Masse 1 gr die Beschleunigung 1 cm/s² erteilt (da wir bei $m = 1$ und $w = 1$ $F = mw = 1$ erhalten); diese Kraft nennt man dyn. Wir bemerken, daß das Gewicht von 1 cm³ Wasser, in dyn ausgedrückt, gleich $P = mg = 1 \cdot 981 = 981$ dyn ist.

Kürzlich wurde vorgeschlagen, als Grundeinheiten des physikalischen Systems Meter ($= 10^2$ cm), Sekunde und Kilogramm ($= 10^3$ g) anzunehmen. Bei dieser Wahl der Grundeinheiten müssen wir als Krafteinheit eine solche Kraft annehmen, die der Masse von 1 kg eine Beschleunigung von 1 m/s² erteilt; diese Kraft hat den Namen *Newton* erhalten. Es ist leicht zu ersehen, daß ein *Newton* $= 10^5$ dyn ist.

b) *Das technische Maßsystem.* Als Grundeinheiten der Länge, der Zeit und der Kraft nehmen wir *Meter*, *Sekunde*, *Kilogramm*[2] (d. h. das Gewicht eines Kubikdezimeters Wasser bei 4° C) an. Als Einheit der Masse müssen wir in diesem Maßsystem die Masse annehmen, die unter der Wirkung der Kraft 1 kg die Beschleunigung 1 m/s² erhält (da wir bei $F = 1$ und $w = 1$ $m = \frac{F}{w} = 1$ erhalten); diese Einheit der Masse, die mit $\frac{\text{kg} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$ bezeichnet werden muß, hat keinen besonderen Namen. Die Masse 1 dm³ Wasser wird in diesem Maßsystem durch den Buchstaben

$$m = \frac{P}{g} = \frac{1}{9{,}81} \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

ausgedrückt.

Wir werden uns in diesem Lehrbuch des technischen Maßsystems bedienen. Das Gewicht P werden wir in Kilogramm und Tonnen ausdrücken; die Masse werden wir nach der Gleichung

$$m = \frac{P}{g}$$

bestimmen.

Zum Abschluß dieses Paragraphen erwähnen wir, daß die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ des materiellen Punktes, die durch die Grundgleichung der Dynamik bestimmt wird, die Beschleunigung der absoluten Bewegung des Punktes ist, wobei man diesem Ausdruck die Bedeutung zuschreiben muß, die ihm am Ende des vorhergehenden Paragraphen gegeben wurde.

§ 4. Das dritte Axiom. Das vierte Axiom. Die Trägheitskraft

Wir stellen uns vor, daß an einem materiellen Punkt mehrere Kräfte angreifen. Die Beschleunigung, die der materielle Punkt bei einer gleichzeitigen Wirkung mehrerer Kräfte erhält, wird durch das dritte Axiom bestimmt.

---

[2] Das Kraft-Kilogramm darf man nicht mit dem Massen-Kilogramm verwechseln. Genauer wird die Einheit der Kraft, das Kilogramm, als Gewicht des Platin-Prototyps in Meeresspiegelhöhe auf der Breite 45° bestimmt. Anm. d. deutschen Redaktion: In Deutschland hat sich zur Unterscheidung der Begriff Kilopond (kp) für das Kraft-Kilogramm und entsprechend Pond (p) eingebürgert.

Axiom III

Bei gleichzeitigem Wirken mehrerer Kräfte erhält der materielle Punkt die gleiche Beschleunigung wie unter der Wirkung einer Kraft, die gleich der Summe der gegebenen Kräfte ist.

Die Kraft, die dem materiellen Punkt die gleiche Beschleunigung wie mehrere gegebene Kräfte erteilt, nennen wir die *Resultierende* der gegebenen Kräfte. Aus dem Axiom III geht hervor, daß die Resultierende im Sinne der Dynamik gleichfalls die Resultierende im Sinne der Statik ist. Somit können bei Bestimmung der Beschleunigung, die der materielle Punkt unter der Wirkung mehrerer angreifender Kräfte erfährt, diese Kräfte durch deren Resultierende ersetzt werden. Wenn wir die am materiellen Punkt angreifenden Kräfte mit $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bezeichnen und ihre Resultierende mit $\mathfrak{F}$, dann gilt die Gleichung

$$m\mathfrak{w} = \mathfrak{F}$$

oder, da

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \cdots + \mathfrak{F}_n$$

ist, wird

$$m\mathfrak{w} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \cdots + \mathfrak{F}_n.$$

Diese Form erhält die Grundgleichung der Dynamik für den Fall, daß mehrere Kräfte am materiellen Punkt angreifen.

Wir wenden uns jetzt dem letzten Axiom zu.

Axiom IV

Jeder Kraft entspricht eine gleichgroße und entgegengesetzt gerichtete Gegenkraft.

Dieses Axiom ist uns bereits aus dem Lehrbuch der Statik bekannt (siehe Teil I, § 9). Wir erinnern nochmals daran, daß sein Sinn darin besteht, daß auch auf den materiellen Punkt B eine Kraft von seiten des materiellen Punktes A wirkt, wenn auf den Punkt A eine Kraft von seiten des Punktes B wirkt, wobei diese zwei Kräfte der Größe nach gleich und entgegengesetzt gerichtet sind.

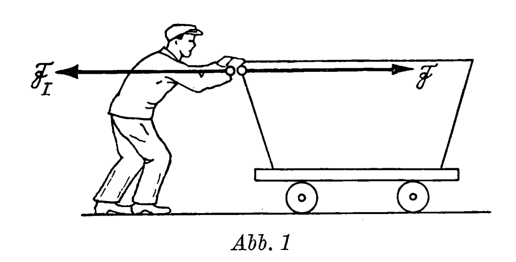


Abb. 1

Wir wollen uns vorstellen, daß ein Arbeiter einen Wagen auf einem horizontalen geradlinigen Schienenwege vor sich herrollt, wobei er dem Wagen die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ erteilt (Abb. 1). Damit der Wagen diese Beschleunigung erhält, muß der Arbeiter mit der Kraft $\mathfrak{F} = m\mathfrak{w}$ schieben, wobei m die Masse des Wagens ist (der Einfachheit halber vernachlässigen wir den Reibungswiderstand bei der Bewegung des Wagens längs der Schienen).

Die Kraft ist jedoch gleich der Gegenkraft. Der Arbeiter spürt beim Schieben des Wagens eine Gegenwirkung, die der Größe nach der von ihm ausgeübten

Kraft $\mathfrak{F}$ gleich ist, aber in der entgegengesetzten Richtung verläuft, d. h. entgegengesetzt der Beschleunigung $\mathfrak{w}$.

Bezeichnen wir diese Gegenwirkung des Wagens mit $\mathfrak{F}_I$, so gilt $\mathfrak{F}_I = - \mathfrak{F}$ oder

$$\mathfrak{F}_I = - m\mathfrak{w}.$$

Diese Kraft, die an den Händen des Arbeiters von seiten des Wagens angreift, heißt die *Trägheitskraft* des Wagens. Bei einer gleichförmigen Bewegung des Wagens ($w = 0$) verschwindet die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I$; in diesem Falle (bei Fehlen einer Reibung) rollt der Wagen infolge seiner Trägheit mit konstanter Geschwindigkeit; der Arbeiter braucht ihn nicht zu schieben und begegnet natürlich von seiner Seite keiner Gegenwirkung.

Wir wählen ein anderes Beispiel. Wir nehmen an, daß an dem Ende eines Stabes OA, der sich um die feste Achse O dreht, die Kugel M befestigt sei (Abb. 2 (a)). Der Stab OA drehe sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Der Einfachheit halber werden wir die Kugel M als einen materiellen Punkt behandeln und die Erdanziehung auf die Kugel vernachlässigen.

Bei einer gleichförmigen Drehung des Stabes OA erfährt das Zentrum M der Kugel die Beschleunigung $\mathfrak{w}$, die in Richtung zur Drehachse O verläuft und der Größe nach gleich

$$w = r\,\omega^2$$

ist, wobei r die Entfernung vom Zentrum der Kugel bis zur Drehachse ist (Abb. 2 (b)). Hieraus folgt, daß an der Kugel M von seiten des Stabes OA die Kraft $\mathfrak{F}$ angreift, die gleichfalls in Richtung auf die Drehachse O zu verläuft und durch die Gleichung

$$\mathfrak{F} = m\,\mathfrak{w}$$

bestimmt wird, wobei m die Masse der Kugel M ist.

Abb. 2

Da die Kraft gleich der Gegenkraft ist, müssen wir folgern, daß die Kraft, die der Größe nach gleich der Kraft $\mathfrak{F}$, aber entgegengesetzt gerichtet ist, am Ende A des Stabes OA von seiten der Kugel M angreift. Diese Kraft (wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{F}_I$) nennen wir die Trägheitskraft der Kugel M (Abb. 2 (c)). Da die Kraft $\mathfrak{F}$ der Größe nach gleich und entgegengesetzt der Kraft $\mathfrak{F}$ gerichtet ist, gilt:

$$\mathfrak{F}_I = - m\,\mathfrak{w}.$$

Die Größe der Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I$ ist im gegebenen Falle gleich

$$F_I = m\,w = m\,r\,\omega^2.$$

Bei einer schnellen Drehbewegung kann die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I$ groß sein. Diese am Ende des Stabes OA angreifende Trägheitskraft der Kugel M ruft eine Dehnung des Stabes hervor; bei einer hinreichend schnellen Rotation kann sie die Ursache seiner Zerstörung sein.

Wir verallgemeinern den Begriff der Trägheitskraft und stellen uns den materiellen Punkt A von der Masse m vor, der die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ unter dem Einfluß der Kraft $\mathfrak{F} = m\mathfrak{w}$ erhält, die auf den Punkt A von seiten des anderen materiellen Punktes B wirkt. Wir wissen, daß in diesem Fall auf den Punkt B von seiten des Punktes A eine Reaktion wirkt, die gleich und entgegengesetzt der Kraft $\mathfrak{F}$ ist. Bezeichnen wir diese Reaktion mit $\mathfrak{F}_I$, so gilt

$$\mathfrak{F}_I = -m\mathfrak{w}.$$

Die Kraft $\mathfrak{F}_I$ heißt die Trägheitskraft des materiellen Punktes A.

Wenn also der Körper A die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ durch Einwirkung irgendeines anderen Körpers B erhält, ist die Trägheitskraft des Körpers A der Größe nach gleich mw (wobei m die Masse des Körpers A ist), aber entgegengesetzt der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ gerichtet, und sie greift nicht an dem Körper A, sondern an dem Körper B an.

Dem Begriff der Trägheitskraft begegnen wir bereits am Anfang der Geschichte der Mechanik bei NEWTON (und sogar noch früher bei KEPLER). Die Bezeichnung dieser Kraft ist voll und ganz berechtigt, denn in ihr zeigt sich tatsächlich die Trägheit der Materie.

KAPITEL II

DIE METHODE DER KINETOSTATIK

§ 5. Die Methode der Kinetostatik. Die tangentiale und zentrifugale Trägheitskraft

Wir gehen nun zum Studium der Verfahren zur Lösung von Aufgaben der Dynamik über.

In diesem Kapitel werden wir die Methode darlegen, mit deren Hilfe die Lösung einer Aufgabe der Dynamik auf die Lösung der entsprechenden Aufgabe der Statik zurückgeführt werden kann. Diese Methode ist eng mit dem im vorhergehenden Paragraphen festgestellten Begriff der Trägheitskraft verbunden.

Wir wollen uns einen materiellen Punkt M vorstellen, der eine Bewegung unter der Wirkung der an ihm angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ ausführt (Abb. 3). Wir nehmen an, daß die Resultierende der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}$ ist. Wir wissen, daß die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ des Punktes M durch die Gleichung

$$m\mathfrak{w} = \mathfrak{F}$$

bestimmt wird, wobei m die Masse des gegebenen Punktes ist.

Wir wollen nun sehen, was geschehen würde, wenn außer den Kräften $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ an unserem Punkte M auch noch die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I = -m\mathfrak{w}$ dieses Punktes angreifen würde.

Fügen wir also in Gedanken an den Punkt M auch noch die Kraft $\mathfrak{F}_I$ hinzu. Da die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I$ der Größe nach gleich und der Richtung nach entgegengesetzt der Resultierenden $\mathfrak{F}$ der angreifenden Kräfte ist, heben sich die Kräfte $\mathfrak{F}_I$ und $\mathfrak{F}$ gegenseitig auf. Wenn aber die Trägheitskraft F_I durch die Resultierende $\mathfrak{F}$ ausgeglichen wird, dann wird sie auch durch die Kraftkomponenten $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ ausgeglichen. Wir kommen also zu der nachstehenden Schlußfolgerung: Würde im Punkte M außer den Kräften $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auch noch die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I$ dieses Punktes angreifen, so bliebe der Punkt M unter der Wirkung aller dieser Kräfte (einschließlich der Trägheitskraft) im Gleichgewicht.

In Wirklichkeit greift die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I$ im Punkte M nicht als äußere Kraft an. Dieser Punkt befindet sich daher nicht im statischen Gleichgewicht, sondern in Bewegung. Jedoch eröffnet das von uns erwähnte Resultat einen einfachen Weg der Lösung von dynamischen Aufgaben.

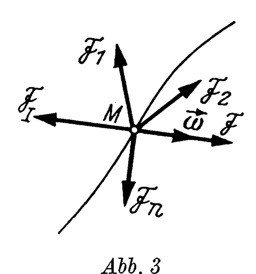


Abb. 3

Um irgendeine Frage zu lösen, die sich auf die Bewegung des Punktes M unter der Wirkung der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bezieht, fügen wir zu diesen Kräften die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I = -m\mathfrak{w}$ unseres Punktes hinzu. Wir haben soeben gesehen, daß sich die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ sowie $\mathfrak{F}_I$ gegenseitig aufheben wenn man so tut, als würde die Trägheitskraft im Punkte M angreifen. Somit ist die Aufgabe von der Bewegung des Punktes M, der unter der Wirkung der an ihm angreifenden Kräfte steht, auf die Aufgabe von dem Gleichgewicht des Punktes M unter der Wirkung derselben Kräfte sowie der hinzugefügten Trägheitskraft zurückgeführt worden. Bei der Lösung dieser Aufgabe vom Gleichgewicht der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ und $\mathfrak{F}_I$ können alle die uns aus dem Lehrbuch der Statik bekannten Verfahren angewandt werden. Mit der Lösung dieser statischen Aufgabe erhalten wir gleichzeitig die Lösung der ursprünglich gestellten dynamischen Aufgabe von der Bewegung des Punktes, der unter der Wirkung der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ steht.

Diese Lösungsmethode einer Aufgabe der Dynamik, die sich auf die Zurückführung auf die entsprechende Aufgabe der Statik durch Hinzufügen der Trägheitskraft zu der Zahl der am materiellen Punkt angreifenden Kräfte gründet, werden wir *kinetostatische Methode* nennen.

Wie ersichtlich, ist die Idee dieser Methode überaus einfach. Es ist leicht zu erkennen, daß das Wesen dieser Methode in einer einfachen Übertragung des Gliedes $m\mathfrak{w}$ aus dem linken Teil der Grundgleichung der Dynamik

$$m\mathfrak{w} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \cdots + \mathfrak{F}_n$$

in den rechten Teil dieser Gleichung besteht. Wenn wir das Glied $m\mathfrak{w}$ in den rechten Teil übertragen, erhalten wir

$$0 = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \cdots + \mathfrak{F}_n - m\mathfrak{w},$$

woraus wir, wenn wir bemerken, daß $-m\mathfrak{w} = \mathfrak{F}_I$ ist,

$$\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \cdots + \mathfrak{F}_n + \mathfrak{F}_I = 0$$

finden.

Das ist die Gleichgewichtsbedingung der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ und $\mathfrak{F}_I$ (unter der Voraussetzung, daß alle diese Kräfte an ein und demselben Punkt angreifen).

Die Methode der Kinetostatik ist außerordentlich fruchtbar, obgleich sie äußerst einfach und elementar ist. Ihr Wert besteht darin, daß sie die Anwendung der gut bekannten Verfahren der Statik bei der Lösung der Aufgaben der Dynamik gestattet. In vielen Fällen führt die Methode der Kinetostatik zu einer einfacheren und bequemeren Lösung der dynamischen Aufgabe.

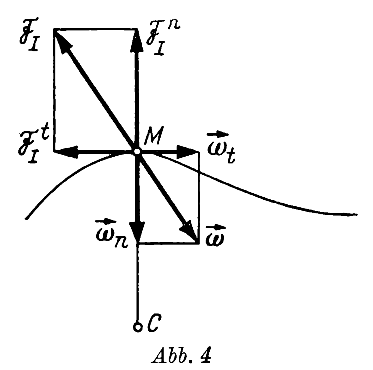


Abb. 4

In den Fällen, in denen der materielle Punkt eine *krummlinige* Bewegung ausführt, ist es von Nutzen, die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I$ in zwei Komponenten zu zerlegen, die längs der Tangente an die Bewegungsbahn bzw. längs der Hauptnormalen gerichtet sind.

Wir stellen uns den materiellen Punkt M vor, der eine krummlinige Bewegung ausführt, und legen die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ und die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I$ dieses Punktes (Abb. 4) fest. Wir zerlegen dann die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ in die tangentiale Beschleunigung $\mathfrak{w}_t$ und die normale Beschleunigung $\mathfrak{w}_n$. Die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I$, die entgegengesetzt der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ gerichtet ist, kann gleichfalls in die tangentiale und die normale Komponente zerlegt werden, die wir mit $\mathfrak{F}_I^t$ und $\mathfrak{F}_I^n$ bezeichnen wollen. Diese Komponenten der Trägheitskraft sind den Komponenten der Beschleunigung $\mathfrak{w}_t$ und $\mathfrak{w}_n$ entgegengesetzt gerichtet und sind der Größe nach gleich den mit der Masse m multiplizierten Beschleunigungen $\mathfrak{w}_t$ und $\mathfrak{w}_n$.

Folglich ist

$$\mathfrak{F}_I^t = -m\mathfrak{w}_t, \qquad \mathfrak{F}_I^n = -m\mathfrak{w}_n.$$

Wenn wir uns an die Gleichungen (siehe Teil I, § 91)

$$w_t = \frac{dv}{dt}, \qquad w_n = \frac{v^2}{\varrho}$$

erinnern, wobei v die Größe der Geschwindigkeit des Punktes M und ϱ der Krümmungsradius der Bewegungsbahn ist, schließen wir, daß

$$F_I^t = m\frac{dv}{dt}, \qquad F_I^n = \frac{mv^2}{\varrho}$$

gilt; da die normale Beschleunigung $\mathfrak{w}_n$ längs der Hauptnormalen an die Bewegungsbahn in Richtung zum Krümmungszentrum C verläuft, ist die normale Komponente der Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^n$ längs der Hauptnormalen *vom Krümmungszentrum weg* gerichtet.

Die Komponenten der Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^t$ und $\mathfrak{F}_I^n$ heißen die *tangentiale* und die *zentrifugale Trägheitskraft.*

Wir bemerken, daß $v = \text{const}$ und $\frac{d\,v}{d\,t} = 0$ ist, wenn der Punkt M sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. In diesem Falle verschwindet die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^t$, die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I$ besteht dann nur aus der zentrifugalen Komponente und ist der Größe nach gleich

$$\mathfrak{F}_I = \mathfrak{F}_I^n = \frac{m\,v^2}{\varrho}.$$

Wir bemerken noch, wenn der Punkt M zu irgendeinem starren System gehört, das sich um eine feste Achse dreht, daß seine tangentiale und normale Beschleunigung nach den Gleichungen

$$\mathfrak{w}_t = r\,\varepsilon, \qquad \mathfrak{w}_n = r\,\omega^2$$

errechnet werden können, wobei ω und ε die Winkelgeschwindigkeit bzw. die Winkelbeschleunigung der Drehung des Systems sind und r der Abstand des Punktes M von der Drehachse ist. Hieraus erhalten wir für die tangentiale und die zentrifugale Trägheitskraft die Gleichungen

$$F_I^t = m\,r\,\varepsilon, \qquad F_I^n = m\,r\,\omega^2.$$

Ist die Rotation des Systems *gleichförmig*, so ist $\varepsilon = 0$ und $F_I^t = 0$, und die Größe der ganzen Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I$ gleich

$$F_I = F_I^n = m\,r\,\omega^2.$$

Wir wissen, daß die Trägheitskraft des sich beschleunigt bewegenden materiellen Punktes nicht am Punkte selbst angreift, sondern an dem Körper oder an den Körpern, die diesem die Beschleunigung erteilen. Es versteht sich von selbst, daß sich dies auch auf die tangentiale und die zentrifugale Trägheitskraft bezieht. Nur in dem Fall, wenn wir die Aufgabe von der Bewegung des materiellen Punktes nach der kinetostatischen Methode lösen, zählen wir diese Trägheitskräfte zu den Kräften, die an dem sich bewegenden Punkt selbst angreifen.

§ 6. Das dynamometrische Pendel. Die Erhöhung der äußeren Schiene auf gekrümmten Bahnabschnitten. Der Zentrifugalregulator

Wir wollen die Anwendung der Methode der Kinetostatik an einigen Beispielen zeigen.

Beispiel 1: Das dynamometrische Pendel. Zur Bestimmung der Beschleunigung bei einer ungleichförmigen Bewegung eines Eisenbahnzuges wurde folgendes Verfahren angewandt:

In einem Waggon eines Zuges wurde ein Pendel aufgehängt, das aus einem leichten Stab mit einem an seinem Ende aufgesetzten kleinen Gewicht M besteht (Abb. 5). Bei

einer ungleichförmigen Bewegung des Zuges weicht das Pendel entgegen der Richtung der Beschleunigung aus. Wenn man den Ausschlagswinkel des Pendels von der Vertikalen mißt, kann man die Größe der Beschleunigung des Zuges beurteilen.

Wir nehmen an, daß sich der Zug von links nach rechts gleichförmig beschleunigt mit der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ (die gleichfalls von links nach rechts gerichtet ist) bewegt; dann stellen wir uns vor, daß das Pendel, nachdem es um den Winkel α von der Vertikalen ausgelenkt ist, sich in einer relativen Ruhelage (in bezug auf den sich bewegenden Waggon) befindet. Wir wollen die Abhängigkeit zwischen der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ und dem ihr entsprechenden Ausschlagswinkel α suchen.

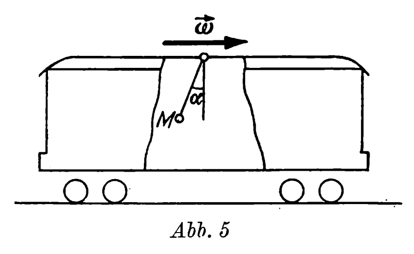


Abb. 5

Hierzu benutzen wir die Methode der Kinetostatik. Wir werden das kleine Gewicht M als materiellen Punkt betrachten und die Masse des Pendelstabes vernachlässigen. Am Punkte M greifen zwei Kräfte an: die Schwerkraft $\mathfrak{P}$ und die Reaktion des Stabes $\mathfrak{N}$ (Abb. 6). Wir fügen zu diesen Kräften die Trägheitskraft der kleinen Masse $\mathfrak{F}_I = - m\mathfrak{w}$ hinzu (wobei m die Masse des Gewichtes ist), die entgegengesetzt der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ gerichtet ist (d. h. von rechts nach links). Die Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{F}_I$ müssen sich gegenseitig aufheben. Wir folgern, daß die Resultierende der Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}_I$ durch die Reaktion des Stabes $\mathfrak{N}$ aufgehoben werden muß, d. h., sie muß längs der Verlängerung des Stabes gerichtet sein. Konstruieren wir ein Parallelogramm aus den Kräften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}_I$, so finden wir aus diesem Parallelogramm

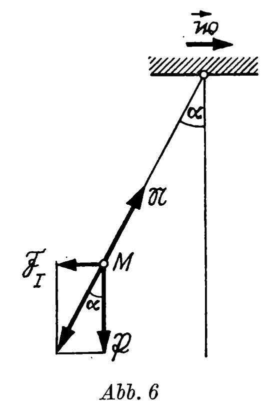


Abb. 6

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_I}{P}.$$

Es ist aber

$$F_I = m w, \qquad P = m g.$$

Folglich ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w}{g}.$$

Das ist die gesuchte Abhängigkeit zwischen der Beschleunigung w und dem Ausschlagswinkel α.

Diese Abhängigkeit ist von uns unter der Voraussetzung aufgestellt worden, daß die Beschleunigung w und der Ausschlagswinkel α konstante Größen sind (d. h. unter der Voraussetzung einer gleichförmig veränderlichen Bewegung des Zuges und der relativen Ruhe des Pendels). Tatsächlich bleiben weder die Beschleunigung w noch der Winkel α streng konstant. Eine genaue Lösung der Aufgabe bei variablem w und α kann man mit Hilfe von Überlegungen gewinnen, die im Artikel VIII dargelegt werden.

Beispiel 2. Die Erhöhung der äußeren Schiene auf gekrümmten Bahnabschnitten. Auf gekrümmten Abschnitten des Eisenbahngeleises wird die äußere Schiene höher gelagert als die innere. Das hat den Zweck, daß der Druck des fahrenden Zuges auf die Schienen möglichst senkrecht zum Bahnkörper gerichtet ist. (Ein Seitendruck auf die Schienen zerstört den Bahnkörper, verursacht die Vergrößerung des Bewegungswiderstandes und kann die Ursache einer Zugentgleisung sein.)

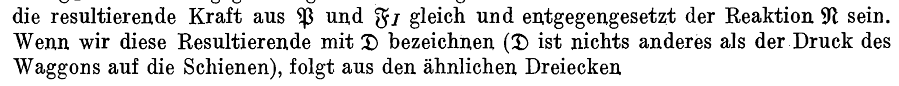
Wir wollen uns den Querschnitt eines sich in einer Kurve bewegenden Waggons vorstellen (Abb. 7). Wir bezeichnen den Radius der Kurve mit R, die Spurweite mit s und nehmen an, daß sich der Zug mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt. Wir bestimmen die Erhöhung h der äußeren Schiene aus der Bedingung, daß der Druck des Waggons auf die Schienen senkrecht zu der Geraden gerichtet sein muß, die die Schienenoberkanten verbindet.

Wir werden den Waggon als einen materiellen Punkt betrachten, indem wir die Masse des Waggons als in seinem Schwerpunkt konzentriert annehmen. Am Punkte M greifen zwei Kräfte an: die Schwerkraft $\mathfrak{P}$ und die Reaktion $\mathfrak{N}$ der Schienen. Da die Reaktion der Schienen entgegengesetzt dem Druck des Waggons auf die Schienen gerichtet ist, muß nach der Bedingung die Reaktion $\mathfrak{N}$ senkrecht zu der Geraden sein, die die Schienenoberkanten verbindet. Wir fügen zu den Kräften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{N}$ die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I$ des Waggons hinzu. Da der Waggon sich gleichförmig bewegt, ist die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I$ eine zentrifugale Kraft (die tangentiale Trägheitskraft ist gleich Null). Da der Punkt M in der horizontalen Ebene eine Kurve vom Radius R beschreibt, ist die zentrifugale Trägheitskraft horizontal nach außen, vom Krümmungsmittelpunkt der Kurve weg gerichtet und hat die Größe

$$F_I = \frac{m v^2}{R},$$

Abb. 7

wobei m die Masse des Waggons ist. Die Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{F}_I$ müssen sich gegenseitig aufheben. Folglich muß



die resultierende Kraft aus $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}_I$ gleich und entgegengesetzt der Reaktion $\mathfrak{N}$ sein. Wenn wir diese Resultierende mit $\mathfrak{D}$ bezeichnen ($\mathfrak{D}$ ist nichts anderes als der Druck des Waggons auf die Schienen), folgt aus den ähnlichen Dreiecken

$$\frac{h}{s} = \frac{F_I}{D},$$

und daraus

$$h = \frac{s F_I}{D}.$$

Es ist aber

$$F_I = \frac{m v^2}{R}, \qquad D = \sqrt{P^2 + F_I^2} = m g \sqrt{1 + \frac{v^4}{g^2 R^2}}.$$

Folglich ist

$$h = \frac{s v^2}{g R \sqrt{1 + \frac{v^4}{g^2 R^2}}}.$$

In dieser Gleichung ist das Glied $\frac{v^4}{g^2 R^2}$ stets klein im Vergleich zu Eins (z. B. bei $v = 15$ m/s, was 54 km/h entspricht, und $R = 300$ m ist $\frac{v^4}{g^2 R^2} = 0{,}00584$). Wenn wir

das Glied $\frac{v^4}{g^2 R^2}$ vernachlässigen, erhalten wir die angenäherte Formel

$$h = \frac{s\,v^2}{g\,R}.$$

Bei $v = 15$ m/s, $R = 300$ m und $s = 1{,}524$ m (die Normalspur der Eisenbahnen der UdSSR) erhalten wir nach dieser Formel $h = 11{,}7$ cm. Wie wir sehen, entspricht jedem Wert der Geschwindigkeit v ein eigener Überhöhungswert h. Bei Berechnungen nimmt man für v eine mittlere Geschwindigkeit auf dem gegebenen Bahnabschnitt an.

Beispiel 3. Der Zentrifugal-Regulator. Wir wollen uns das Schema des Zentrifugal-Regulators einer Dampfmaschine vorstellen (Abb. 8). Am oberen Ende A der vertikalen Spindel AB sind zwei Stäbe von der gleichen Länge l gelenkig befestigt, an deren Enden sich die schweren Kugeln M und M_1 befinden. Mit diesen zwei Stäben sind zwei andere Stäbe gelenkig verbunden, deren untere Enden die Kupplung S tragen, die entlang der Spindel AB gleiten kann. Der Regulator rotiert um die vertikale Achse AB. Bei Veränderung der Winkelgeschwindigkeit verändert sich der Divergenzwinkel der Stäbe AM und AM_1 und folglich auch die Lage der Kupplung. Die Kupplung ist mit den Organen verbunden, die das Einströmen des Dampfes in den Dampfzylinder regulieren, so daß die Verschiebung der Kupplung eine Verschiebung dieser Organe hervorruft. Dadurch wird das Regulieren des Ganges der Maschine erreicht.

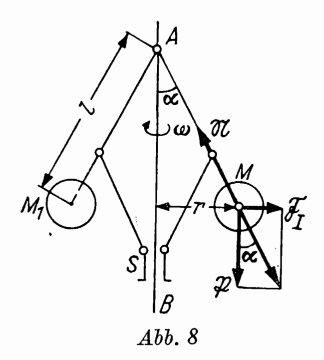


Abb. 8

Wir nehmen an, daß der Regulator sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Wir bestimmen den Winkel α, der durch jeden der Stäbe AM oder AM_1 mit der vertikalen Achse AB gebildet wird. Dabei werden wir die Kugeln M und M_1 als materielle Punkte behandeln und die Massen aller übrigen Teile des Mechanismus vernachlässigen. Wir wollen die Bewegung einer der Kugeln, z. B. M, betrachten und die kinetostatische Methode anwenden.

Auf den Punkt M wirken zwei Kräfte: die Schwerkraft $\mathfrak{P}$ und die Reaktion $\mathfrak{N}$ des Stabes AM, die in Richtung vom Punkte M nach dem Punkte A verläuft. Wir fügen zu diesen Kräften die Zentrifugal-Trägheitskraft $F_I = mr\,\omega^2$ hinzu, wobei m die Masse der Kugel und r ihr Abstand von der Drehachse ist. Die Gleichgewichtsbedingung erfordert, daß die Resultierende der Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}_I$ gleich und entgegengesetzt der Reaktion $\mathfrak{N}$ ist. Konstruieren wir das Parallelogramm aus den Kräften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}_I$, so finden wir

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_I}{P} = \frac{m\,r\,\omega^2}{m\,g} = \frac{r\,\omega^2}{g}.$$

Es ist aber

$$r = l \sin\alpha .$$

Folglich ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l\,\omega^2 \sin\alpha}{g}$$

oder

$$\sin\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{l\omega^2}{g}\right) = 0 .$$

Hieraus erhalten wir zwei Lösungen:

$$1)\ \sin\alpha = 0, \quad \text{d. h.} \quad \alpha = 0$$

$$2)\ \cos\alpha = \frac{g}{l\,\omega^2}.$$

Die zweite Lösung ist nur in dem Fall möglich, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω die Bedingung

$$\frac{g}{l\,\omega^2} < 1$$

oder

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{l}}$$

befriedigt.

Bei Erfüllung dieser Ungleichung entspricht jeder Winkelgeschwindigkeit ω ein eigener Wert des Winkels α, wobei mit dem Anwachsen von ω sich auch der Winkel α vergrößert.

Die erste Lösung $\alpha = 0$ hat nur theoretisches Interesse: Die Konstruktion des Mechanismus ist so, daß der Winkel α nicht Null werden kann, da die Kupplung S nur die Freiheit hat, sich längs der Achse AB in bestimmten Grenzen zu verschieben und infolgedessen sich auch der Winkel α nur in bestimmten Grenzen verändern kann[1].

KAPITEL III

DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER BEWEGUNG EINES MATERIELLEN PUNKTES

§ 7. Die Differentialgleichung der Bewegung eines materiellen Punktes

Das im vorhergehenden Kapitel dargelegte Verfahren der Lösung von Aufgaben der Dynamik wird besonders bequem in den Fällen angewandt, in denen eine Bewegung des materiellen Punktes gegeben ist und man die Kraft oder die Kräfte, unter deren Einwirkung diese Bewegung vor sich geht, bestimmen muß. Zu dieser Fragenkategorie gehörten die im vorhergehenden Paragraphen dargelegten Beispiele. Nicht weniger wichtig ist die umgekehrte Aufgabe: *die Bewegung des materiellen Punktes zu bestimmen, wenn die auf denselben wirkenden Kräfte bekannt sind.* Das allgemeine Verfahren der Lösung dieser Aufgabe ist die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung des materiellen Punktes.

Wir stellen uns den materiellen Punkt M vor, der eine Bewegung unter der Einwirkung der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ ausführt (Abb. 9). Wir wählen rechtwinklige Koordinatenachsen x, y, z. Die Bewegung des Punktes M wird bestimmt sein, wenn seine Koordinaten x, y, z als Funktionen der Zeit bekannt sind.

1 Anm. d. deutschen Redaktion: Außerdem sieht man statt des einen Brechpunktes bei A deren zwei vor, die außerhalb der Achse AB liegen.

Folglich kommen wir zu folgender Aufgabe: Die Koordinaten des materiellen Punktes sind als Funktionen der Zeit zu bestimmen, wenn die auf diesen einwirkenden Kräfte bekannt sind.

Wir wissen, daß die Beschleunigung des Punktes M durch die Grundgleichung der Dynamik

$$m\mathfrak{w} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \cdots + \mathfrak{F}_n$$

bestimmt wird, wobei m die Masse des Punktes ist. Wir projizieren beide Teile dieser Gleichung nacheinander auf die Achsen x, y und z. Natürlich muß die Projektion des linken Teiles der Gleichung gleich der Projektion des rechten Teiles sein.

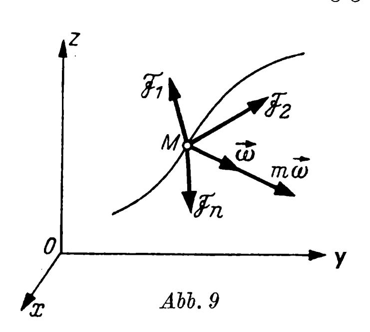


Abb. 9

Projizieren wir den Vektor $m\mathfrak{w}$ und die Summe der Kräfte

$$\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \cdots + \mathfrak{F}_n$$

auf die Achsen x, y, z und beachten wir, daß die Richtung des Vektors $m\mathfrak{w}$ mit der Richtung des Vektors $\mathfrak{w}$ zusammenfällt, so finden wir

$$m\,w\cos(\mathfrak{w}, x) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$
$$m\,w\cos(\mathfrak{w}, y) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n,$$
$$m\,w\cos(\mathfrak{w}, z) = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n,$$

wobei $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \ldots, X_n, Y_n, Z_n$ die Komponenten der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auf den Achsen x, y und z sind. $w\cos(\mathfrak{w}, x)$, $w\cos(\mathfrak{w}, y)$, $w\cos(\mathfrak{w}, z)$ sind die Komponenten der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ auf den Achsen x, y und z. Die Komponenten der Beschleunigung auf den Koordinatenachsen sind gleich den zweiten Ableitungen der entsprechenden Koordinaten nach der Zeit (siehe Teil I, § 90), d. h.

$$w\cos(\mathfrak{w}, x)F = \ddot{x}, \qquad w\cos(\mathfrak{w}, y) = \ddot{y}, \qquad w\cos(\mathfrak{w}, z) = \ddot{z}.$$

Nach Substitution erhalten wir

$$m\ddot{x} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$
$$m\ddot{y} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n,$$
$$m\ddot{z} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n.$$

Diese Gleichungen sind die *Differentialgleichungen der Bewegung eines materiellen Punktes.* Integrieren wir diese Gleichungen, so finden wir die Koordinaten x, y, z als Funktionen der Zeit, wodurch die Bewegung des Punktes bestimmt ist.

Wir bemerken noch, daß wir zur Bestimmung der Bewegung eines Punktes nur die zwei ersten Gleichungen zur Verfügung haben, wenn sich der Punkt M unter der Einwirkung von Kräften, die in der xy-Ebene liegen, nur in dieser einen Ebene bewegt. Bei einer geradlinigen Bewegung werden wir nur die erste Gleichung benötigen, wenn wir die geradlinige Bewegungsbahn als x-Achse annehmen.

Wir werden das Integrieren der Differentialgleichungen der Bewegung an einfachen Beispielen aufzeigen.

§ 8. Die Bewegung eines gebremsten Zuges. Die Anfangsbedingungen

Wir wollen uns einen Eisenbahnzug vorstellen, der sich auf einer geradlinigen horizontalen Strecke mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 bewegt. In einem bestimmten Augenblick beginnt das Bremsen des Zuges. Wir nehmen an, daß sich dabei ein Bewegungswiderstand entwickelt, der gleich $\frac{1}{10}$ des Gewichtes des Zuges ist. Es soll die Bewegung des gebremsten Zuges bestimmt werden.

Wir werden den Zug als einen materiellen Punkt betrachten, indem wir annehmen, daß seine ganze Masse im Schwerpunkt M konzentriert ist. Als x-Achse wählen wir die geradlinige Bewegungsbahn des Punktes M oder, was dasselbe ist, die ihr parallele Gerade, den Schienenstrang. Als Koordinatenursprung wählen wir die Lage,

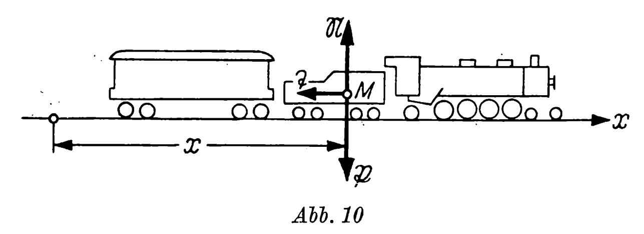


Abb. 10

in der der Punkt M sich zu Beginn des Bremsens befand (Abb. 10). Von diesem Anfangsaugenblick des Bremsens zählen wir die Zeit, d. h., für den Anfangsaugenblick ist $t = 0$. Wir müssen die Bewegung des Zuges, beginnend mit dem Augenblick $t = 0$, untersuchen.

Während des Bremsens wirken drei Kräfte auf den Zug: die Schwerkraft $\mathfrak{P}$, die Reaktion $\mathfrak{N}$ der Schienen und der Widerstand, den wir durch den Buchstaben $\mathfrak{T}$ bezeichnen. Diese Kräfte lassen wir am Punkte M angreifen (Abb. 10). Wenn wir die Differentialgleichung der Bewegung des Punktes M in bezug auf die x-Achse aufstellen, finden wir

$$m\ddot{x} = -T,$$

wobei m die Masse des Zuges ist. Nach der Voraussetzung ist

$$T = \frac{P}{10} = \frac{mg}{10}.$$

Wenn wir diesen Ausdruck einsetzen und durch m kürzen, erhalten wir:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{10}.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$\dot{x} = -\frac{gt}{10} + C_1, \tag{1}$$

wobei C_1 eine willkürliche Konstante ist. Durch eine zweite Integration erhalten wir

$$x = -\frac{g t^2}{20} + C_1 t + C_2, \tag{2}$$

wobei C_2 eine neue willkürliche Konstante ist.

Wir haben die Koordinate x als Funktion der Zeit gefunden. In dem gewonnenen Ausdruck für x sind zwei willkürliche Konstanten enthalten, was auch zu erwarten war, da wir es mit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zu tun hatten. Die Konstanten C_1 und C_2 bestimmen wir auf folgende Art:

Wir setzen in die Gln. (1) und (2) die Zeit $t = 0$ ein. Bei $t = 0$ ist $x = 0$ (da bei Beginn des Bremsens sich der Punkt M am Koordinatenursprung befand) und $\dot{x} = v_0$ (da $\dot{x}$ nichts anderes ist als die Größe der Geschwindigkeit des Zuges; diese war aber zu Beginn des Bremsens gleich v_0). Setzen wir $t = 0$, $x = 0$ und $\dot{x} = v_0$ in die Gln. (1) und (2) ein, so erhalten wir:

$$v_0 = C_1, \qquad 0 = C_2,$$

womit die Konstanten C_1 und C_2 bestimmt sind.

Setzen wir die gewonnenen Ausdrücke $C_1 = v_0$ und $C_2 = 0$ in die Gln. (1) und (2) ein, so finden wir endgültig:

$$\dot{x} = v_0 - \frac{g t}{10}, \tag{3}$$

$$x = v_0 t - \frac{g t^2}{20}. \tag{4}$$

Durch diese Gleichungen wird der Bewegungsverlauf des gebremsten Zuges voll und ganz bestimmt. Um z. B. zu finden, nach welcher Zeit vom Beginn des Bremsens an der Zug stehen bleibt, setzen wir $\dot{x} = 0$ in die Gl. (3) ein:

$$0 = v_0 - \frac{g t}{10},$$

woraus

$$t = \frac{10 v_0}{g}$$

folgt.

Das ist die Zeit, nach der der Zug zum Stehen kommt. Um zu finden, welchen Weg der Zug während des Bremsens durchläuft, setzen wir die gefundene Zeit bis zum Stehenbleiben in die Gl. (4) ein:

$$x = \frac{10 v_0^2}{g} - \frac{5 v_0^2}{g} = \frac{5 v_0^2}{g}.$$

Das ist die gesuchte Strecke.

Aus diesem Beispiel ist zu ersehen, daß mit der Vorgabe der am materiellen Punkt angreifenden Kräfte die Bewegung des Punktes noch nicht voll und ganz bestimmt ist. Zur völligen Bestimmung der Bewegung des Punktes ist es notwendig: 1. die auf den Punkt wirkenden Kräfte und 2. die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes anzugeben (d. h. seine Lage und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$).

Bei einer Bewegung des Punktes im Raum werden seine Lage und seine Geschwindigkeit durch die Koordinaten x, y, z und die Ableitungen dieser Koordinaten nach der Zeit $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ bestimmt (weil die Ableitungen der Koordinaten gleich den Komponenten der Geschwindigkeit in den Koordinatenachsen sind). Folglich werden die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes durch die Anfangswerte seiner Koordinaten (wir wollen sie x_0, y_0, z_0 nennen) und durch die Anfangsbedingungen der Ableitungen der Koordinaten (wir bezeichnen sie mit $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ und $\dot{z}_0$) bestimmt. Die Größen x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ und $\dot{z}_0$ heißen *Anfangsbedingungen.*

Die Angabe der Kräfte, die auf den materiellen Punkt einwirken, gestattet, die Differentialgleichungen der Bewegung des Punktes aufzustellen. *Die willkürlichen Konstanten, die bei der Integration dieser Differentialgleichungen erscheinen, werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt.*

Bei der Bewegung des Punktes im Raum haben wir drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung; ihre Integration führt sechs willkürliche Konstanten ein, für deren Bestimmung wir die sechs Anfangswerte x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ und $\dot{z}_0$ haben. Bei der Bewegung des Punktes in der xy-Ebene haben wir zwei Differentialgleichungen der Bewegung und folglich vier willkürliche Konstanten; zu ihrer Bestimmung dienen die vier Anfangswerte x_0, y_0, $\dot{x}_0$ und $\dot{y}_0$. Schließlich haben wir bei einer geradlinigen Bewegung des Punktes zwei beliebige Konstanten und zwei Anfangswerte. Somit ist die Zahl der willkürlichen Konstanten stets gleich der Zahl der Anfangswerte. Wenn wir so verfahren, wie im dargelegten Beispiel gezeigt ist, können wir stets alle willkürlichen Konstanten bestimmen, die sich bei der Integration der Differentialgleichungen der Bewegung ergeben[1].

§ 9. Die Bewegung eines frei fallenden Körpers. Der Luftwiderstand

Wir wollen die Bewegung eines Körpers M betrachten, der aus der Höhe H auf die Erdoberfläche fällt.

Wir werden den Körper M als einen materiellen Punkt betrachten. Die Bewegung des Punktes M geht unter der Einwirkung zweier Kräfte vor sich: der Schwerkraft und des Luftwiderstandes. Wir wollen zuerst die Aufgabe lösen, indem wir den Luftwiderstand vernachlässigen, d. h., wir wollen die Bewegung des im luftleeren Raum fallenden Körpers betrachten.

[1] Wenn wir so verfahren, wie soeben dargelegt wurde, erhalten wir die Koordinaten des sich bewegenden Punktes als partikuläre Lösungen der Differentialgleichungen der Bewegung. Es muß vermerkt werden, daß auch solche Ausnahmefälle möglich sind, wo die Lösung der Aufgabe der Dynamik nicht durch Partikulärlösungen, sondern durch *singuläre* Lösungen der entsprechenden Differentialgleichungen erhalten wird. Siehe Poisson, Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et des équations aux différences. Journal de l'école polytechn., Bd. 6, Heft 10 (1806), Seite 60.

Wir wählen als x-Achse die geradlinige Bewegungsbahn des Punktes M (Abb. 11). Wir erhalten, nachdem wir die x-Achse senkrecht nach unten gerichtet und als Koordinatenursprung die Anfangslage des Punktes M angenommen haben, die Differentialgleichung der Bewegung

$$m\ddot{x} = P, \tag{1}$$

wobei m die Masse und P das Gewicht des Punktes M sind.

Wir wollen sofort die Anfangsbedingungen festlegen, die unserer Aufgabe entsprechen. Da sich im Anfangsaugenblick der Punkt M im Koordinatenursprung befand, und da seine Geschwindigkeit in diesem Augenblick gleich Null war, gilt für $t = 0$:

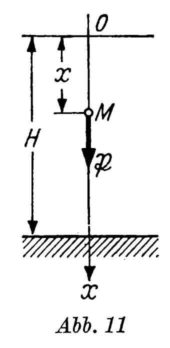


Abb. 11

$$x = 0, \qquad \dot{x} = 0.$$

Wir wenden uns der Integration der Differentialgleichung (1) zu. Nachdem wir diese Gleichung durch m dividiert und beachtet haben, daß $P = mg$ ist, erhalten wir

$$\ddot{x} = g.$$

Wenn wir integrieren, finden wir

$$\dot{x} = gt + C_1,$$

wobei C_1 eine willkürliche Konstante ist. Wir wollen sofort die Konstante C_1 aus den Anfangsbedingungen bestimmen. Wenn wir in die letzte Gleichung $t = 0$ und $\dot{x} = 0$ einsetzen, finden wir $C_1 = 0$. Folglich ist

$$\dot{x} = gt. \tag{2}$$

Eine zweite Integration ergibt

$$x = \frac{1}{2} g t^2 + C_2,$$

wobei C_2 eine neue willkürliche Konstante ist. Wenn wir hier $t = 0$ und $x = 0$ setzen, finden wir $C_2 = 0$ und folglich

$$x = \frac{1}{2} g t^2. \tag{3}$$

Durch die Gln. (2) und (3) wird die gleichförmig (mit der Beschleunigung g) beschleunigte Bewegung des fallenden Körpers im leeren Raum bestimmt. Wollen wir die Fallzeit aus der Höhe H bestimmen, so setzen wir $x = H$ in die letzte Gleichung ein und lösen diese Gleichung nach t auf:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \tag{4}$$

Durch diese Formel wird die Fallzeit aus der Höhe H bestimmt.

Nun wollen wir die gleiche Aufgabe lösen, indem wir den Luftwiderstand, den wir mit R bezeichnen, berücksichtigen. Die Größe des Widerstandes, die der in der Luft sich bewegende Körper zu überwinden hat, hängt von der Größe der Geschwindigkeit des Körpers ab. Der Luftwiderstand R wächst mit der Vergrößerung der Geschwindigkeit v an. In ziemlich weiten Grenzen (ungefähr von $v = 0{,}2$ m/s bis $v = 240$ m/s) kann man den Luftwiderstand als proportional dem Quadrat der Größe der Geschwindigkeit annehmen. Bei kleineren Geschwindigkeiten als 0,2 m/s muß man den Luftwiderstand als proportional der ersten Potenz der Größe der Geschwindigkeit annehmen. Außerdem hängt der Luftwiederstand R von den Abmessungen und der Form des Körpers ab. Was die Abhängigkeit des Widerstandes von den Abmessungen des Körpers anbetrifft, so kann man rechnen, daß der Widerstand R proportional der Fläche der Projektion des Körpers auf die zu der Richtung seiner Bewegung senkrechte Ebene ist. Wenn wir diese Fläche mit σ bezeichnen, erhalten wir (für Geschwindigkeiten in den oben erwähnten Grenzen) die Gleichung

$$R = k\sigma v^2,$$

wobei k der von der Form des Körpers abhängige Koeffizient ist.[1] Für eine Kugel ist nach den Versuchen von EIFFEL $k = 0{,}024$ (dabei wird die Kraft R in Kilogramm ausgedrückt, die Fläche σ in Quadratmeter und die Geschwindigkeit v in Meter/Sekunde.[2])

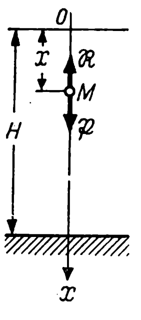


Abb. 12

Wir stellen die Differentialgleichung der Bewegung des materiellen Punktes M auf, indem wir voraussetzen, daß außer der Schwerkraft $\mathfrak{P}$ auch der Luftwiderstand $\mathfrak{R}$ auf denselben einwirkt. Der Widerstand $\mathfrak{R}$ ist nach der Seite gerichtet, die der Bewegung entgegengesetzt ist, d. h. vertikal nach oben. Wählen wir die x-Achse wie früher (Abb. 12), so erhalten wir die Gleichung

$$m\ddot{x} = P - R.$$

Wir setzen hier $R = k\sigma v^2$ und ersetzen $\ddot{x}$ durch $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ (da $\dot{x} = v$ ist):

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = P - k\sigma v^2.$$

Integrieren wir diese Gleichung, so finden wir die Abhängigkeit zwischen der Geschwindigkeit v und der Zeit t. Es gilt folgende Anfangsbedingung:

$$v = 0 \quad \text{bei} \quad t = 0.$$

Bevor wir zur Integration der gewonnenen Gleichung übergehen, bemerken wir, daß ihr rechter Teil für

$$v = \sqrt{\frac{P}{k\sigma}}$$

Null wird.

[1] Anm. d. deutschen Redaktion: Außerdem ist k proportional der Luftdichte δ, so daß man vielfach schreibt $R = \frac{\delta}{2} v^2 \cdot \sigma \cdot c_W$.

[2] Ausführlichere Angaben über den Luftwiderstand kann man in dem Werk „Die theoretischen Grundlagen der Luftschiffahrt" von N. E. Shukowski finden. Н.Е.Жуковского «Теоретические основы воздухоплавания». Собрание сочинений, т. VI, Гостехиздат, М.— Л., 1950.

Wir führen die Bezeichnung

$$\sqrt{\frac{P}{k\sigma}} = c$$

ein.

Folglich muß für $v = c$ auch der linke Teil unserer Gleichung verschwinden, d. h., es ist $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$. Das bedeutet, daß der fallende Körper bei der Geschwindigkeit $v = c$ sich gleichförmig bewegen wird; folglich ist c die Geschwindigkeit des gleichförmigen Falles in der Luft.

Nun schreiben wir unsere Gleichung um, indem wir

$$k\sigma = \frac{P}{c^2}$$

setzen.

Nach der Kürzung durch m erhalten wir:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{c^2}(c^2 - v^2).$$

Hieraus ersehen wir, daß bei kleineren Geschwindigkeiten als c der Körper beschleunigt fällt $\left(\text{weil } \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} > 0 \text{ für } v < c \text{ ist}\right)$. Bei größeren Geschwindigkeiten als c bewegt sich der Körper verlangsamt $\left(\text{weil } \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} < 0 \text{ für } v > c \text{ ist}\right)$.

Wir trennen die Variablen in der gewonnenen Gleichung, indem wir dieselbe folgendermaßen umschreiben:

$$\frac{g}{c^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{c^2 - v^2}.$$

Nach Integration erhalten wir

$$\frac{g}{c^2}\,t = \int \frac{\mathrm{d}v}{c^2 - v^2}.$$

Wir bemerken, daß

$$\frac{1}{c^2 - v^2} = \frac{1}{2c}\left(\frac{1}{c+v} + \frac{1}{c-v}\right)$$

ist. Folglich ist

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{c^2 - v^2} = \frac{1}{2c}\left(\int \frac{\mathrm{d}v}{c+v} + \int \frac{\mathrm{d}v}{c-v}\right)$$

$$= \frac{1}{2c}\left[\ln(c+v) - \ln(c-v)\right] + C_1 = \frac{l}{2c} \ln \frac{c+v}{c-v} + C_1,$$

wobei C_1 eine willkürliche Konstante ist. Somit erhalten wir folgende Abhängigkeit zwischen t und v:

$$\frac{g}{c^2}\,t = \frac{1}{2c}\ln\frac{c+v}{c-v} + C_1.$$

Die Konstante C_1 bestimmen wir aus den Anfangsbedingungen. Nehmen wir $t = 0$ und $v = 0$ an, so finden wir $C_1 = 0$. Folglich erhalten wir endgültig

$$\frac{g}{c}\,t = \frac{1}{2}\ln\frac{c+v}{c-v}.$$

Wir lösen diese Gleichung nach v auf. Es gilt:

$$\frac{c+v}{c-v} = e^{2\frac{g}{c}t}, \quad c + v = e^{2\frac{g}{c}t}(c - v).$$

Daher ist

$$v = c\,\frac{e^{2\frac{g}{c}t} - 1}{e^{2\frac{g}{c}t} + 1} = c\,\frac{e^{\frac{gt}{c}} - e^{-\frac{gt}{c}}}{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}}$$

oder, wenn wir die hyperbolische Funktion einführen[1]

$$v = c\,\mathfrak{Tg}\,\frac{gt}{c}. \qquad (5)$$

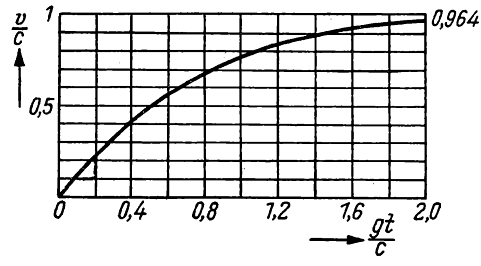


Abb. 13

Nach dieser Formel kann die Geschwindigkeit v leicht mit Hilfe der Tabellen der hyperbolischen Funktionen[2] errechnet werden. Die Abhängigkeit der Geschwindigkeit v von der Zeit t ist graphisch in der Abb. 13 dargestellt. Auf der Abszisse sind die Werte der Größe $\frac{gt}{c}$ und auf der Ordinate die entsprechenden Werte der Größe $\frac{v}{c}$ abgetragen. Die Geschwindigkeit v wächst ununterbrochen an und nähert sich asymptotisch der Grenzgeschwindigkeit $v = c$ bei einem unbegrenzten Anwachsen der Zeit t.

Wir gehen nun zur Bestimmung der Koordinate x als Funktion der Zeit t über. Da $v = \dot{x}$ ist, gilt die Gleichung

$$\dot{x} = c\,\mathfrak{Tg}\,\frac{gt}{c}$$

---

[1] Folgende Größen werden der hyperbolische *sinus*, *cosinus* und *tangens* genannt:

$$\mathfrak{Sin}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathfrak{Cof}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathfrak{Tg}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

[2] Solche Tabellen gibt es im Nachschlagewerk „Hütte". Ausführlichere Tabellen und auch eine Sammlung von Formeln, die sich auf die hyperbolischen Funktionen beziehen, kann man im Buch von F. Emde, Tafeln elementarer Funktionen, Verlag Teubner, Leipzig, finden.

mit der Anfangsbedingung

$$x = 0 \quad \text{bei} \quad t = 0.$$

Durch Integration finden wir

$$x = \frac{c^2}{g} \ln \mathfrak{Cof} \frac{g t}{c} + C_2,$$

wobei C_2 eine willkürliche Konstante ist. Setzen wir in dieser Gleichung $t = 0$ und $x = 0$, so erhalten wir $C_2 = 0$. Folglich ist

$$x = \frac{c^2}{g} \ln \mathfrak{Cof} \frac{g t}{c}.$$

Die durch diese Gleichung ausgedrückte Abhängigkeit zwischen x und t ist graphisch in Abb. 14 dargestellt. Auf der horizontalen Achse sind die Werte der Größe $\frac{g t}{c}$ und auf der vertikalen Achse die entsprechenden Werte der Größe $\frac{g x}{c^2}$ aufgetragen. Die zur Gl. (6) gehörige Kurve hat als Asymptote die Gerade

$$x = c t - \frac{c^2}{g} \ln 2,$$

die in Abb. 14 durch eine dünne Linie dargestellt ist.

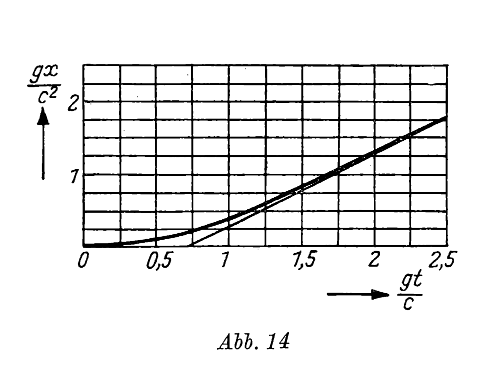


Abb. 14

Tabelle 1

$\frac{g t}{c}$	$\frac{g x}{c^2}$	$\frac{v}{c}$	$\frac{x}{g t^2}$
0	0	0	0,5
0,5	0,120	0,462	0,481
1	0,434	0,762	0,434
1,5	0,855	0,905	0,380
2	1,325	0,964	0,331
2,5	1,814	0,987	0,290
3	2,309	0,995	0,257
3,5	2,808	0,998	0,229
4	3,307	0,999	0,207
4,5	3,807	1,000	0,188
5	4,307	1,000	0,172
∞	∞	1	0

Die Fallzeit aus der Höhe H wird aus der Gleichung

$$H = \frac{c^2}{g} \ln \mathfrak{Cof} \frac{g t}{c}$$

gefunden.

In der Tabelle 1 sind die Werte der Größen $\frac{g\,x}{c^2}$ und $\frac{v}{c}$ angeführt, die nach den Gln. (5) und (6) für verschiedene Werte des Argumentes $\frac{g\,t}{c}$ errechnet sind; in derselben Tabelle sind auch die Werte des Verhältnisses $\frac{g\,x}{c^2} : \left(\frac{g\,t}{c}\right)^2 = \frac{x}{g\,t^2}$ angeführt.

Wir wollen die gewonnenen Resultate auf folgendes Beispiel anwenden.

Bei einem der auf dem Eiffelturm durchgeführten Versuche über die Bewegung eines in der Luft fallenden Körpers wurde der Fall einer quadratischen Platte von 0,715 kg Gewicht und der Fläche 0,0225 m² aus der zweiten Etage des Turmes beobachtet. Die Fallhöhe war 120 m, die beobachtete Fallzeit 7,04 s; die Platte blieb im Fallen horizontal. Nach diesen Angaben wollen wir den Wert des Koeffizienten k in der Formel des Luftwiderstandes $R = k\sigma v^2$ für die quadratische Platte ermitteln.

Bezeichnen wir die Fallhöhe mit x und die Fallzeit mit t, so gilt

$$\frac{x}{g\,t^2} = \frac{120}{9{,}81 \cdot (7{,}04)^2} = 0{,}247\,.$$

Aus der Tabelle 1 finden wir, daß diesem Wert $\frac{x}{g\,t^2}$ ein Wert $\frac{g\,t}{c} = 3{,}18$ entspricht. Daraus folgt:

$$c = \frac{9{,}81 \cdot 7{,}04}{3{,}18} = 21{,}7 \text{ m/s}\,.$$

Andererseits ist

$$c = \sqrt{\frac{P}{k\,\sigma}}\,.$$

Daher ist

$$k = \frac{P}{c^2\,\sigma}\,.$$

Setzen wir hier $P = 0{,}715$ kg, $\sigma = 0{,}0225$ m² und $c = 21{,}7$ m/s, so finden wir:

$$k = \frac{0{,}715}{(21{,}7)^2 \cdot 0{,}0225} = 0{,}067\,.$$

Spätere Versuche von Eiffel, die gleichfalls auf dem Eiffelturm durchgeführt wurden, ergaben im Durchschnitt für die quadratische Platte den Wert $k = 0{,}075$.

§ 10. Die Bewegung eines schräg zur Horizontalen geworfenen Körpers

Als Beispiel einer krummlinigen Bewegung betrachten wir die Bewegung eines schräg zur Horizontalen geworfenen Körpers. Wir setzen voraus, daß die Bewegung in einem leeren Raum vor sich geht, d. h., wir vernachlässigen den Luftwiderstand.

Wir nehmen an, daß der Körper M (den wir als einen materiellen Punkt betrachten) von dem Punkte O aus, der sich auf der Erdoberfläche befindet, mit einer Anfangs-

geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α zur Horizontalen geworfen wird. Wir wählen den Punkt O als Koordinatenursprung der Achsen x und y und richten die x-Achse horizontal, die y-Achse vertikal nach oben. Bezeichnen wir das Gewicht des Körpers M mit P, so gewinnen wir die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$m\ddot{x} = 0, \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = -P. \tag{2}$$

Wir legen die Anfangsbedingungen fest:

$$t = 0 \begin{cases} x = 0, & \dot{x} = v_0 \cos\alpha, \\ y = 0, & \dot{y} = v_0 \sin\alpha. \end{cases}$$

Wir integrieren die Gl. (1). Wenn wir durch die Masse m dividieren, erhalten wir

$$\ddot{x} = 0,$$

woraus wir durch Integration

$$\dot{x} = C_1$$

$$x = C_1 t + C_2$$

erhalten. Hierin sind C_1 und C_2 willkürliche Konstanten. Substituieren wir die Anfangsbedingungen ($t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0 \cos\alpha$), so finden wir

$$C_1 = v_0 \cos\alpha, \quad C_2 = 0.$$

Folglich erhalten wir endgültig

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha,$$

$$x = v_0 t \cos\alpha. \tag{3}$$

Wir gehen zur Integration der Gl. (2) über. Wir dividieren die Gleichung durch m:

$$\ddot{y} = -g.$$

Durch Integration erhalten wir:

$$\dot{y} = -gt + C_3,$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4,$$

wobei C_3 und C_4 neue willkürliche Konstanten sind. Setzen wir die Anfangsbedingungen ($t = 0$, $y = 0$, $\dot{y} = v_0 \sin\alpha$) ein, so finden wir

$$C_3 = v_0 \sin\alpha, \quad C_4 = 0.$$

Folglich ist

$$\dot{y} = v_0 \sin\alpha - gt,$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \tag{4}$$

Durch die Gln. (3) und (4) ist die Bewegung eines schräg zur Horizontalen geworfenen materiellen Punktes im leeren Raum bestimmt. Wenn wir die Zeit t aus diesen Gleichungen eliminieren, finden wir die Gleichung der Bewegungsbahn des Punktes M. Aus der Gl. (3) gewinnen wir

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck für t in die Gl. (4) ein, so erhalten wir

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}. \tag{5}$$

Das ist die Gleichung einer Parabel mit einer vertikalen Mittellinie. Also beschreibt ein schräg zur Horizontalen geworfener Körper im leeren Raum eine Parabel; dieses Resultat fand bereits GALILEI.

Wir wollen die Wurfweite $OA = l$ des Punktes M ermitteln (Abb. 15). Die Wurfweite l ist der Abszissenwert x des Punktes der Bewegungsbahn, für den $y = 0$ ist. Setzen wir in die Gl. (5) $y = 0$ ein und lösen nach x auf, so finden wir

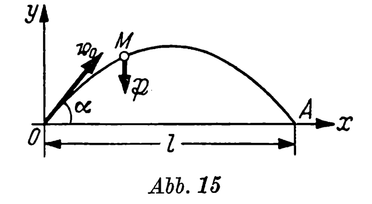


Abb. 15

$$l = \frac{2 v_0^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Hieraus ersehen wir, daß die größte Wurfweite bei der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter dem Winkel $\alpha = 45°$ erreicht wird. Bei diesem Werte des Winkels α erhalten wir

$$l_{\max} = \frac{v_0^2}{g}. \tag{6}$$

Es muß unterstrichen werden, daß die in diesem Paragraphen erhaltenen Resultate nur bei der Bewegung des geworfenen Körpers im leeren Raum richtig sind. Bei der Bewegung in der Luft verändern sich diese Resultate wesentlich durch den Einfluß des Luftwiderstandes. Je größer die Bewegungsgeschwindigkeit ist, desto größer ist dieser Einfluß, da der Luftwiderstand mit dem Anwachsen der Geschwindigkeit wächst. Um einen Begriff davon zu geben, wie stark sich der Luftwiderstand auf die Bewegung eines Geschosses auswirkt, wollen wir folgende Zahlen anführen:

Ein deutsches Gewehr erteilt dem Geschoß eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 620$ m/s. Bei der Bewegung in einem luftleeren Raume würde dieser Anfangsgeschwindigkeit nach der Gl. (6) die größte Schußweite $l_{\max} \approx 39$ km entsprechen. Indessen beträgt die größte Schußweite des Geschosses beim Schießen mit diesem Gewehr ungefähr 4 km. Dabei entspricht diese größte Schußweite nicht dem Winkel $\alpha = 45°$, sondern ergibt sich bei $\alpha = 32°$[1].

[1] Die Theorie der Bewegung des Geschosses in der Luft wird in den Werken über die äußere Ballistik dargelegt. Siehe z. B. N. Sabudski, „Äußere Ballistik" (Н. Забудский, Внешняя баллистика, СПб, 1895).

Wir wollen die Gl. (6) auch noch bei folgender Frage anwenden.

Im Jahre 1906 zerbarst in einer Fabrik ein Schwungrad. Der Radkranz zerriß in 21 Teile, die in der Ebene des Schwungrades in verschiedene Richtungen auseinanderflogen. Alle diese Teile wurden in verschiedenen Abständen von der von der Katastrophe betroffenen Maschine gefunden. Die größte Entfernung, in die ein Teil des Radkranzes geschleudert wurde, betrug 280 m. Der Radius des Schwungrades war $R = 1{,}75$ m. Wir wollen versuchen zu berechnen, wie groß die Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades im Augenblick der Katastrophe war.

Wir werden den Luftwiderstand vernachlässigen und annehmen, daß jener Teil des Schwungradkranzes, der 280 m weit flog, seine parabolische Bewegung mit einer Anfangsgeschwindigkeit begann, die unter dem Winkel 45° gegenüber der Horizontalen geneigt war. In diesem Falle finden wir aus der Gl. (6), indem wir die Anfangsgeschwindigkeit mit v_0 bezeichnen und $l_{\max} = 280$ m annehmen,

$$v_0 = \sqrt{g\, l_{\max}} = \sqrt{9{,}81 \cdot 280} = 52{,}4 \text{ m/s}.$$

Dies war die Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades im Augenblick der Katastrophe. Hieraus erhalten wir, indem wir die gesuchte Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades mit ω bezeichnen:

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{52{,}4}{1{,}75} = 29{,}95 \frac{1}{\text{s}} \quad \text{oder} \quad \omega = 286 \text{ U/min}.$$

Da wir bei der Berechnung den Luftwiderstand vernachlässigt haben, muß in Wirklichkeit die Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades im Augenblick der Katastrophe höher gewesen sein als die soeben errechnete. Die Betriebsdrehzahl, mit der die Maschine arbeitete, betrug 110 U/min. Die Ursache der Katastrophe war die Beschädigung des Regulators der Maschine.

KAPITEL IV

DIE ARBEIT UND DIE KINETISCHE ENERGIE

§ 11. Die Arbeit einer Kraft

Wir wollen zuerst den Begriff der Arbeit für den folgenden *Spezialfall* darlegen.

Es ist die Kraft $\mathfrak{F}$ gegeben, die *konstant nach Größe und Richtung* ist. Wir nehmen an, daß sich der Angriffspunkt M der Kraft $\mathfrak{F}$ geradlinig verschiebt. Wir wählen zwei beliebige Lagen M_1 und M_2 des Punktes M auf ihrer geradlinigen Bewegungsbahn (Abb. 16) und bezeichnen $M_1 M_2 = \mathfrak{s}$. Die *Arbeit R der Kraft* $\mathfrak{F}$ bei der Verschiebung $\mathfrak{s}$ ihres Angriffspunktes ist das Produkt

$$R = Fs \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{s}),$$

wobei $(\mathfrak{F}, \mathfrak{s})$ der Winkel zwischen der Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$ und der Richtung der Verschiebung $\mathfrak{s}$ ist. Da die Richtung der Verschiebung $\mathfrak{s}$ mit der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M zusammenfällt, kann man auch

$$R = Fs\cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v})$$

schreiben.

Wir bemerken, daß die Arbeit R positiv ist, wenn der Winkel $(\mathfrak{F}, \mathfrak{v})$ spitz ist, und negativ, wenn dieser Winkel stumpf ist. Wenn die Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$ mit der Richtung der Verschiebung $\mathfrak{s}$ zusammenfällt, ist der Winkel $(\mathfrak{F}, \mathfrak{v}) = 0$ und

$$R = Fs.$$

Wenn jedoch die Kraft entgegengesetzt der Verschiebung verläuft, dann ist der Winkel $(\mathfrak{F}, \mathfrak{v}) = 180°$ und

$$R = -Fs.$$

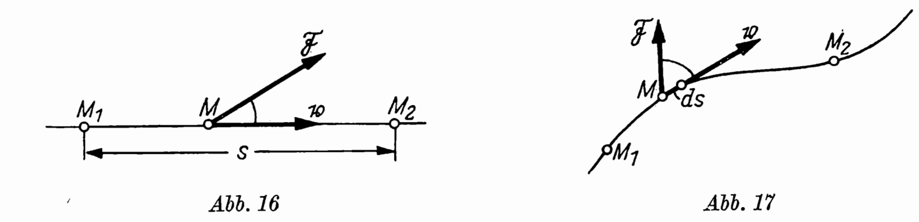


Abb. 16 *Abb. 17*

Schließlich ist die Arbeit R gleich Null, wenn der Winkel $(\mathfrak{F}, \mathfrak{v}) = 90°$ ist, d. h., wenn die Kraft $\mathfrak{F}$ senkrecht zu der Verschiebung $\mathfrak{s}$ gerichtet ist.

Wir gehen zu dem *allgemeinen Fall der variablen Kraft* und der *krummlinigen* Bewegung über und stellen uns eine beliebige Kraft $\mathfrak{F}$ vor. Wir nehmen an, daß sich ihr Angriffspunkt M auf irgend einer krummlinigen Bewegungsbahn verschiebt (Abb. 17). Wir wählen zwei beliebige Lagen M_1 und M_2 des Punktes M auf seiner Bewegungsbahn. Die Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ bei der Verschiebung des Punktes M aus der Lage M_1 in die Lage M_2 werden wir auf folgende Art bestimmen:

Wir stellen uns den Bogen M_1M_2 in eine Reihe von elementaren (unendlich kleinen) Verschiebungen ds unterteilt vor. Das Produkt

$$\mathrm{d}R = F\,\mathrm{d}s\cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v})$$

ist die *elementare* Arbeit dR der Kraft $\mathfrak{F}$ bei der elementaren Verschiebung ds, wobei $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des Punktes M ist. Wir werden mit „Arbeit R der Kraft $\mathfrak{F}$ bei der endlichen Verschiebung M_1M_2" die Summe der elementaren Arbeiten der Kraft $\mathfrak{F}$ auf allen elementaren Verschiebungen bezeichnen, in die der endliche Weg M_1M_2 unterteilt wird:

$$R = \sum \mathrm{d}R = \sum F\,\mathrm{d}s\cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v}).$$

Natürlich besteht diese Summe aus einer unendlichen Zahl unendlich kleiner Summanden. Eine solche Summe heißt das über den *Kurvenabschnitt* M_1M_2 sich erstreckende Integral, das man folgendermaßen schreibt:

$$R = \int_{M_1}^{M_2} F \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v})\, \mathrm{d}s.$$

Auf welche Art die Errechnung eines solchen Integrals erfolgen kann, werden wir im weiteren an einzelnen Beispielen zeigen.

§ 12. Die Arbeit der Resultierenden

Wir wollen nun zeigen, daß die *Arbeit der Resultierenden mehrerer Kräfte gleich der Summe der Arbeiten der Kraftkomponenten* ist.

Wir stellen uns mehrere Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ vor, die am Punkte M angreifen (Abb. 18). Ihre Resultierende bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}$. Wir nehmen an, daß der Punkt M sich aus der Lage M_1 in die Lage M_2 verschiebt und projizieren die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ und auch ihre Resultierende $\mathfrak{F}$ auf die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M. Da die Resultierende $\mathfrak{F}$ gleich der Summe der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ ist und die Projektion der Summe gleich der Summe der Projektionen der Komponenten ist, gilt

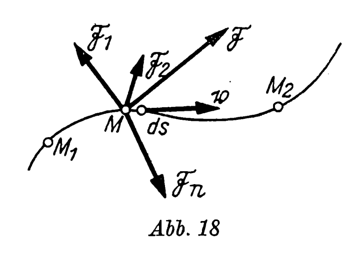


Abb. 18

$$F \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v}) = F_1 \cos(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{v}) + F_2 \cos(\mathfrak{F}_2, \mathfrak{v}) + \cdots + F_n \cos(\mathfrak{F}_n, \mathfrak{v}).$$

Wir multiplizieren beide Teile dieser Gleichung mit der elementaren Verschiebung ds:

$$F\, \mathrm{d}s \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v}) = F_1\, \mathrm{d}s \cos(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{v}) + F_2\, \mathrm{d}s \cos(\mathfrak{F}_2, \mathfrak{v}) + \cdots + F_n\, \mathrm{d}s \cos(\mathfrak{F}_n, \mathfrak{v})$$

oder

$$\mathrm{d}R = \mathrm{d}R_1 + \mathrm{d}R_2 + \cdots + \mathrm{d}R_n,$$

wobei dR_1, d$R_2, \ldots,$ dR_n die elementaren Arbeiten der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auf der elementaren Verschiebung ds sind und dR die elementare Arbeit der Resultierenden $\mathfrak{F}$ auf derselben Verschiebung ist.

Wir stellen uns vor, daß ähnliche Gleichungen wie die vorhergehende für alle elementaren Verschiebungen aufgestellt sind, in die man sich den Abschnitt M_1M_2 unterteilt vorstellen kann. Wenn wir alle diese Gleichungen gliedweise summieren, erhalten wir:

$$\sum \mathrm{d}R = \sum \mathrm{d}R_1 + \sum \mathrm{d}R_2 + \cdots + \sum \mathrm{d}R_n$$

oder

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n,$$

wobei $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sowie R die Arbeiten der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ und deren Resultierenden $\mathfrak{F}$ auf dem Bogen M_1M_2 sind.

Somit ist das Theorem bewiesen.

§ 13. Die Darstellung der Arbeit durch Projektion der Kraft auf die Koordinatenachsen

Die Kraft $\mathfrak{F}$ und die elementare Verschiebung ds ihres Angriffspunktes M sind gegeben (Abb. 19). Wir wählen die Koordinatenachsen x, y, z und zerlegen die Kraft $\mathfrak{F}$ in ihre Komponenten auf den Achsen x, y, z; die algebraischen Größen dieser Komponenten sind gleich den Projektionen X, Y, Z der Kraft $\mathfrak{F}$ auf die Achsen x, y, z. Bezeichnen wir die elementare Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ bei der Verschiebung ds mit dR und die elementaren Arbeiten ihrer Komponenten X, Y, Z bei der gleichen Verschiebung mit dR_1, dR_2, dR_3, so erhalten wir nach dem Theorem, das im vorhergehenden Paragraphen bewiesen wurde:

$$\mathrm{d}R = \mathrm{d}R_1 + \mathrm{d}R_2 + \mathrm{d}R_3.$$

Ferner finden wir, wenn wir im Auge behalten, daß die Größen der Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}$ auf den Achsen x, y, z gleich ihren Projektionen X, Y, Z sind und die Richtungen dieser Komponenten parallel zu den Achsen x, y und z verlaufen:

$$\mathrm{d}R_1 = X\,\mathrm{d}s\cos(\mathfrak{v},\mathfrak{x}), \qquad \mathrm{d}R_2 = Y\,\mathrm{d}s\cos(\mathfrak{v},\mathfrak{y}),$$

$$\mathrm{d}R_3 = Z\,\mathrm{d}s\cos(\mathfrak{v},\mathfrak{z})$$

und folglich

$$\mathrm{d}R = X\,\mathrm{d}s\cos(\mathfrak{v},\mathfrak{x}) + Y\,\mathrm{d}s\cos(\mathfrak{v},\mathfrak{y}) + Z\,\mathrm{d}s\cos(\mathfrak{v},\mathfrak{z}).$$

Abb. 19

Wir bezeichnen die Koordinaten des Punktes M mit x, y und z, die Zuwüchse aber, die die Koordinaten x, y, z erhalten, wenn der Punkt M die Verschiebung ds erfährt, mit dx, dy, dz. Es liegt auf der Hand, daß die Zuwüchse dx, dy, dz gleich den Projektionen der Verschiebung ds auf die Achsen x, y, z sind. Folglich gilt

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}s\cos(\mathfrak{v},\mathfrak{x}), \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{d}s\cos(\mathfrak{v},\mathfrak{y}), \qquad \mathrm{d}z = \mathrm{d}s\cos(\mathfrak{v},\mathfrak{z}).$$

Daraus schließen wir, daß die vorherige Gleichung für die elementare Arbeit dR auf die Form

$$\mathrm{d}R = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z$$

zurückgeführt wird.

So wird die elementare Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ durch die Projektionen der Kraft auf die Koordinatenachsen und die Zuwüchse der Koordinaten des Angriffspunktes ausgedrückt.

§ 14. Die Darstellung der Arbeit als Fläche. Die Indikatorarbeit der Dampfmaschine

Wir nehmen an, daß am Punkte M, der sich auf irgendeiner Bewegungsbahn verschiebt, die Kraft $\mathfrak{F}$ angreift (Abb. 20). Wir werden die Lage des Punktes M auf seiner Bewegungsbahn durch die Größe des durchlaufenen Weges s bezeichnen, der

von irgendeinem Anfangspunkt O aus gemessen wird (so daß $\widehat{OM} = s$ ist). Wir wollen nun die Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ bei irgendeiner Verschiebung M_1M_2 des Punktes M ausdrücken.

Wie in § 11 erklärt wurde, ist diese Arbeit gleich der Summe $R = \Sigma\, \mathrm{d}R$, wobei $\mathrm{d}R$ die Arbeit bei der elementaren Verschiebung $\mathrm{d}s$ ist:

$$\mathrm{d}\,R = F\,\mathrm{d}\,s \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v}).$$

Wir bemerken, daß $F \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v})$ die Projektion der Kraft $\mathfrak{F}$ auf die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist, oder, was dasselbe ist, die Größe der tangentialen Komponente $\mathfrak{F}_t$ der Kraft $\mathfrak{F}$, so daß die Gleichung für die elementare Arbeit in der Form

$$\mathrm{d}\,R = F_t\,\mathrm{d}\,s$$

dargestellt werden kann.

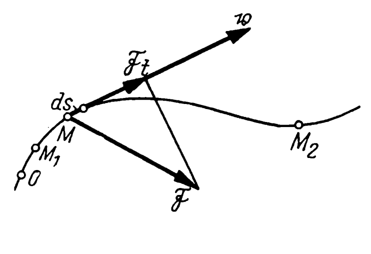


Abb. 20

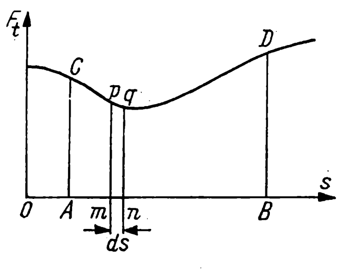


Abb. 21

Wir stellen jetzt die Abhängigkeit der algebraischen Größe der tangentialen Kraft F_t von dem durchlaufenen Wege s graphisch dar, wobei wir auf der Abszissenachse die Werte des durchlaufenen Weges s auftragen und auf der Ordinatenachse die entsprechenden Werte der tangentialen Kraft F_t; wir erhalten damit eine Kurve, die die Abhängigkeit F_t von s darstellt (Abb. 21). In dieser Darstellung erscheint die elementare Arbeit $\mathrm{d}R = F_t\,\mathrm{d}s$ als Fläche des elementaren Rechtecks $mpqn$, dessen Grundseite $mn = \mathrm{d}s$ ist.

Wir nehmen an, daß den Lagen M_1 und M_2 des Punktes M auf seiner Bewegungsbahn die Werte s_1 und s_2 des durchlaufenen Weges entsprechen. Wir tragen die Ordinaten AC und BD ein, die den tangentialen Kräften in den Punkten A und B (mit den Abszissen s_1 und s_2) entsprechen. Es ist klar, daß die Arbeit $R = \Sigma\, \mathrm{d}R$ der Kraft F bei der Verschiebung M_1M_2 durch die Fläche der Figur $ACDB$ dargestellt wird, die durch die Abszissenachse, die Kurve CD und die Ordinaten AC und BD begrenzt ist.

Natürlich ist, wenn die Größe der tangentialen Kraft F_t negativ ist, auch die Arbeit R negativ. In diesem Falle muß die entsprechende Fläche mit einem Minuszeichen versehen werden.

Die Darstellung der Arbeit in Form einer Fläche erscheint in vielen Fällen als bequemes Verfahren für das Auffinden der Arbeit einer Kraft. In einigen Fällen

bleibt die analytische Abhängigkeit der tangentialen Kraft F_t von dem durchlaufenen Wege s unbekannt, graphisch kann jedoch diese Abhängigkeit punktweise ermittelt werden. In solchen Fällen ist eine analytische Errechnung der Arbeit der Kraft nicht möglich; die Bestimmung der Fläche jedoch, von welcher die Rede ist, kann immer mit einem genügenden Genauigkeitsgrad ausgeführt werden (mit Hilfe eines Planimeters oder auf andere Weise).

Als Beispiel wollen wir uns mit der Bestimmung der Arbeit des Dampfdruckes im Zylinder einer Dampfmaschine befassen. Wir wollen uns eine einfach wirkende Maschine vorstellen, d. h. eine Maschine, in der der Dampf nur von einer Seite in den Zylinder eintritt, z. B. links vom Kolben. Bei der Bewegung des Kolbens von links nach rechts verläuft der Dampfdruck auf den Kolben in Richtung der Bewegung des Kolbens und führt folglich eine positive Arbeit aus; bei einer rückläufigen Bewegung des Kolbens von rechts nach links führt der Kolben durch Verdichten des Restdampfes eine negative Arbeit aus. Die volle Arbeit des Dampfdruckes in zwei Hüben des Kolbens (hin und zurück) ist gleich der Differenz der erwähnten beiden Arbeiten.

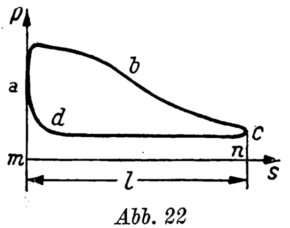


Abb. 22

Wir wollen uns vorstellen, daß wir eine Kurve konstruiert haben, die die Größe des Dampfdruckes im Zylinder für jede Lage des Kolbens darstellt. Wir werden die Lage des Kolbens durch den Wert des durchlaufenen Weges s bestimmen, der von seiner äußersten linken Lage aus gemessen ist. Auf der horizontalen Achse werden wir die s-Werte abtragen und auf der vertikalen die jedem s entsprechenden Werte des Dampfdruckes p; wir erhalten eine Kurve, die der in Abb. 22 dargestellten entspricht. In dieser Abbildung bezeichnet l die Länge des Kolbenhubes; der Teil *abc* der Kurve gibt die Werte des Dampfdruckes p in Abhängigkeit von s bei einer Bewegung des Kolbens von links nach rechts an. Bei einer rückläufigen Bewegung des Kolbens von rechts nach links wird der Druck des komprimierten Dampfes durch den Teil *cda* der Kurve dargestellt.

Hieraus folgt, daß die positive Arbeit des Dampfdruckes bei einer Bewegung des Kolbens von links nach rechts durch die Fläche *abcnma* dargestellt wird[1]; die mit dem Minuszeichen versehene Fläche *adcnma* ergibt die negative Arbeit des Dampfdruckes bei einem rückläufigen Kolbenhub. Es ist klar, daß die volle Arbeit des Dampfdruckes während zweier Kolbenhübe durch die Fläche dargestellt wird, die durch die geschlossene Kurve *abcda* begrenzt ist.

Die in Abb. 22 dargestellte Fläche kann automatisch mit Hilfe eines Apparates, der *Indikator* genannt wird, gewonnen werden. Diese Darstellung heißt das *Indikator-Diagramm*, und die Arbeit des Dampfdruckes in der Maschine, die, wie soeben erklärt, bestimmt wurde, heißt die *Indikator-Arbeit* der Dampfmaschine.

Natürlich ist im Falle einer doppeltwirkenden Maschine, in der der Dampf in den Zylinder abwechselnd von beiden Seiten des Kolbens eingelassen wird, die volle Arbeit des Dampfdruckes gleich der Summe der Arbeiten, die durch den Dampfdruck, der auf jede Seite des Kolbens wirkt, ausgeführt wird.

[1] Anm. d. deutschen Redaktion: Der Flächeninhalt muß mit dem wirksamen Kolbenquerschnitt multipliziert werden.

§ 15. Die Arbeit einer elastischen Kraft

Wir wollen nun an einigen Beispielen die Bestimmung der Arbeit auf analytischem Wege aufzeigen. In diesem Paragraphen werden wir uns mit der Errechnung der Arbeit der elastischen Kraft beschäftigen.

Wir stellen uns eine Schraubenfeder AB vor, deren eines Ende an dem festen Punkt A befestigt ist (Abb. 23). Die Feder AB befindet sich in ihrem natürlichen (ungedehnten und nicht zusammengedrückten) Zustand. Wir nehmen das untere Ende der Feder in die Hand und dehnen sie. Die Hand wird von seiten der Feder eine Reaktion verspüren, die nach oben gerichtet ist (zum Punkt B hin); diese Reaktion nennt man die elastische Reaktion oder die elastische Kraft der Feder. Nehmen wir an, daß die Feder um die Größe $BC = h$ gedehnt ist. Es soll die Arbeit der elastischen Kraft auf dem Wege h ihres Angriffspunktes errechnet werden.

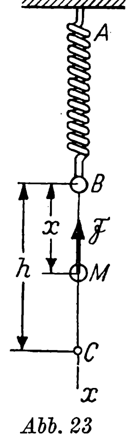


Abb. 23

Wir bezeichnen die elastische Kraft der Feder mit $\mathfrak{F}$. Wir nehmen an, daß in einem gewissen Augenblick während der Streckung der Feder der Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{F}$ (die Hand) sich in M befindet. Die Größe F der elastischen Kraft ist eine variable Größe; sie ist proportional der Verlängerung BM der Feder, so daß

$$F = c \cdot BM$$

ist, wobei c die Federkonstante ist[1].

Da die Kraft $\mathfrak{F}$ variabel ist, stellen wir zuerst für die Errechnung der Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ die elementare Arbeit dieser Kraft auf und führen darauf die Summation der elementaren Arbeiten durch. Um die elementare Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ zu finden, benutzen wir die Gleichung

$$\mathrm{d}R = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z,$$

die in § 13 aufgestellt wurde.

Wir wählen als x-Achse die geradlinige Bewegungsbahn des Punktes M, wobei wir die x-Achse vertikal nach unten richten. Den Koordinatenursprung legen wir in den Punkt B, so daß $BM = x$ ist. Die Achsen y und z benötigen wir nicht; es ist klar, daß $\mathrm{d}y = 0$ und $\mathrm{d}z = 0$ ist.

Da

$$X = -F, \qquad \text{ist } \mathrm{d}R = -F\,\mathrm{d}x.$$

Es ist aber

$$F = c \cdot BM = cx.$$

Folglich ist

$$\mathrm{d}R = -c\,x\,\mathrm{d}x.$$

---

[1] Für eine aus Draht von kreisförmigem Querschnitt angefertigte Feder hat der Koeffizient c die Bedeutung

$$c = \frac{Gr^4}{4\,nR^3},$$

wobei G der Schubmodul, n die Zahl der Federwindungen, r der Radius des kreisförmigen Querschnittes des Drahtes und R der Radius des kreisförmigen Zylinders ist, auf dem die Achse des Drahtes liegt.

Um die Arbeit R der Kraft $\mathfrak{F}$ auf dem Wege h zu bestimmen, summieren wir die gewonnenen elementaren Arbeiten:

$$R = \sum(-c x \,\mathrm{d} x) = -\sum c x \,\mathrm{d} x .$$

$\sum cx \,\mathrm{d}x$ ist nichts anderes als das bestimmte Integral über $cx \,\mathrm{d}x$, das in den Grenzen von $x = 0$ bis $x = h$ genommen ist.

Also:

$$R = -\int_0^h c x \,\mathrm{d} x \doteq -\frac{c h^2}{2}. \tag{1}$$

Dieses Resultat kann noch anders dargestellt werden. Die Größe ch ist der Wert der elastischen Kraft F, die der Verlängerung $BC = h$ der Feder entspricht. Bezeichnen wir diese Größe mit F_1, so gilt:

$$R = -\frac{1}{2} F_1 h .$$

Wir schlagen dem Leser vor, diese Gleichung nachzuprüfen, indem er die Arbeit R graphisch auf die Art, wie im § 14 erläutert wurde, bestimmt.

Wir bemerken, daß die Arbeit der elastischen Kraft nicht nur in dem Spezialfall durch die Gl. (1) ausgedrückt wird, der hier untersucht wurde. Diese Gleichung bezieht sich in gleichem Maße auf alle Fälle der elastischen Deformation, in denen die elastische Reaktion den Ausdruck

$$F = c x$$

hat, wobei x die Verschiebung des Angriffspunktes der Reaktion ist, die von der Lage dieses Punktes im nichtdeformierten Zustand des Körpers aus gemessen wird, und c die Federkonstante ist. Hierzu gehören die Dehnung und die Zusammendrückung eines geraden Balkens, die Biegung des Balkens usw. In allen diesen Fällen wird die Arbeit der elastischen Reaktion auf dem Wege h ihres Angriffspunktes durch die Gl. (1) ausgedrückt.

§ 16. Die Arbeit der Schwerkraft

Auf den materiellen Punkt M wirkt die Schwerkraft $\mathfrak{P}$ (Abb. 24). Die Arbeit der Kraft $\mathfrak{P}$ bei der Verschiebung des Punktes M aus der Lage M_1 in die Lage M_2 soll errechnet werden.

Wir wählen das kartesische Koordinatensystem x, y, z und lassen die z-Achse vertikal nach unten und die Achsen x und y horizontal verlaufen. Die Koordinaten der Punkte M_1 und M_2 bezeichnen wir mit x_1, y_1, z_1 bzw. x_2, y_2, z_2.

Um die elementare Arbeit der Kraft $\mathfrak{P}$ zu berechnen, wenden wir die Gleichung

$$\mathrm{d} R = X \,\mathrm{d} x + Y \,\mathrm{d} y + Z \,\mathrm{d} z$$

an.

Im gegebenen Falle gilt:

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = P,$$

folglich ist

$$\mathrm{d}R = P\,\mathrm{d}z.$$

Führen wir die Summation der elementaren Arbeiten durch, so finden wir die gesuchte Arbeit

$$R = \int_{z_1}^{z_2} P\,\mathrm{d}z = P(z_2 - z_1).$$

Wir wollen den absoluten Betrag der Differenz $z_2 - z_1$ mit h bezeichnen. Das ist die Größe der Verschiebung des Punktes M längs der Vertikalen. Wenn wir in der gewonnenen Gleichung $z_2 - z_1 = \pm h$ einsetzen, wobei das Pluszeichen dem Fall $z_2 > z_1$ entspricht (der Punkt M_2 liegt tiefer als der Punkt M_1) und das Minuszeichen dem Falle $z_2 < z_1$ (der Punkt M_2 liegt höher als der Punkt M_1), erhalten wir:

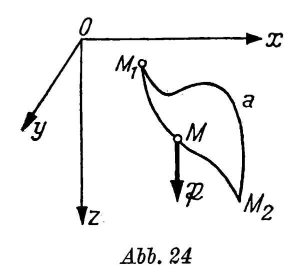


Abb. 24

$$R = \pm P h.$$

Die Arbeit der Schwerkraft ist also gleich dem mit einem positiven oder negativen Vorzeichen versehenen Produkt der Schwerkraft, multipliziert mit der Größe des Weges ihres Angriffspunktes auf der Vertikalen. Die positive Arbeit der Schwerkraft ergibt sich beim Herablassen ihres Angriffspunktes; bei Hebung des Angriffspunktes ist die Arbeit der Schwerkraft negativ.

Das gewonnene Resultat führt uns unter anderem zu der nachstehenden Schlußfolgerung: *Die Arbeit der Schwerkraft hängt nicht von der Bahnkurve ab, längs der ihr Angriffspunkt sich verschiebt; sie hängt nur von den äußersten Lagen ab, zwischen denen die Bewegung des Punktes erfolgt.* Die Kraft $\mathfrak{P}$ führt die gleiche Arbeit aus, ob der Punkt M sich längs der Kurve M_1MM_2 oder längs der Kurve M_1aM_2 bewegt (Abb. 24).

§ 17. Die Arbeit der Zentralkraft

Zentralkraft heißt die Anziehungskraft nach irgendeinem Punkte (der das Zentrum der Kraft genannt wird) oder die Abstoßungskraft von einem Punkte.

Stellen wir uns vor, daß auf den materiellen Punkt M die Abstoßungskraft $\mathfrak{F}$ von irgendeinem *unbeweglichen* (festen) Punkt O einwirkt (Abb. 25), und nehmen wir an, daß die Größe der Kraft $\mathfrak{F}$ nur von der Entfernung des Punktes M bis zum Zentrum der Kraft O abhängt, d. h., daß die Größe F eine Funktion des Abstandes $OM = r$ ist:

$$F = \varphi(r).$$

Als Beispiele einer zentralen Kraft, die nur von der Entfernung des Angriffspunktes vom Zentrum der Kraft abhängt, können die Schwerkraft, die elektrostatischen Kräfte, die Magnetkräfte usw. dienen.

Es soll die Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ auf irgendeinem Wege M_1M_2, den der Punkt M durchläuft, errechnet werden.

Wir schreiben die elementare Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ nach der Gleichung

$$dR = F\,ds\cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v});$$

$ds \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v})$ ist die Projektion der elementaren Verschiebung ds in Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$ oder, was dasselbe ist, in Richtung des Radiusvektors $OM = r$. Diese Projektion ist gleich dem Zuwachs dr, den der Radiusvektor r erhält, wenn der Punkt M die elementare Strecke ds durchläuft.

Daher ist

$$ds\cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v}) = dr,$$

und wir erhalten

$$dR = F\,dr = \varphi(r)\,dr.$$

Abb. 25

Summieren wir die elementaren Arbeiten und führen die Bezeichnungen

$$OM_1 = r_1, \qquad OM_2 = r_2$$

ein, so finden wir

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \varphi(r)\,dr.$$

Wäre die Kraft $\mathfrak{F}$ eine Anziehungskraft d. h., wäre sie vom Punkte M nach dem Punkt O gerichtet, so würde $ds \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v}) = -\,dr$ sein, und wir erhielten entsprechend für die Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$:

$$R = -\int_{r_1}^{r_2} \varphi(r)\,dr.$$

Wenn wir die beiden gewonnenen Resultate verbinden, sehen wir, daß die Arbeit der Zentralkraft $F = \varphi(r)$ durch die Gleichung

$$R = \pm\int_{r_1}^{r_2} \varphi(r)\,dr$$

ausgedrückt wird, wobei das positive Vorzeichen der Abstoßungskraft und das negative Vorzeichen der Anziehungskraft entspricht.

Der Wert des im rechten Teil dieser Gleichung stehenden Integrals hängt nicht davon ab, längs welcher Kurve der Punkt M sich aus der Lage M_1 in die Lage M_2 verschiebt. Folglich begegnen wir auch hier derselben Eigenschaft der Arbeit, die wir bereits am Beispiel der Arbeit der Schwerkraft festgestellt haben: *Die Arbeit der Zentralkraft $F = \varphi(r)$ hängt nicht von der Bahnkurve ab, längs der sich ihr Angriffspunkt verschiebt;* sie hängt nur von den äußersten Lagen ab, zwischen denen die Bewegung des Punktes erfolgt.

Als Beispiel wollen wir die Arbeit der Gravitationskraft $\mathfrak{F}$, die am Zentrum der Erde M angreift und nach dem Zentrum der Sonne S gerichtet ist (Abb. 26), bei irgendeiner Verschiebung M_1M_2 ihres Angriffspunktes bestimmen.

Wir bezeichnen:

$$SM = r, \qquad SM_1 = r_1, \qquad SM_2 = r_2.$$

Es gilt:

$$F = k\frac{M\,m}{r^2},$$

wobei M die Masse der Sonne, m die Masse der Erde und k die Gravitationskonstante ist, deren Zahlenwert von den gewählten Einheiten der Länge, der Masse und der Kraft abhängt[1]. Die gesuchte Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ ist gleich

$$R = -\int_{r_1}^{r_2} k\frac{M\,m}{r^2}\,\mathrm{d}r = k\,M\,m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

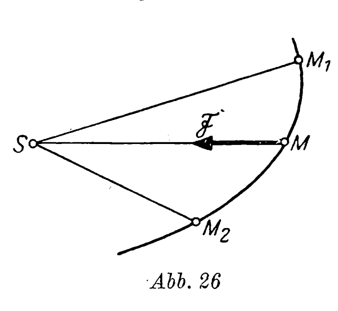


Abb. 26

§ 18. Die Einheiten der Arbeit. Die Leistung

Wir wollen einiges über die Einheiten sagen, mit welchen die Arbeit einer Kraft gemessen wird. Wir stellen uns eine konstante (der Größe und der Richtung nach) Kraft vor, die gleich der Krafteinheit ist, und setzen voraus, daß der Angriffspunkt dieser Kraft sich geradlinig in Richtung der Kraft um eine Größe verschiebt, die gleich der Längeneinheit ist. Die Arbeit der Kraft ist im gegebenen Falle gleich $R = 1\cdot 1 = 1$. Hieraus folgt, daß wir als Arbeitseinheit die Arbeit der Kraft annehmen müssen, die gleich der Krafteinheit bei der Verschiebung ihres Angriffspunktes um die Längeneinheit (in der Richtung der Kraft) ist.

In § 3 wurden zwei Maßsysteme erwähnt: das physikalische und das technische. Jedem dieser Systeme entspricht eine eigene Krafteinheit und folglich auch eine eigene Arbeitseinheit.

a) *Das physikalische Maßsystem.* Die Grundeinheiten sind Zentimeter, Sekunde und Gramm (Masse). Die Krafteinheit ist das dyn. Die Arbeitseinheit ist die Arbeit der Kraft von 1 dyn bei der Verschiebung um 1 Zentimeter (in Richtung der Kraft); diese Arbeit heißt *erg*. In Anbetracht der Kleinheit dieser Arbeit nimmt man häufig als Arbeitseinheit eine Größe an, die das Vielfache eines erg ist, und zwar 10^7 erg; diese Arbeitseinheit heißt *Joule*.

---

[1] Im technischen Maßsystem (Meter, Sekunde, Kraft-Kilogramm) hat die Konstante k den Wert $k = 6{,}55 \cdot 10^{-10}$. Das bedeutet, daß sich zwei Körper von je 1 kg Gewicht (die Masse eines jeden von ihnen ist gleich $\frac{1}{9{,}81}$ kg s²/m), die sich im Abstand von 1 m befinden, gegenseitig mit der Kraft F anziehen, die gleich

$$F = 6{,}55 \cdot 10^{-10}\left(\frac{1}{9{,}81}\right)^2 = 6{,}81 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{kg}$$

ist. Zwei Schiffe von je 20000 t, die sich in einer Entfernung von 100 m voneinander befinden, ziehen sich mit der Kraft 0,27 kg gegenseitig an.

Wenn wir als Grundeinheiten Meter, Sekunde und Kilogramm (Masse) annehmen, ist die Krafteinheit ein Newton, und die Arbeitseinheit ist die Arbeit, die die Kraft 1 Newton bei der Verrückung um 1 m (in Richtung der Kraft) leistet. Da 1 m $= 10^2$ cm ist und 1 Newton $= 10^5$ dyn, ist diese Arbeitseinheit gleich 10^7 erg $= 1$ Joule.

b) *Das technische Maßsystem.* Als Grundeinheiten nehmen wir Meter, Sekunde und Kilogramm (Kraft) an. Die Arbeitseinheit ist die Arbeit, die die Kraft 1 kg bei der Verrückung um 1 m (in Richtung der Kraft) leistet; diese Arbeitseinheit heißt *Meterkilogramm.*

Es gilt:

1 Meterkilogramm $= 10^3$ Metergramm $= 10^5$ Zentimetergramm.

Nun ist aber

1 Gramm $= 981$ dyn.

Folglich ist

1 Meterkilogramm $= 981 \cdot 10^5$ erg $= 9{,}81$ Joule.

In der Maschine leistet eine Antriebskraft Arbeit während irgendeines Zeitraumes Um die Maschine abzuschätzen, ist es wichtig, die Arbeit, welche die Antriebskraft der Maschine während einer Zeiteinheit ausführt, zu kennen. Diese Arbeit pro Zeiteinheit heißt *Leistung* (oder *Arbeitsfähigkeit*) der Maschine.

Im physikalischen Maßsystem wird als Leistungseinheit die Leistung der Maschine angenommen, deren Antriebskraft in jeder Sekunde die Arbeit 1 Joule ausführt; diese Leistungseinheit heißt *Watt.* Im technischen Maßsystem müssen wir als Leistungseinheit die Leistung der Maschine annehmen, deren Antriebskraft in jeder Sekunde die Arbeit 1 Meterkilogramm ausführt. Diese Leistungseinheit kann man mit mkg/s bezeichnen. Die Leistungseinheit 75 mkg/s heißt eine *Pferdestärke.*

Wir wollen berechnen, wieviel Watt eine Pferdestärke enthält: 1 PS $= 75$ mkg/s $= 75 \cdot 9{,}81$ J/s $= 736$ W $= 0{,}736$ kW.

In der Praxis wird im physikalischen Maßsystem häufig als Arbeitseinheit die Kilowattstunde angenommen, d. h. die Arbeit, die von der Antriebskraft der Maschine, deren Leistung gleich 1 Kilowatt ist, im Laufe einer Stunde geleistet wird. Es ist klar, daß 1 Kilowattstunde $= 1000 \cdot 3600$ Wattsekunden $= 36 \cdot 10^5$ Joule ist.

§ 19. Das skalare Produkt zweier Vektoren

Im Lehrbuch der Statik haben wir gesehen, daß die Verallgemeinerung des Begriffes „Kraftmoment“ einer der Grundbegriffe der Vektoralgebra ist: das Vektorprodukt zweier Vektoren. Genauso ist ein anderer Grundbegriff der Vektorrechnung mit dem Begriff der Arbeit einer Kraft aufs engste verbunden: das skalare Produkt zweier Vektoren.

Das *skalare Produkt* der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ heißt die Skalargröße $ab \cdot \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Zur Bezeichnung des skalaren Produktes werden wir uns des Symbols $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ bedienen; folglich ist

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a\, b \cdot \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Wenn wir daran denken, daß die Arbeit R einer konstanten Kraft $\mathfrak{F}$ bei der geradlinigen Verschiebung $\mathfrak{s}$ ihres Angriffspunktes durch die Gleichung

$$R = Fs \cdot \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{s})$$

ausgedrückt wird, und das soeben eingeführte Symbol des skalaren Produktes benutzen, dann können wir folgern, daß

$$R = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s}$$

ist, d. h., daß *die Arbeit der konstanten Kraft auf der geradlinigen Bahn gleich dem skalaren Produkt aus der Kraft und der Verschiebung ist.*

Im Fall einer variablen Kraft und einer krummlinigen Bahn ihres Angriffspunktes hatten wir für die elementare Arbeit den Ausdruck

$$\mathrm{d}\, R = F\, \mathrm{d}\, s \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v})$$

ermittelt.

Wir bezeichnen den Radiusvektor, der durch den Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{F}$ von einem beliebigen festen Punkt aus gezogen ist, mit $\mathfrak{r}$ und den unendlich kleinen Zuwachs, den dieser Radiusvektor erhält, wenn der Angriffspunkt der Kraft die Bahn $\mathrm{d}s$ durchläuft, mit $\mathrm{d}\mathfrak{r}$. Wenn wir die kleinen Größen höherer Ordnung vernachlässigen, können wir annehmen, daß der absolute Betrag des Vektors $\mathrm{d}\mathfrak{r}$ gleich $\mathrm{d}s$ ist und daß die Richtung des Vektors $\mathrm{d}\mathfrak{r}$ mit der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ zusammenfällt. Hieraus folgt, daß das Produkt $F \cdot \mathrm{d}s \cdot \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v})$ gleich dem skalaren Produkt der Vektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathrm{d}\mathfrak{r}$ ist. Folglich erhalten wir für die elementare Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ den Ausdruck

$$\mathrm{d} R = \mathfrak{F} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{r}.$$

Die endliche Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ auf irgendeiner endlichen Bahn $M_1 M_2$ kann durch das Integral

$$R = \int_{M_1}^{M_2} \mathfrak{F} \cdot \mathrm{d}\mathfrak{r}$$

ausgedrückt werden.

Wir wollen uns nun mit einigen Eigenschaften des skalaren Produktes befassen.

Zuvor bemerken wir, daß gemäß der Definition das skalare Produkt zweier Vektoren sich nicht durch die Umstellung der Faktoren verändert, d. h., daß

$$\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$$

ist (Kommutatives Gesetz).

Wir wählen zwei Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ und bezeichnen ihre Summe mit $\mathfrak{a}$, d. h., wir setzen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2.$$

Wir projizieren die Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ sowie ihre Summe $\mathfrak{a}$ auf die Richtung eines beliebigen Vektors $\mathfrak{b}$ und erhalten

$$a \cdot \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = a_1 \cdot \cos(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}) + a_2 \cdot \cos(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}).$$

Multiplizieren wir beide Teile dieser Gleichung mit der Größe des Vektors $\mathfrak{b}$, so erhalten wir

$$a \cdot b \cdot \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = a_1 \cdot b \cdot \cos(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}) + a_2 \cdot b \cdot \cos(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b})$$

oder

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{b}.$$

Setzen wir hier $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$, so bekommen wir die Gleichung

$$(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}$$

(Distributives Gesetz).

Wir wollen nun das skalare Produkt der beiden Vektorensummen

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} + \mathfrak{d})$$

betrachten.

Aus der soeben vermerkten Gleichung erhalten wir

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) + \mathfrak{b} \cdot (\mathfrak{c} + \mathfrak{d}).$$

Ferner gilt

$$\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) = (\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{a} + \mathfrak{d} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{d}.$$

Ebenso ist

$$\mathfrak{b} \cdot (\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d}.$$

Somit erhalten wir:

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{d} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d}.$$

Um das skalare Produkt zweier Vektorsummen zu errechnen, muß man also jeden Summanden des Multiplikanden mit jedem Summanden des Multiplikators skalar multiplizieren und die erhaltenen Resultate addieren.

Wir werden jetzt zeigen, daß *die gewöhnliche Regel der Differentiation des Produktes sich gleichfalls auf das skalare Produkt zweier variabler Vektoren erstreckt.*

Es sind zwei variable Vektoren $\mathfrak{a}\ (t)$ und $\mathfrak{b}\ (t)$ gegeben, welche von der Zeit t abhängen. Wir wollen die Ableitung des skalaren Produktes $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ nach der Zeit ausrechnen. Den Zuwachs, den die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in der Zeit Δt erhalten, bezeichnen wir mit $\Delta\mathfrak{a}$ und $\Delta\mathfrak{b}$. Wir erhalten nach Bestimmung der Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{(\mathfrak{a} + \Delta\,\mathfrak{a}) \cdot (\mathfrak{b} + \Delta\,\mathfrak{b}) - \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{\Delta\,t} \right].$$

Andererseits gilt nach dem soeben Bewiesenen

$$(\mathfrak{a} + \Delta\,\mathfrak{a}) \cdot (\mathfrak{b} + \Delta\,\mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \Delta\,\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \Delta\,\mathfrak{b} + \Delta\,\mathfrak{a} \cdot \Delta\,\mathfrak{b}.$$

Folglich ist

$$\frac{(\mathfrak{a} + \Delta\,\mathfrak{a}) \cdot (\mathfrak{b} + \Delta\,\mathfrak{b}) - \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{\Delta\,t} = \frac{\Delta\,\mathfrak{a}}{\Delta\,t} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \frac{\Delta\,\mathfrak{b}}{\Delta\,t} + \frac{\Delta\,\mathfrak{a} \cdot \Delta\,\mathfrak{b}}{\Delta\,t}.$$

Hieraus erhalten wir, wenn wir zur Grenze $\lim \Delta t \to 0$ übergehen und bemerken, daß das letzte Glied des rechten Teiles dieser Gleichung an der Grenze verschwindet:

$$\frac{\mathrm{d}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{a}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathfrak{b}}{\mathrm{d}t}.$$

Hier sind $\frac{d\mathfrak{a}}{dt}$ und $\frac{d\mathfrak{b}}{dt}$ die Ableitungen der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nach der Zeit t.

Wir drücken das skalare Produkt der beiden Vektoren durch ihre Komponenten auf den Koordinatenachsen aus. Es sei

$$\mathfrak{a} = a_x \mathfrak{i} + a_y \cdot \mathfrak{j} + a_z \cdot \mathfrak{k},$$

$$\mathfrak{b} = b_x \mathfrak{i} + b_y \cdot \mathfrak{j} + b_z \cdot \mathfrak{k}.$$

Wenn wir $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ skalar miteinander multiplizieren und die Klammern öffnen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} &= (a_x \mathfrak{i} + a_y \cdot \mathfrak{j} + a_z \cdot \mathfrak{k}) \cdot (b_x \mathfrak{i} + b_y \mathfrak{j} + b_z \mathfrak{k}) = \\ &= a_x b_x \mathfrak{i}\mathfrak{i} + a_x b_y \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j} + a_x b_z \mathfrak{i}\mathfrak{k} + a_y b_x \mathfrak{j}\mathfrak{i} + a_y b_y \cdot \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j} \\ &\quad + a_y b_z \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{k} + a_z b_x \mathfrak{k}\mathfrak{i} + a_z b_y \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{j} + a_z \cdot b_z \cdot \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k}.\end{aligned}$$

Aus der Definition des skalaren Produktes folgt jedoch:

$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k} = 1,$$

$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{k} = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{k} = 0.$$

Daher:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Mit dieser Gleichung ergibt sich unmittelbar der Ausdruck für die elementare Arbeit der Kraft in kartesischen Koordinaten, der im § 13 auf eine kompliziertere Art gewonnen wurde. Wenn wir die Kraft $\mathfrak{F}$ und den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ ihres Angriffspunktes in Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen zerlegen, erhalten wir:

$$\mathfrak{F} = X \mathfrak{i} + Y \mathfrak{j} + Z \mathfrak{k},$$

$$\mathfrak{r} = x \mathfrak{i} + y \mathfrak{j} + z \mathfrak{k},$$

$$d\mathfrak{r} = dx \mathfrak{i} + dy \mathfrak{j} + dz \mathfrak{k}.$$

Hieraus folgt:

$$dR = \mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r} = X dx + Y dy + Z dz.$$

§ 20. Die kinetische Energie

Die Größe $\frac{m v^2}{2}$ (wobei m die Masse des materiellen Punktes und v die Größe seiner Geschwindigkeit ist) heißt *kinetische Energie* des materiellen Punktes. Wir wollen das Gesetz erläutern, nach dem sich die kinetische Energie des sich bewegenden materiellen Punktes im Laufe der Zeit verändert.

Wir wollen uns den materiellen Punkt M vorstellen, der sich im Raum unter der Wirkung der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bewegt (Abb. 27). Wir wissen, daß sich die Bewegung des Punktes M der Grundgleichung der Dynamik unterwirft, die in folgender Form geschrieben werden kann:

$$m \mathfrak{w} = \mathfrak{F},$$

wobei $\mathfrak{w}$ die Beschleunigung des Punktes M und $\mathfrak{F}$ die Resultierende der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ ist.

Da die Vektoren $m\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{F}$ gleich sind, so müssen auch ihre Projektionen in beliebiger Richtung gleich sein. Wir projizieren beide Teile unserer Grundgleichung auf die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M (Abb. 27). Projizieren wir den Vektor $m\mathfrak{w}$, so erhalten wir

$$m w \cdot \cos(\mathfrak{w}, \mathfrak{v}) = m w_t,$$

wobei w_t die tangentiale Beschleunigung des Punktes M ist. Da aber $w_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ ist, gilt

$$m w \cdot \cos(\mathfrak{w}, \mathfrak{v}) = m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Die Projektion der Resultierenden $\mathfrak{F}$ ist aber gleich $F \cdot \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v})$.

Somit erhalten wir die Gleichung

$$m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F \cdot \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v}).$$

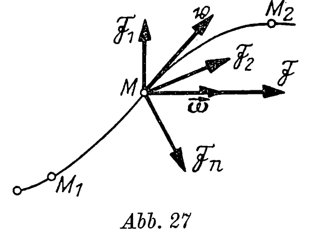


Abb. 27

Diese Gleichung kann die *Differentialgleichung der Bewegung des Punktes M in der Projektion auf die Richtung der Geschwindigkeit* genannt werden.

Wir wollen nun beide Seiten dieser Gleichung mit der Größe der Geschwindigkeit v multiplizieren. Wenn wir auf der rechten Seite für die Geschwindigkeit v die ihr gleiche Größe $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ einsetzen, wobei ds die unendlich kleine Strecke ist, die der Punkt M im Laufe des unendlich kleinen Zeitraumes dt durchläuft, erhalten wir:

$$m v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v}).$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit dt, so erhalten wir

$$m v \cdot \mathrm{d}v = F \cdot \mathrm{d}s \cdot \cos(\mathfrak{F}, \mathfrak{v}).$$

Es ist aber $mv \cdot \mathrm{d}v = \mathrm{d}\frac{mv^2}{2}$. Die Größe F ds cos $(\mathfrak{F}, \mathfrak{v})$ ist nichts anderes als die elementare Arbeit dR der Resultierenden $\mathfrak{F}$ bei der elementaren Verschiebung ds. Folglich ist

$$\mathrm{d}\frac{m v^2}{2} = \mathrm{d}R.$$

Dieses Resultat sagt uns, daß der unendlich kleine Zuwachs der kinetischen Energie in einem unendlich kleinen Zeitraum dt gleich der elementaren Arbeit der Resultierenden $\mathfrak{F}$ bei der entsprechenden unendlich kleinen Verschiebung des Punktes M ist.

Wir wählen nun zwei Zeiten t_1 und t_2. Nehmen wir an, daß zu diesen Zeiten der Punkt M auf seiner Bewegungsbahn die Lagen M_1 und M_2 einnimmt (Abb. 27), wo er die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 hat, und suchen wir den Zuwachs der kinetischen Energie $\frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2}$ im Zeitraum $t_2 - t_1$. Zu diesem Zweck unterteilen wir den Zeitraum $t_2 - t_1$ in eine Reihe elementarer (unendlich kleiner) Zeiträume $\mathrm{d}t$. Der gesuchte Zuwachs der kinetischen Energie für den ganzen Zeitraum $t_2 - t_1$ ist gleich der Summe der Zuwüchse, welche die kinetische Energie in jedem elementaren Zeitraum $\mathrm{d}t$ erhält. Diese elementaren Zuwüchse der kinetischen Energie sind, wie wir soeben sahen, gleich den elementaren Arbeiten der Resultierenden $\mathfrak{F}$ bei den entsprechenden elementaren Verschiebungen des Punktes M. Folglich ist

$$\frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{1} = \sum \mathrm{d}\,\frac{m v^2}{2} = \sum \mathrm{d}\,R = R,$$

wobei R die Summe der elementaren Arbeiten der Resultierenden ist, d. h. die volle Arbeit der Resultierenden bei der Verschiebung $M_1 M_2$ des Punktes M.

Bedenken wir außerdem, daß die Arbeit der Resultierenden gleich der Summe der Arbeiten der Komponenten ist, und bezeichnen wir die Arbeiten der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bei der Verschiebung $M_1 M_2$ mit $R_1, R_2, \ldots, R_n$, so erhalten wir endgültig

$$\frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n .$$

Also ist der Zuwachs der kinetischen Energie eines materiellen Punktes in einem bestimmten Zeitraum gleich der Summe der Arbeiten der an der entsprechenden Bahn des Punktes angreifenden Kräfte.

§ 21. Beispiele zur Anwendung des Satzes von der kinetischen Energie

Wir wollen das im vorhergehenden Paragraphen aufgestellte Theorem auf einige Beispiele anwenden. Wir bemerken dabei, daß die Anwendung des Satzes von der kinetischen Energie das bequemste Verfahren zur Lösung von Aufgaben der Dynamik des materiellen Punktes darstellt, und zwar in allen den Fällen, wo es sich um die Ermittlung der Abhängigkeit der Geschwindigkeit des Punktes von dem zurückgelegten Wege handelt. Diese Abhängigkeit wird am einfachsten über die kinetische Energie gefunden.

Beispiel 4. Der Körper M (der als materieller Punkt betrachtet wird) fällt aus der Höhe H ohne Anfangsgeschwindigkeit auf die Erde. Es soll die Geschwindigkeit des Punktes M im Augenblick des Aufpralles auf die Erde bestimmt werden.

Die Bewegung des Punktes M geht unter der Wirkung der Schwerkraft $\mathfrak{P}$ vor sich (den Luftwiderstand vernachlässigen wir). Wir bezeichnen die Anfangs- und Endlage des Punktes M mit M_1 und M_2 (Abb. 28) und wenden die Gesetzmäßigkeiten der kinetischen Energie bei der Verschiebung $M_1 M_2 = H$ unseres Punktes an. Die Geschwindigkeit

des Punktes M in der Lage M_1 ist gleich Null, seine Geschwindigkeit in der Lage M_2 ist die gesuchte Geschwindigkeit v, die Arbeit der Kraft $\mathfrak{P}$ bei der Verrückung H ist gleich $P \cdot H$. Folglich erhalten wir, indem wir das Gesetz von der kinetischen Energie anwenden,

$$\frac{m v^2}{2} = P \cdot H,$$

woraus

$$v^2 = 2 \frac{P}{m} H = 2 g H$$

oder

$$v = \sqrt{2 g H}$$

folgt.

Durch diese Formel ist die vom Körper beim Fallen aus der Höhe H gewonnene Geschwindigkeit bestimmt.

Abb. 28

Beispiel 5. Ein Eisenbahnzug bewegt sich auf einer horizontalen Strecke mit der Geschwindigkeit v_0. Nach welcher Entfernung kann der Zug halten, wenn beim Bremsen ein Bewegungswiderstand von $\frac{1}{10}$ des Gewichtes des Zuges wirkt?

Wir betrachten den Zug als materiellen Punkt M. Wir bezeichnen die Lagen des Punktes M, die dem Beginn des Bremsens und dem Augenblick des Haltens des Zuges ent-

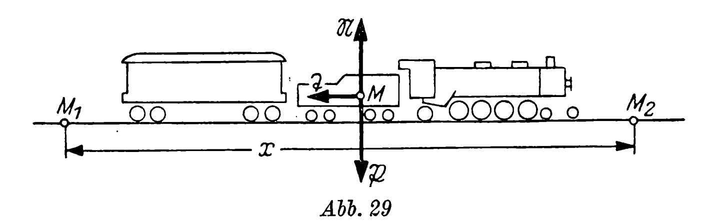


Abb. 29

sprechen, mit M_1 und M_2 (Abb. 29) und wenden das Gesetz der kinetischen Energie bei der Verrückung $M_1 M_2 = x$ unseres Punktes an. An dem Punkt M greifen an: das Gewicht $\mathfrak{P}$ des Zuges, die Reaktion $\mathfrak{N}$ der Schienen und der Widerstand $\mathfrak{T}$, wobei $T = \frac{1}{10} P$ ist. Die Arbeiten der ersten beiden Kräfte bei der Verschiebung $M_1 M_2$ sind gleich Null, die Arbeit des Widerstandes $\mathfrak{T}$ dagegen ist gleich $- Tx = - \frac{1}{10} Px$. Folglich erhalten wir nach dem Gesetz der kinetischen Energie

$$- \frac{m v_0^2}{2} = - \frac{1}{10} P x$$

(wobei m die Masse des Zuges ist) und daraus

$$x = 5 \frac{m}{P} \cdot v_0^2 = \frac{5 v_0^2}{g}.$$

Im § 8 wurde dieses Resultat auf einem anderen Wege gewonnen.

Beispiel 6. Auf den horizontalen Träger AB, der auf zwei Stützen liegt, fällt in seinem Mittelpunkt C aus der Höhe H eine Masse vom Gewicht P (Abb. 30). Es soll die maximale Durchbiegung des Trägers ermittelt werden, wenn man weiß, daß bei statischer Wirkung desselben Gewichtes die maximale Durchbiegung des Trägers gleich f ist.

Wir bezeichnen die Anfangs- und die Endlage der fallenden Masse mit M_1 und M_2, die gesuchte Durchbiegung des Trägers CM_2 bezeichnen wir mit h und wenden das Gesetz der kinetischen Energie bei der Verschiebung M_1M_2 unserer Masse an.

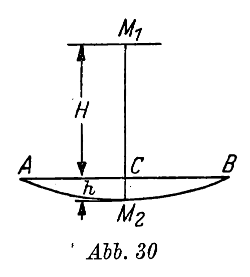


Abb. 30

Da die Geschwindigkeiten der Masse in der Anfangs- und Endstellung gleich Null sind, verschwindet auch der Zuwachs der kinetischen Energie der Masse bei der Verschiebung M_1M_2. Auf Grund des Gesetzes der kinetischen Energie folgern wir, daß die Summe der Arbeiten der an der Masse bei der Verschiebung M_1M_2 angreifenden Kräfte gleich Null sein muß.

Auf die Masse wirken die Schwerkraft (während der ganzen Zeit der Bewegung) und die elastische Reaktion des Trägers (bei der Bewegung auf dem Abschnitt CM_2) ein. Die Arbeit der Schwerkraft ist gleich $P(H+h)$.

Die elastische Reaktion des Trägers hat die Größe $F = cx$, wobei x die Durchbiegung des Trägers im gegebenen Augenblick und c der konstante Koeffizient ist, der die Elastizität des Trägers charakterisiert[1]. Die Arbeit der elastischen Reaktion bei der Verschiebung h (wie im § 15 gezeigt) ist gleich $-\frac{ch^2}{2}$.

Somit kommen wir zu der Gleichung

$$P(H+h) - \frac{ch^2}{2} = 0,$$

aus welcher die gesuchte Durchbiegung h gefunden werden kann.

Wir bemerken, daß der Koeffizient c durch das Gewicht P der Masse und der diesem Gewicht entsprechenden statischen Durchbiegung f ausgedrückt werden kann. Tatsächlich müssen die an der Masse angreifenden Kräfte sich gegenseitig aufheben, wenn die Masse auf dem Träger in ihrer Gleichgewichtslage liegt (nachdem sie den Träger um die Größe f durchgebogen hat). Setzen wir die Schwerkraft und die elastische Reaktion des Balkens (die in diesem Fall gleich cf sein muß) einander gleich, so erhalten wir:

$$P = cf, \quad \text{woraus} \quad c = \frac{P}{f}$$

folgt. Setzen wir diesen Wert c in die Gleichung ein, welche die Durchbiegung h bestimmt, so erhalten wir:

$$P(H+h) - \frac{Ph^2}{2f} = 0 \quad \text{oder} \quad h^2 - 2hf - 2fH = 0.$$

---

[1] Für einen auf zwei Stützen liegenden Träger hat der Koeffizient c die Bedeutung

$$c = \frac{48\,EJ}{l^3},$$

wobei E der Elastizitätsmodul, l die Länge des Trägers und J das Trägheitsmoment des Trägerquerschnittes ist. Wir vernachlässigen hier die Masse des Trägers im Vergleich zu der Masse der Last. Eine ausführlichere Darlegung der Frage des Stoßes auf einen Träger, die den Einfluß der Masse des Balkens berücksichtigt, kann man im Buch von S. P. Timoschenko, „Schwingungsprobleme der Technik", Deutsche Ausgabe, Berlin, 1932, finden.

Daraus folgt

$$h = f \pm \sqrt{f^2 + 2fH}.$$

Wenn wir in dieser Gleichung das Minuszeichen vor der Wurzel wählten, würden wir einen negativen Wert für h erhalten. Da die Größe h positiv sein muß, schließen wir, daß die gesuchte Durchbiegung des Trägers durch die Gleichung

$$h = f \pm \sqrt{f^2 + 2fH}$$

bestimmt wird.

Beispiel 7: Das mathematische Pendel. Wir stellen uns ein Pendel vor, das aus der kleinen Masse M besteht, die von uns als materieller Punkt betrachtet wird, und an dem undehnbaren und masselosen Faden von der Länge l an dem festen Punkt O aufgehängt ist. Ein solches Pendel heißt mathematisches Pendel. Wir nehmen an, daß das Pendel aus der vertikalen Gleichgewichtslage um den Winkel α abgelenkt ist und ohne Anfangsgeschwindigkeit in Gang gesetzt wird. Es soll die Winkelgeschwindigkeit des Pendels für den Augenblick gefunden werden, wo der Faden OM mit der Vertikalen den Winkel φ bildet.

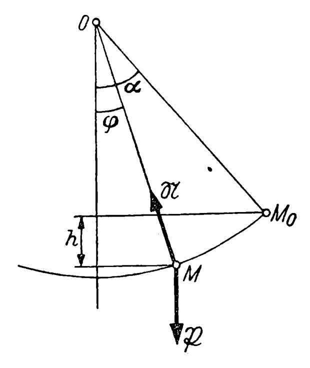


Abb. 31

Wir bezeichnen die Anfangslage des Punktes M mit M_0 und wenden das Gesetz der kinetischen Energie bei der Verschiebung M_0M der kleinen Masse an.

Auf die kleine Masse wirken zwei Kräfte ein: die Schwerkraft $\mathfrak{P}$ und die Reaktion $\mathfrak{N}$ des Fadens.

Die Arbeit der Schwerkraft auf der Strecke M_0M ist gleich Ph, wobei h die vertikale Verschiebung der kleinen Masse ist. Die Reaktion $\mathfrak{N}$ ist jedoch senkrecht zur Geschwindigkeit der kleinen Masse gerichtet, folglich ist ihre elementare Arbeit bei der elementaren Verschiebung der kleinen Masse gleich Null, woraus hervorgeht, daß auch die Gesamtarbeit der Reaktion auf der Strecke M_0M gleich Null ist.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit der kleinen Masse in der Lage M mit v und beachten, daß in der Lage M_0 ihre Geschwindigkeit gleich Null ist, so erhalten wir nach dem Gesetz der kinetischen Energie

$$\frac{m v^2}{2} = P h.$$

Aus der Abb. 31 erhalten wir:

$$h = l \cos\varphi - l\cos\alpha = l(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Folglich ist

$$\frac{m v^2}{2} = P\, l\,(\cos\varphi - \cos\alpha) \tag{1}$$

und daher

$$v = \sqrt{2 g\, l(\cos\varphi - \cos\alpha)}.$$

Bezeichnen wir die gesuchte Winkelgeschwindigkeit des Pendels mit ω, so erhalten wir

$$\omega = \frac{v}{l} = \sqrt{2\,\frac{g}{l}\,(\cos\varphi - \cos\alpha)}.$$

Im Augenblick des Durchganges des Pendels durch die vertikale Lage (bei $\varphi = 0$) wird

$$\omega = \sqrt{2\frac{g}{l}(1-\cos\alpha)} = \sqrt{4\frac{g}{l}\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Wir wollen noch die Spannung des Fadens OM für den Augenblick bestimmen, wo das Pendel mit der Vertikalen den Winkel φ bildet. Diese Spannung ist der Größe nach gleich der Reaktion $\mathfrak{N}$ des Fadens. Zur Ermittlung der Reaktion $\mathfrak{N}$ wenden wir die Methode der Kinetostatik an. Wenn wir zu den Kräften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{N}$ die zentrifugale und die tangentiale Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^n$ und $\mathfrak{F}_I^t$ hinzufügen (Abb. 32), dann erhalten wir ein Kräftesystem, das sich im Gleichgewicht befindet. Die Summe der Komponenten dieser Kräfte in einer beliebigen Richtung muß gleich Null sein. Wenn wir auf die Richtung OM projizieren, erhalten wir

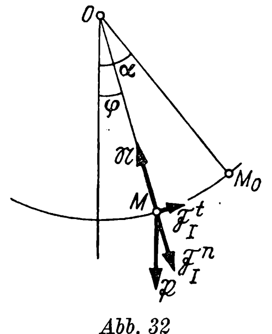


Abb. 32

$$P\cos\varphi + F_I^n - N = 0,$$

woraus

$$N = P\cos\varphi + F_I^n$$

folgt. Es ist aber

$$F_I^n = \frac{m v^2}{l}$$

oder auf Grund der Gleichung (1)

$$F_I^n = 2P(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Folglich ist

$$N = P\cos\varphi + 2P(\cos\varphi - \cos\alpha) = P(3\cos\varphi - 2\cos\alpha).$$

Im Augenblick des Durchganges des Pendels durch die vertikale Lage (bei $\varphi = 0$) ist die Spannung gleich

$$N = P(3 - 2\cos\alpha).$$

§ 22. Das Potential. Die potentielle Energie

Das *Kraftfeld* ist das Gebiet (oder der Teil des Raumes), in dem auf einen materiellen Punkt überall eine bestimmte Kraft wirkt. So ist z. B. der Raum in der Nähe der Erdoberfläche das Kraftfeld für die Schwerkraft; der Raum in der Nähe eines elektrisierten Körpers ist das Kraftfeld für die elektrischen Kräfte usw.

Wir wollen uns ein Kraftfeld vorstellen und in diesem Felde den materiellen Punkt M unterbringen, auf den irgendeine Kraft $\mathfrak{F}$ wirkt (Abb. 33). Das Kraftfeld heißt *Potentialfeld*, wenn die Kraft $\mathfrak{F}$, die in diesem Felde wirkt, folgende zwei Eigenschaften besitzt:

1. Größe und Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$ hängen nur *von der Lage* des Punktes M ab;

2. die *Arbeit* der Kraft $\mathfrak{F}$ bei Bewegung des Punktes M aus der Lage M_1 nach M_2 *hängt nicht von der Bahnkurve ab*, auf welcher die Bewegung des Punktes zwischen den Lagen M_1 und M_2 vor sich geht.

Wenn wir uns auf das in den §§ 16 und 17 Dargelegte besinnen, sehen wir, daß die Schwerkraft und auch jede Zentralkraft, die nur von der Entfernung des Punktes vom Kraftzentrum abhängt, die oben erwähnten beiden Eigenschaften besitzt. Folglich stellen das Feld der Schwerkraft und das Feld der Zentralkraft, die vom Abstand bis zum Kraftzentrum abhängt (insbesondere das Feld der Erdgravitation, das elektrostatische Feld usw.), Beispiele für ein Potentialfeld dar.

Wir wollen uns mit einigen Eigenschaften des Potentialfeldes beschäftigen. Zuerst wollen wir den Begriff der *potentiellen Energie* eines materiellen Punktes festlegen, der sich im Potentialfelde befindet. Wir stellen uns ein Potentialfeld vor und setzen in dieses Feld den materiellen Punkt M (Abb. 34). Irgendeinen willkürlichen Punkt des Feldes bezeichnen wir mit M_0 und nennen ihn die Null-Lage. Die potentielle Energie des materiellen Punktes M ist die Arbeit, die durch die am Punkte M angreifende Kraft $\mathfrak{F}$ beim Übergang des Punktes aus der gegebenen Lage in die Null-Lage geleistet wird.

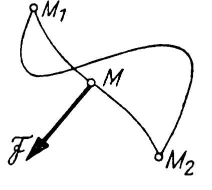


Abb. 33

Wenn wir an einer bestimmten Wahl der Null-Lage festhalten, so wird die potentielle Energie des Punktes M (wir bezeichnen sie mit V) nur von der Lage des Punktes M abhängen. In jedem Punkte des Feldes wird die potentielle Energie V einen ganz bestimmten Wert haben. Wenn wir die Lage des Punktes M durch seine Koordinaten x, y und z in bezug auf irgendein rechtwinkliges Koordinatensystem bestimmen, dann läßt sich die potentielle Energie V als eine Funktion, und zwar als eine eindeutige, der Koordinaten x, y und z darstellen:

$$V = V(x, y, z).$$

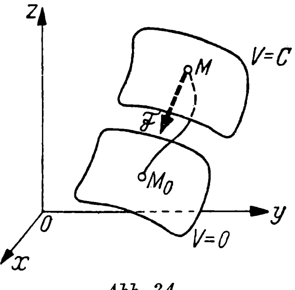


Abb. 34

Selbstverständlich ist die potentielle Energie in der Null-Lage M_0 gleich Null.

Wir wollen uns klarmachen, wie die Werte der potentiellen Energie in den verschiedenen Punkten des Feldes verteilt sind. Wir nehmen an, daß die potentielle Energie im Punkte M den Wert C hat. Gibt es nun noch andere Punkte im Felde, wo die potentielle Energie den gleichen Wert hat? Um auf diese Frage zu antworten, setzen wir den Ausdruck der potentiellen Energie, als Funktion der Koordinaten, dem gegebenen Wert C gleich:

$$V(x, y, z) = C.$$

Wir haben damit die Gleichung einer Fläche erhalten. In allen Punkten dieser Fläche hat die potentielle Energie ein und denselben Wert C. Diese Fläche heißt die *Niveaufläche* oder *Äquipotentialfläche;* die Konstante C heißt der Parameter dieser Fläche.

Wenn wir dem Parameter C verschiedene Werte geben, erhalten wir eine unendliche Anzahl von Äquipotentialflächen. Durch jeden Punkt des Feldes geht eine Äquipotentialfläche. Die Äquipotentialfläche mit dem Parameter $C = 0$ (die „Null"-

Äquipotentialfläche) geht durch die Null-Lage M_0; an allen ihren Punkten ist die potentielle Energie gleich Null. Indem wir eine unendliche Anzahl unendlich naher Äquipotentialflächen ziehen, teilen wir damit das ganze Feld in eine Reihe unendlich dünner Schichten. In jeder dieser Schichten kann man die potentielle Energie als konstant annehmen. Eine solche „Schichten"- oder „Platten"-Verteilung der Werte, der potentiellen Energie hat W. Thomson veranlaßt, das Potentialfeld das „Platten"-Kraftfeld zu nennen.

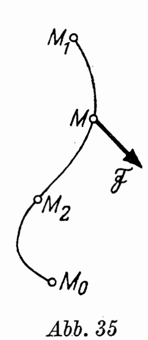


Abb. 35

Wie wir gesehen haben, hängt die im Potentialfelde geleistete Arbeit der Kraft nicht von dem Wege ab, auf dem die Bewegung ihres Angriffspunktes abläuft. Diese Arbeit kann leicht durch die Werte der potentiellen Energie ausgedrückt werden, die den Lagen, zwischen denen die Bewegung des Punktes vor sich geht, entsprechen.

Nehmen wir an, daß der Punkt M in dem Potentialfeld aus der Lage M_1 in die Lage M_2 übergeht (Abb. 35), und bezeichnen wir die Null-Lage mit M_0, dann ist die von der Kraft $\mathfrak{F}$ im Felde geleistete Arbeit auf dem Wege M_1M_2 (wir bezeichnen diese Arbeit mit R) gleich der Differenz der Arbeiten derselben Kraft auf den Wegen $M_1M_2M_0$ und M_2M_0. Diese Arbeiten sind aber gleich der Differenz der Werte der potentiellen Energie in den Punkten M_1 und M_2. Folglich erhalten wir, wenn wir die Werte der potentiellen Energie in den Punkten M_1 und M_2 mit V_1 und V_2 bezeichnen:

$$R = V_1 - V_2. \tag{1}$$

Diese Gleichung ist die Grundlage der Theorie des Potentialfeldes. Wir führen einige Fälle ihrer Anwendung an.

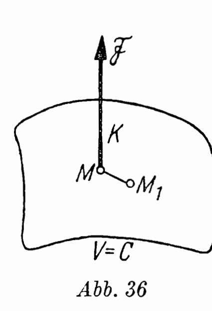
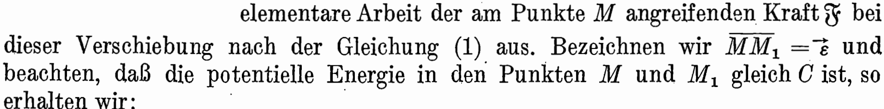


Abb. 36

Wir werden zeigen, daß in jedem Punkte des Potentialfeldes die im Felde wirkende Kraft *normal zu der Äquipotentialfläche gerichtet ist, die durch den gegebenen Punkt geht.*

Nehmen wir an, daß der Punkt M auf der Äquipotentialfläche mit dem Parameter C liegt (Abb. 36). Wir wählen den Punkt M_1, der unendlich nahe dem Punkte M ist und gleichfalls auf derselben Äquipotentialfläche liegt. Wir geben dem Punkte M die elementare Verschiebung MM_1 und drücken die elementare Arbeit der am Punkte M angreifenden Kraft $\mathfrak{F}$ bei dieser Verschiebung nach der Gleichung (1) aus. Bezeichnen wir $\overline{MM_1} = \vec{\varepsilon}$ und beachten, daß die potentielle Energie in den Punkten M und M_1 gleich C ist, so erhalten wir:



$$F \cdot \varepsilon \cdot \cos(\mathfrak{F}, \vec{\varepsilon}) = C - C = 0,$$

woraus

$$\cos(\mathfrak{F}, \vec{\varepsilon}) = 0 \qquad \text{oder} \qquad (\mathfrak{F}, \vec{\varepsilon}) = \frac{\pi}{2}$$

folgt.

Somit ist die Kraft $\mathfrak{F}$ senkrecht zu jeder elementaren Verschiebung $\vec{\varepsilon}$ gerichtet, die auf der Äquipotentialfläche liegt. Also ist auch die Kraft $\mathfrak{F}$ normal zu der Äquipotentialfläche gerichtet.

Die Punkte, deren potentielle Energie größere Werte als C hat, liegen auf der einen Seite der Äquipotentialfläche mit dem Parameter C, auf der anderen Seite hat die potentielle Energie kleinere Werte als C. Wir werden zeigen, daß die Kraft $\mathfrak{F}$ *nach der Seite der abnehmenden Werte der potentiellen Energie gerichtet ist.*

Wir erteilen dem Punkte M die elementare Verschiebung $\overline{MK} = \vec{\delta}$ in der Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$ (Abb. 36) und drücken die Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ nach der Gleichung (1) aus. Bezeichnen wir den Wert der potentiellen Energie im Punkte K' mit C', so erhalten wir:

$$F\delta = C - C'.$$

Es ist aber $F > 0$ und $\delta > 0$. Folglich ist $C - C' > 0$ oder $C' < C$, d. h., im Punkte K hat die potentielle Energie einen kleineren Wert als im Punkte M. Also ist die Kraft $\mathfrak{F}$ nach der Seite der abnehmenden Werte der potentiellen Energie gerichtet.

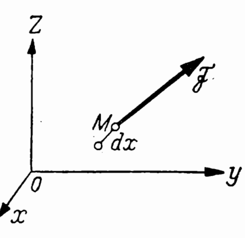


Abb. 37

Gleichfalls verwenden wir noch die Gleichung (1) zur Errechnung der *Komponenten der im Potentialfelde wirkenden Kraft auf den Koordinatenachsen.*

Wir bezeichnen die Koordinaten des Punktes M in bezug auf die rechtwinkligen Koordinatenachsen mit x, y und z und die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}$ auf denselben Achsen mit X, Y und Z (Abb. 37). Wir geben dem Punkte M die elementare Verschiebung $\mathrm{d}x$, die parallel zur x-Achse verläuft, und drücken die elementare Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ bei dieser Verschiebung einerseits nach der Gleichung

$$\mathrm{d}R = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z$$

aus und andererseits nach der Gleichung (1).

Wenn wir beachten, daß im gegebenen Fall $\mathrm{d}y = 0$ und $\mathrm{d}z = 0$ ist, erhalten wir:

$$X\,\mathrm{d}x = V(x, y, z) - V(x + \mathrm{d}x, y, z).$$

Ferner ist

$$V(x, y, z) - V(x + \mathrm{d}x, y, z) = -[V(x + \mathrm{d}x, y, z) - V(x, y, z)] = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x.$$

Folglich erhalten wir

$$X\,\mathrm{d}x = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x$$

und daraus

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Entsprechend ergibt sich

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Die Komponenten der im Potentialfelde wirkenden Kraft auf den Koordinatenachsen sind also gleich den negativen partiellen Ableitungen der potentiellen Energie nach den entsprechenden Koordinaten.

Das Minuszeichen in den obigen Gleichungen ist die Veranlassung zur Einführung einer weiteren Funktion in die dargelegte Theorie: Die negative potentielle Energie heißt die Kräftefunktion. Bezeichnen wir die Kräftefunktion mit $U\,(x, y, z)$, so gilt:

$$U(x, y, z) = -\,V(x, y, z).$$

Führen wir in die Gleichungen für die Komponenten X, Y und Z anstatt der potentiellen Energie die Kräftefunktion ein, so erhalten wir:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{2}$$

d. h., *die Komponenten X, Y und Z sind gleich den partiellen Ableitungen der Kräftefunktion nach den entsprechenden Koordinaten.*

Die potentielle Energie V wird auch das Potential der Kraft $\mathfrak{F}$ genannt. Wir sagen, daß die im Potentialfelde wirkende Kraft $\mathfrak{F}$ das „Potential V" hat.

Die Gleichungen (2) geben die Möglichkeit, das analytische Kriterium zu formulieren, bei dessen Erfüllung das Kraftfeld sich als Potentialfeld erweist.

Wir stellen uns irgendein Kraftfeld und die in ihm wirkende Kraft $\mathfrak{F}$ vor.

Dieses Feld ist ein Potentialfeld, *wenn die Komponenten folgende Bedingungen* erfüllen:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

wobei $U\,(x, y, z)$ *eine beliebige eindeutige Funktion der Koordinaten des Angriffspunktes der Kraft $\mathfrak{F}$ ist.*

Es läßt sich tatsächlich leicht zeigen, daß, wenn die Bedingungen (2) erfüllt sind, die Kraft $\mathfrak{F}$ die zwei Eigenschaften besitzt, von denen am Anfang dieses Paragraphen die Rede war und bei deren Vorhandensein das Kraftfeld als Potentialfeld erscheint:

1. Da U eine Funktion der Koordinaten des Angriffspunktes der Kraft $\mathfrak{F}$ ist, sind auch die Komponenten X, Y und Z Funktionen derselben Koordinaten. Folglich hängen die Größe und die Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$ nur von der Lage ihres Angriffspunktes ab.

2. Wir werden zeigen, daß die Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ bei einer beliebigen Verschiebung M_1M_2 ihres Angriffspunktes nicht von der Kurve abhängt, auf der die Bewegung erfolgt.

Die elementare Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ ist gleich

$$\mathrm{d}R = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z = \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}U, \tag{3}$$

wobei dU das totale Differential der Funktion U ist. Wenn wir die elementaren Arbeiten summieren und die Koordinaten der Punkte M_1 und M_2 mit x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2 und z_2 bezeichnen, erhalten wir für die Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ bei der Verschiebung M_1M_2 den Ausdruck

$$R = \int_{M_1}^{M_2} dU = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1),$$

der nicht von der Kurve abhängt, auf der sich der Angriffspunkt der Kraft zwischen den Lagen M_1 und M_2 bewegt.

Behalten wir die Gleichung (3) im Auge, so können wir die Bedingung, bei der das Kraftfeld ein Potentialfeld ist, auch folgendermaßen formulieren: *Wenn die elementare Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ das totale Differential irgendeiner eindeutigen Funktion der Koordinaten ihres Angriffspunktes ist, dann ist das Feld der Kraft $\mathfrak{F}$ ein Potentialfeld.*

Es sind Fälle möglich, wo die elementare Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ ein totales Differential irgendeiner Funktion U (x, y, z) ist, die aber mehrdeutig ist. In solchen Fällen wird das Feld der Kraft $\mathfrak{F}$ gleichfalls ein Potentialfeld genannt, aber man sagt dann, daß die Kraft $\mathfrak{F}$ ein *mehrdeutiges Potential* hat. Als Beispiel für ein Potentialfeld mit einem mehrdeutigen Potential kann der Raum angesehen werden, der einen geradlinigen elektrischen Leiter umgibt. In diesem Felde wirkt auf den Magnetpol eine Kraft, die das mehrdeutige Potential

$$U = k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

hat, wobei k ein konstanter Koeffizient ist[1].

Wir werden uns nicht weiter mit der Untersuchung der Eigenschaften des Potentialfeldes mit einem mehrdeutigen Potential beschäftigen. Wir wollen nur bemerken, daß in einem solchen Felde die Eigenschaft der Unabhängigkeit der Arbeit einer Kraft vom Wege, auf dem die Bewegung ihres Angriffspunktes vor sich geht, nicht mehr besteht.

§ 23. Die Bewegung eines materiellen Punktes im Potential. Der Energieerhaltungssatz

Wir wollen die Bewegung untersuchen, die der materielle Punkt im Potential ausführt.

Wir nehmen an, daß auf den materiellen Punkt M im gegebenen Feld die Kraft $\mathfrak{F}$ wirkt (die ein eindeutiges Potential besitzt). Die Bewegung des Punktes M geht unter der Wirkung der Kraft $\mathfrak{F}$ vor sich. Wir nehmen zwei beliebige Lagen M_1 und M_2 des Punktes M auf seiner Bewegungsbahn an (Abb. 38) und wenden das Gesetz der kinetischen Energie auf die Bewegung des Punktes M im Abschnitt M_1M_2 an. Be-

[1] Der Stromleiter wird mit der z-Achse des geradlinigen x, y, z-Systems zusammenfallend angenommen.

zeichnen wir die Geschwindigkeiten des Punktes M in den Lagen M_1 und M_2 mit $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ und die Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ auf der Bahn M_1M_2 mit R, so gilt:

$$\frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = R.$$

Andererseits gilt:

$$R = V_1 - V_2,$$

wobei V_1 und V_2 die Werte der potentiellen Energie des Punktes M in den Lagen M_1 und M_2 sind. Folglich erhalten wir:

$$\frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = V_1 - V_2.$$

Hieraus folgt, daß

$$\frac{m v_2^2}{2} + V_2 = \frac{m v_1^2}{2} + V_1$$

ist, d. h., daß in den Lagen M_1 und M_2 die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie des Punktes M ein und denselben Wert hat.

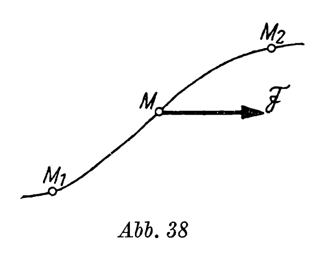


Abb. 38

Die Lagen M_1 und M_2 waren aber von uns auf der Bewegungsbahn des Punktes M ganz willkürlich gewählt worden. Wir können also schließen, daß während der ganzen Zeit der Bewegung des Punktes M im gegebenen Felde *die Summe seiner kinetischen und potentiellen Energie den konstanten Wert*

$$\frac{m v^2}{2} + V = \text{const}$$

bewahrt.

Wir wollen die Summe der kinetischen und potentiellen Energie des materiellen Punktes seine *mechanische Energie* nennen. Wir sehen, daß bei der Bewegung des materiellen Punktes unter der Wirkung der Kraft, die ein eindeutiges Potential hat, *seine mechanische Energie eine konstante Größe bewahrt.* Dieses Resultat ist ein Spezialfall des allgemeinen *Energieerhaltungssatzes*, der durch die Arbeiten von R. MAYER und HELMHOLTZ als Universal-Naturgesetz aufgestellt wurde. Nach diesem Gesetz werden alle in der uns umgebenden Welt auftretenden Erscheinungen vom Übergang der Energie von der einen Form in eine andere begleitet (z. B. der mechanischen in die Wärmeenergie, der elektrischen in die mechanische Energie usw.). Der Übergang erfolgt dabei so, daß der allgemeine Energievorrat, der in einem geschlossenen System vorhanden ist, konstant bleibt. Die Bewegung der materiellen Körper wird gleichfalls vom Übergang der mechanischen Energie in andere Formen der Energie und umgekehrt begleitet. Ein solcher Übergang findet nicht bei Bewegung des materiellen Punktes im Potentialfelde statt; in diesem Spezialfall behält die mechanische Energie den konstanten Wert bei, ohne in andere Energieformen überzugehen.

KAPITEL V

DER KRAFTSTOSS UND DER IMPULSSATZ

§ 24. Der Kraftstoß

Wir wollen den Begriff des Kraftstoßes zuerst für einen *Spezialfall* festlegen, bei dem die *Kraft nach Größe und Richtung konstant* ist. Wir stellen uns eine der Größe und der Richtung nach konstante Kraft $\mathfrak{F}$ vor, wählen zwei Zeiten t_1 und t_2 und bezeichnen den Zeitraum $t_2 - t_1$ mit τ. Der Vektor

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{F}\tau$$

heißt der *Kraftstoß* von $\mathfrak{F}$ im Zeitraum τ.

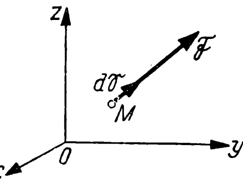


Abb. 39

Die Größe des Impulses[1] $\mathfrak{S}$ ist gleich $S = F\tau$, die Richtung des Impulses $\mathfrak{S}$ fällt mit der Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$ zusammen.

Wir wollen nun den Begriff des Impulses für den Fall einer variablen Kraft bestimmen.

Wir stellen uns die variable Kraft $\mathfrak{F}$ vor und wählen zwei Zeiten t_1 und t_2. Um den Begriff des Impulses der Kraft $\mathfrak{F}$ in der Zeit $t_2 - t_1$ festzulegen, führen wir den Begriff des elementaren Impulses ein. Wir wählen zwei unendlich nahe Zeiten t und $t + \mathrm{d}t$, die zwischen den Zeiten t_1 und t_2 liegen, und bezeichnen die Größe und die Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$, die der Zeit t entsprechen (Abb. 39). Man nennt den unendlich kleinen Vektor $\mathrm{d}\mathfrak{S}$, dessen absoluter Betrag gleich

$$|\mathrm{d}\mathfrak{S}| = F\,\mathrm{d}t$$

ist und der die Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$ hat, den *elementaren Impuls* der Kraft $\mathfrak{F}$ im unendlich kleinen Zeitraum $\mathrm{d}t$.

Wir wollen uns nun vorstellen, daß wir den Zeitraum $t_2 - t_1$ in eine Reihe elementarer Zeiträume $\mathrm{d}t$ zerlegen und die elementaren Impulse $\mathrm{d}\mathfrak{S}$ der Kraft $\mathfrak{F}$ zusammenstellen, die diesen unendlich kleinen Zeiträumen entsprechen. Die Summe aller elementaren Impulse $\mathrm{d}\mathfrak{S}$

$$\mathfrak{S} = \sum \mathrm{d}\mathfrak{S} = \sum \mathfrak{F}\,\mathrm{d}t$$

nennt man den *Impuls* $\mathfrak{S}$ der Kraft $\mathfrak{F}$ in der Zeit $t_2 - t_1$.

Die aus einer unzähligen Menge unendlich kleiner Summanden bestehende Vektorensumme $\Sigma\mathfrak{F}\,\mathrm{d}t$ ist das Vektor-Integral des Vektors $\mathfrak{F}$ mit dem Skalar-Argument t und wird durch $\int_{t_1}^{t_2}\mathfrak{F}\,\mathrm{d}t$ bezeichnet. Also ist

$$\mathfrak{S} = \int_{t_1}^{t_2}\mathfrak{F}\,\mathrm{d}t,$$

d. h., der Impuls der variablen Kraft $\mathfrak{F}$ ist gleich dem Vektor-Integral der Kraft $\mathfrak{F}$ über der Zeit t.

[1] Man beachte, daß sowohl der Kraftstoß $(\int\mathfrak{F}\mathrm{d}t)$ als auch die Bewegungsgröße (mv) mit *Impuls* bezeichnet werden (Anm. d. Redakt.).

Für die Berechnung des Impulses der variablen Kraft kann die Projektionsmethode angewandt werden. Wir wählen die zueinander senkrechten Achsen x, y und z (Abb. 39) und errechnen die Komponenten S_x, S_y und S_z des Impulses $\mathfrak{S}$ auf diesen Achsen. Da der Vektor $\mathfrak{S}$ gleich der Summe der Vektoren $d\mathfrak{S}$ ist und da die Projektion der Summe gleich der Summe der Projektionen der Komponenten ist, gilt

$$S_x = \sum dS_x,$$

wobei dS_x die Projektion des elementaren Impulses $d\mathfrak{S}$ auf die x-Achse ist.

Andererseits gilt

$$dS_x = |d\mathfrak{S}| \cos(d\mathfrak{S}, x) = F\,dt \cdot \cos(\mathfrak{F}, x) = X\,dt,$$

wobei $X = F \cos(\mathfrak{F}, x)$ die Projektion der Kraft $\mathfrak{F}$ auf die x-Achse ist. Folglich ist

$$S_x = \sum X\,dt.$$

Die im rechten Teil dieser Gleichung stehende Summe besteht aus einer unzähligen Menge von unendlich kleinen Summanden, sie ist das bestimmte Integral mit der Variablen t in den Grenzen von t_1 bis t_2:

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} X\,dt.$$

Durch analoge Beziehungen werden die Projektionen des Impulses $\mathfrak{S}$ auf die Achsen y und z bestimmt:

$$S_y = \int_{t_1}^{t_2} Y\,dt, \qquad S_z = \int_{t_1}^{t_2} Z\,dt,$$

wobei Y und Z die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}$ auf den Achsen y und z sind.

Wenn wir nach diesen Formeln die Komponenten des Impulses S_x, S_y und S_z errechnen, finden wir die Größe des Impulses $\mathfrak{S}$ nach der Gleichung

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}.$$

Die Richtung des Impulses $\mathfrak{S}$ wird jedoch aus den Gleichungen

$$\cos(\mathfrak{S}, x) = \frac{S_x}{S}, \qquad \cos(\mathfrak{S}, y) = \frac{S_y}{S}, \qquad \cos(\mathfrak{S}, z) = \frac{S_z}{S}$$

bestimmt.

Als Impulseinheit im technischen Maßsystem erscheint Kilogramm-Sekunde, d. h. der Kraftimpuls der Kraft 1 Kilogramm in der Zeit von 1 Sekunde.

§ 25. Der Impuls der Resultierenden

Wir wollen zeigen, daß *der Impuls der Resultierenden mehrerer Kräfte gleich der Summe der Impulse der Komponenten ist.*

Es sind die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ gegeben, die im Punkte M (Abb. 40) angreifen. Wir bezeichnen ihre Resultierende mit $\mathfrak{F}$.

Wir wählen zwei Zeiten t_1 und t_2 und bezeichnen die Impulse der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ und der Resultierenden $\mathfrak{F}$ in der Zeit $t_2 - t_1$ mit $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ sowie $\mathfrak{S}$. Es soll bewiesen werden, daß

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \cdots + \mathfrak{S}_n$$

ist.

Wir wählen die zueinander senkrechten Achsen x, y und z. Bezeichnen wir die Komponenten der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ und der Resultierenden $\mathfrak{F}$ auf der x-Achse mit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ und X, so gilt:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Wir multiplizieren nun beide Teile dieser Gleichung mit dem unendlich kleinen Zeitraum $\mathrm{d}t$ und integrieren in den Grenzen von t_1 bis t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2} X\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} X_1\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} X_2\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_{t_1}^{t_2} X_n\,\mathrm{d}t.$$

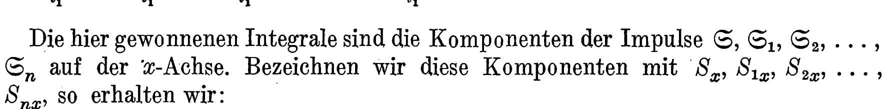


Abb. 40

Die hier gewonnenen Integrale sind die Komponenten der Impulse $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ auf der x-Achse. Bezeichnen wir diese Komponenten mit $S_x, S_{1x}, S_{2x}, \ldots, S_{nx}$, so erhalten wir:

$$S_x = S_{1x} + S_{2x} + \cdots + S_{nx}.$$

Genauso finden wir, wenn wir die Komponenten der Impulse $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ auf den Achsen y und z mit $S_y, S_{1y}, S_{2y}, \ldots, S_{ny}$ und $S_z, S_{1z}, S_{2z}, \ldots, S_{nz}$ bezeichnen:

$$S_y = S_{1y} + S_{2y} + \cdots + S_{ny},$$
$$S_z = S_{1z} + S_{2z} + \cdots + S_{nz}.$$

Somit haben wir gefunden, daß die Komponenten des Impulses $\mathfrak{S}$ auf den Achsen x, y und z entsprechend gleich den Summen der Komponenten der Impulse $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ auf denselben Achsen sind.

Wir nehmen nun die längs der Achsen x, y und z gerichteten Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, multiplizieren die gewonnenen Gleichungen entsprechend mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ und addieren sie gliedweise. Wenden wir auf unsere Impulse die Formel zur Zerlegung des Vektors in Komponenten an, d. h., beachten wir, daß

$$S_x\mathfrak{i} + S_y\mathfrak{j} + S_z\mathfrak{k} = \mathfrak{S},$$
$$S_{1x}\mathfrak{i} + S_{1y}\mathfrak{j} + S_{1z}\mathfrak{k} = \mathfrak{S}_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_{nx}\mathfrak{i} + S_{ny}\mathfrak{j} + S_{nz}\mathfrak{k} = \mathfrak{S}_n$$

ist, so erhalten wir

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \cdots + \mathfrak{S}_n,$$

was zu beweisen war.

Das bewiesene Theorem vom Impuls der Resultierenden hat man oftmals bei Projektionen auf beliebige Achsen zu benutzen. Wir sehen, daß *die Projektion des Impulses der Resultierenden auf eine beliebige Achse gleich der Summe der Projektionen der Impulse der Komponenten auf dieselbe Achse ist.*

§ 26. Die Bewegungsgröße. Der Impulssatz

Wir stellen uns den sich bewegenden materiellen Punkt M vor (Abb. 41) und wollen seine Masse mit m und die Geschwindigkeit mit $\mathfrak{v}$ bezeichnen. Den Vektor $m\mathfrak{v}$ nennt man *Bewegungsgröße* des materiellen Punktes m.

Im weiteren werden wir Beziehungen für die Komponenten der Bewegungsgröße auf den zueinander senkrechten Koordinatenachsen x, y und z benötigen. Wir wollen diese jetzt angeben.

Die Komponenten der Bewegungsgröße mv auf den Achsen x, y und z sind gleich

$$m v_x, \qquad m v_y, \qquad m v_z,$$

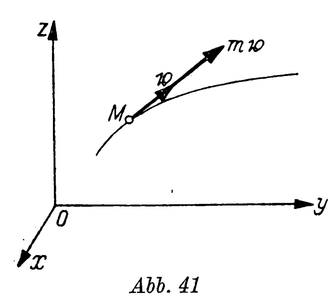


Abb. 41

wobei v_x, v_y und v_z die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auf den Achsen x, y und z sind. Die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auf den Koordinatenachsen sind aber gleich den ersten Ableitungen der Koordinaten x, y und z des Punktes M nach der Zeit t. Indem wir diese Ableitungen mit $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{z}$ bezeichnen, schreiben wir für die Komponenten der Bewegungsgröße auf den Koordinatenachsen:

$$m \dot{x}, \qquad m \dot{y}, \qquad m \dot{z}.$$

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie sich die Bewegungsgröße des materiellen Punktes im Laufe der Zeit verändert.

Wir denken uns einen materiellen Punkt M, der sich im Raum unter der Einwirkung der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bewegt (Abb. 42), und bezeichnen die Resultierende dieser Kräfte mit $\mathfrak{F}$. Wir stellen die Differentialgleichung der Bewegung des Punktes M unter Benutzung der Komponenten auf den Koordinatenachsen x, y und z auf. Bezeichnen wir die Komponenten der Resultierenden $\mathfrak{F}$ auf diesen Achsen mit X, Y und Z, so gilt:

$$m \ddot{x} = X, \qquad m \ddot{y} = Y, \qquad m \ddot{z} = Z.$$

Wir wählen zwei Zeiten t_1 und t_2, multiplizieren beide Seiten der ersten Gleichung mit dem unendlich kleinen Zeitraum $\mathrm{d}t$ und integrieren über die Variable t in den Grenzen von t_1 bis t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2} m \ddot{x} \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} X \,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Das auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Integral ist nichts anderes als die Komponente des Impulses der Resultierenden $\mathfrak{F}$ in der Zeit $t_2 - t_1$ auf der x-Achse. Das Integral aber, das auf der linken Seite der Gleichung (1) steht, kann nach

$$\int_{t_2}^{t_1} m \ddot{x} \, dt = [m \dot{x}]_{t_1}^{t_2}$$

errechnet werden.

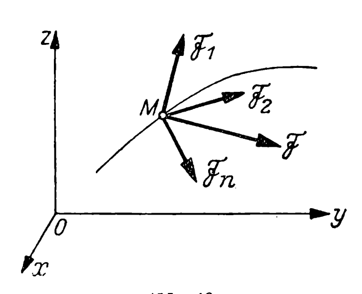


Abb. 42

Wir bezeichnen die Geschwindigkeiten des Punktes M zu den Zeiten t_1 und t_2 mit $\mathfrak{v}_1$ bzw. $\mathfrak{v}_2$. Die Werte der Ableitungen $\dot{x}$ zu den Zeiten t_1 und t_2 sind gleich den Komponenten der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ auf der x-Achse. Bezeichnen wir diese Komponenten mit v_{1x} und v_{2x}, so erhalten wir:

$$\int_{t_1}^{t_2} m \ddot{x} \, dt = m v_{2x} - m v_{1x}.$$

Wir bezeichnen den Impuls der Resultierenden $\mathfrak{F}$ in der Zeit $t_2 - t_1$ mit $\mathfrak{S}$ und die Komponente dieses Impulses auf der x-Achse mit S_x. In diesem Fall kann die Gl. (1) auf folgende Art umgeschrieben werden:

$$m v_{2x} - m v_{1x} = S_x.$$

Ebenso werden die analogen Gleichungen

$$m v_{2y} - m v_{1y} = S_y,$$

$$m v_{2z} - m v_{1z} = S_z$$

aufgestellt.

Multiplizieren wir die gewonnenen Gleichungen entsprechend mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$, die längs der Achsen x, y und z gerichtet sind, und addieren sie gliedweise, so erhalten wir

$$m \mathfrak{v}_2 - m \mathfrak{v}_1 = \mathfrak{S}. \tag{2}$$

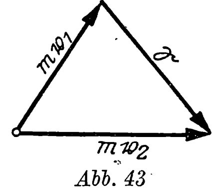


Abb. 43

Wenn wir uns daran erinnern, daß der Impuls $\mathfrak{S}$ der Resultierenden $\mathfrak{F}$ gleich der Summe der Impulse $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ der Komponenten $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ in der Zeit $t_2 - t_1$ ist, dann kommen wir endlich zu folgendem Resultat:

$$m \mathfrak{v}_2 - m \mathfrak{v}_1 = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \cdots + \mathfrak{S}_n.$$

Wir sehen, daß *der Zuwachs der Bewegungsgröße eines materiellen Punktes in einem gewissen Zeitraum gleich der Summe der Impulse der angreifenden Kräfte für denselben Zeitraum ist.* Dieses Theorem heißt der *Impulssatz.*

Aus der Gl. (2) schließen wir, daß der Vektor $m\mathfrak{v}_2$ gleich der Summe der Vektoren $m\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{S}$ ist. Mit anderen Worten, der Vektor $m\mathfrak{v}_2$ kann als abschließende Seite des Dreiecks dargestellt werden, das aus den Vektoren $m\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{S}$ konstruiert ist (Abb. 43).

Bei der Anwendung hat man häufiger den Impulssatz nicht in der Vektorform zu benutzen, sondern in der Komponentenform bezüglich beliebiger Achsen. Mit den Komponenten auf der x-Achse erhalten wir

$$m v_{2x} - m v_{1x} = S_{1x} + S_{2x} + \cdots + S_{nx},$$

wobei $S_{1x}, S_{2x}, \ldots, S_{nx}$ die Komponenten der Impulse $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ auf der x-Achse sind. Wenn wir im Auge behalten, daß mv_x die Komponente der Bewegungsgröße auf der x-Achse und die Differenz $mv_{2x} - mv_{1x}$ der Zuwachs dieser Komponente in der Zeit $t_2 - t_1$ ist, dann können wir den Sachverhalt folgendermaßen darstellen: *Der Zuwachs der Komponente der Bewegungsgröße in einem gewissen Zeitraum ist gleich der Summe der Komponenten der in demselben Zeitraum wirkenden Impulse der angreifenden Kräfte.* Das ist die Formulierung des Impulssatzes bei der Projektion auf irgendeine Achse.

§ 27. Beispiele für die Anwendung des Impulssatzes

Wir wollen das im vorhergehenden Paragraphen aufgestellte Theorem auf einige Beispiele anwenden. Der Impulssatz muß in den Fällen angewandt werden, in denen es sich in der Aufgabe um die Ermittlung der Abhängigkeit zwischen der Geschwindigkeit des materiellen Punktes und der Zeit handelt.

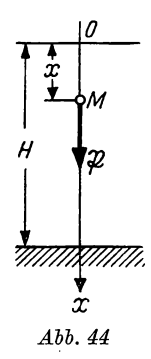


Abb. 44

Beispiel 8. Der Körper M (der als materieller Punkt betrachtet wird) fällt aus der Höhe H ohne Anfangsgeschwindigkeit zur Erde. Die Fallzeit des Körpers M ist zu bestimmen.

Die Bewegung des Punktes M geschieht unter der Einwirkung der Schwerkraft $\mathfrak{P}$ (den Luftwiderstand vernachlässigen wir). Wir wählen den Beginn der Bewegung des Punktes M als Anfang der Zeitzählung $t = 0$; den Augenblick des Aufpralls auf die Erde bezeichnen wir mit t. Wir richten die x-Achse vertikal nach unten (Abb. 44) und wenden bei der betrachteten Bewegung den Impulssatz in der Projektionsform bezüglich der x-Achse an. Bei Beginn ist die Geschwindigkeit des Punktes M gleich Null, zur Zeit t hat der Punkt M eine Geschwindigkeit, deren Größe $v = \sqrt{2gH}$ (siehe § 21, Aufgabe 1) ist und die vertikal nach unten gerichtet ist. Andererseits hat der Impuls der Kraft $\mathfrak{P}$ zur Zeit t die Größe $\mathfrak{P}t$ und ist vertikal nach unten gerichtet. Der Impulssatz führt in der Projektionsform bezüglich der x-Achse auf die Gleichung

$$m\sqrt{2gH} = Pt,$$

woraus

$$t = \frac{\sqrt{2gH}}{g} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

folgt.

Im § 9 wurde dieses Resultat auf einem anderen Wege gewonnen.

Beispiel 9. Ein Hammer vom Gewicht $P = 3$ t fällt aus der Höhe $H = 1{,}5$ m auf einen Rohbarren, der geschmiedet werden soll. Die Deformation des Rohbarrens erfolgt im Laufe von $\tau = 0{,}01$ Sekunden. Die mittlere Kraft des Hammers soll gefunden werden.

Wir wenden den Impulssatz auf die Bewegung des Hammers im Zeitraum vom Beginn seines Fallens bis zu dem Augenblick an, in dem die Deformation des Rohbarrens beendet ist und die Geschwindigkeit des gefallenen Hammers zu Null wird.

Wir bezeichnen die Fallzeit des Hammers mit t. In der Zeit $t + \tau$ wirkt auf den Hammer die Schwerkraft $\mathfrak{P}$. Außerdem wirkt in der Zeit τ auf denselben die Reaktion des Rohbarrens, die gleich dem Druck des Hammers und vertikal nach oben gerichtet ist. Die Reaktion des Rohbarrens ist eine variable Kraft, die sich sehr schnell im Laufe des kleinen Zeitraumes τ verändert. Wir vertauschen diese variable Kraft mit irgendeiner konstanten Kraft $\mathfrak{N}$, d. h., wir ersetzen die wirkliche Reaktion durch eine mittlere Reaktion. Die gesuchte mittlere Kraft des Hammers ist gleich $\mathfrak{N}$.

Der Impuls der Schwerkraft $\mathfrak{P}$ in der Zeit $t = \tau$ ist der Größe nach gleich $\mathfrak{P}\,(t + \tau)$ und vertikal nach unten gerichtet Der Impuls der Reaktion $\mathfrak{N}$ in derselben Zeit ist der Größe nach gleich $\mathfrak{N}\tau$ und vertikal nach oben gerichtet. Da die Geschwindigkeiten des Hammers bei Beginn und am Ende gleich Null sind, erhalten wir nach dem Impulssatz in Projektionsform bezüglich der vertikalen Achse (der wir die Richtung von oben nach unten zuschreiben):

$$P(t + \tau) - N\tau = 0.$$

Hieraus folgt

$$N = P\left(\frac{t}{\tau} + 1\right).$$

Substituieren wir hier (s. die vorhergehende Aufgabe)

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}},$$

so erhalten wir endgültig

$$N = P\left(\frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{2H}{g}} + 1\right).$$

Wenn wir hier $P = 3$ t, $H = 1{,}5$ m, $\tau = 0{,}01$ s einsetzen, dann finden wir

$$N = 3(55{,}3 + 1) = 168{,}9\,\text{t}.$$

KAPITEL VI

DER MOMENTENSATZ

§ 28. Die Momente des Impulses in bezug auf einen Punkt und in bezug auf eine Achse

Im I. Teil des Lehrbuches haben wir uns mit den Begriffen des Kraftmomentes in bezug auf einen Punkt und des Kraftmomentes in bezug auf eine Achse bekanntgemacht (siehe Teil I, Kapitel IX). Diese Begriffe sind Grundbegriffe der Statik eines starren Körpers. Die Begriffe des Momentes in bezug auf einen Punkt und des Momentes in bezug auf eine Achse können auf beliebige Vektorgrößen angewandt werden. Wir wollen dieselben auf die Bewegungsgröße eines materiellen Punktes anwenden.

Wir wollen uns den sich bewegenden materiellen Punkt M vorstellen (Abb. 45), bezeichnen seine Bewegungsgröße mit $m\mathfrak{v}$, wählen einen beliebigen Punkt O und fällen von diesem Punkte aus eine Senkrechte auf die Wirkungslinie der Bewegungsgröße $m\mathfrak{v}$. Die Länge dieser Senkrechten bezeichnen wir mit p.

Man nennt den Vektor $\mathfrak{l}$ *das Moment der Bewegungsgröße*[1] *in bezug auf den Punkt* O. Dieser hat den Betrag

$$l = m v p$$

und steht im Punkte O senkrecht auf der Fläche, die durch diesen Punkt und die Bewegungsgröße $m\mathfrak{v}$ festgelegt ist. Die Richtung des Momentes $\mathfrak{l}$ ist die einer Rechtsschraube, die durch den Drehsinn von $m\mathfrak{v}$ um den Punkt O gebildet wird.

Abb. 45

Mit anderen Worten: Das Moment $\mathfrak{l}$ der Bewegungsgröße kann als Vektorprodukt der Vektoren $\mathfrak{r}$ und $m\mathfrak{v}$ bestimmt werden:

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{r} \times m\mathfrak{v},$$

wobei $\mathfrak{r}$ der von dem Punkte O nach dem Punkte M gezogene Radiusvektor ist (Abb. 46).

Wir bezeichnen wieder die Bewegungsgröße des materiellen Punktes M mit $m\mathfrak{v}$ (Abb. 47), nehmen eine beliebige z-Achse an und projizieren die Bewegungsgröße $m\mathfrak{v}$ auf eine zur z-Achse senkrechte Ebene α. Die Projektion der Bewegungsgröße auf die Ebene α bezeichnen wir mit mv_1 (v_1 ist die Projektion der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auf die Ebene α). Von dem Punkte O_1 aus, in dem die z-Achse die Ebene α schneidet, fällen wir das Lot auf die Wirkungslinie der Projektion mv_1. Die Länge dieses Lotes bezeichnen wir mit p_1.

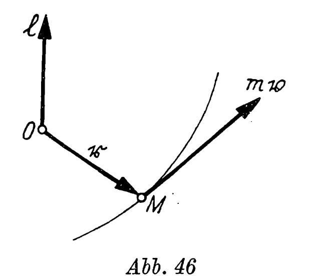


Abb. 46

Die Größe

$$l_z = \pm m v_1 p_1$$

heißt das *Moment der Bewegungsgröße in bezug auf die z-Achse.*

Das eine oder das andere Vorzeichen in dieser Formel wird nach der bekannten Regel bestimmt: Dreht die Bewegungsgröße entgegen dem Uhrzeigersinn um die z-Achse (von der Seite der positiven z-Achse aus gesehen), so wird im Ausdruck des Momentes l_z das Pluszeichen genommen, im entgegengesetzten Fall nimmt man das Minuszeichen.

Das Moment l_z tragen wir vom Punkte O_1 aus auf der z-Achse nach der positiven Seite ab, wenn $l_z > 0$ ist, und nach der negativen Seite, wenn $l_z < 0$ ist.

Die Kraftmomente in bezug auf einen Punkt und in bezug auf eine Achse sind durch die bekannte Wechselbeziehung verbunden, die in der Statik dargelegt wurde (siehe Teil I, § 50). Natürlich bleibt diese Wechselbeziehung auch in bezug auf die Momente der Bewegungsgröße gültig. Wir stellen uns die Bewegungsgröße $m\mathfrak{v}$ des

[1] Deutsche Bezeichnung auch: Impulsmoment, Drehimpuls oder Drall (Anm. d. deutschen Redaktion).

materiellen Punktes M vor (Abb. 48) und wählen einen beliebigen Punkt O sowie gleichfalls die z-Achse, die durch den Punkt O geht. Wir bezeichnen die Momente der Bewegungsgröße $m\mathfrak{v}$ in bezug auf den Punkt O mit $\mathfrak{l}$ und in bezug auf die z-Achse mit l_z. Diese Momente sind durch die Gleichung

$$l_z = l \cos(\mathfrak{l}, z)$$

miteinander verbunden, d. h., *das Moment l_z ist gleich der Projektion des Momentes $\mathfrak{l}$ auf die z-Achse.*

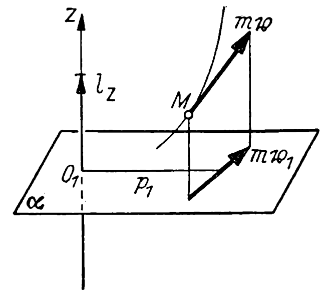


Abb. 47

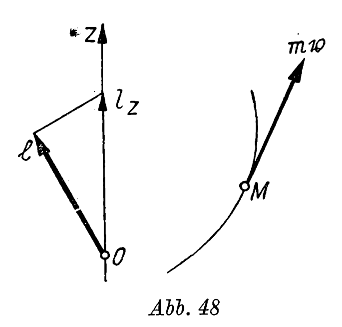


Abb. 48

Wir vermerken noch die Ausdrücke der Momente der Bewegungsgröße in bezug auf die Koordinatenachsen. Diese Ausdrücke können leicht aus den entsprechenden Ausdrücken für die Momente einer Kraft in bezug auf die Koordinatenachsen gewonnen werden, die in der Statik ermittelt wurden. Für die Kraftmomente in bezug auf die zueinander senkrechten Achsen x, y und z (wir bezeichnen diese Momente mit M_x, M_y, M_z) gelten die bekannten Gleichungen

$$M_x = yZ - zY,$$
$$M_y = zX - xZ,$$
$$M_z = xY - yX,$$

wobei X, Y, Z die Komponenten der gegebenen Kraft auf den Koordinatenachsen sind und x, y und z die Koordinaten des Angriffspunktes der Kraft.

Um die entsprechenden Gleichungen für die Momente der Bewegungsgröße in bezug auf die Koordinatenachsen zu erhalten, muß man nur in den soeben dargestellten Ausdruck anstatt der Komponenten der Kraft X, Y und Z die Komponenten der Bewegungsgröße einsetzen. Im § 26 haben wir gesehen, daß die Komponenten der Bewegungsgröße des materiellen Punktes M auf den Koordinatenachsen gleich $m\dot{x}$, $m\dot{y}$ und $m\dot{z}$ sind, wobei $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{z}$ die Ableitungen der Koordinaten x, y und z des Punktes M nach der Zeit t sind. Wenn wir diese Größen anstatt der Komponenten der Kraft X, Y und Z in die oben dargestellten Gleichungen einsetzen und die Momente der Bewegungsgröße des materiellen Punktes M in bezug auf die Koordinatenachsen mit l_x, l_y, l_z bezeichnen, dann erhalten wir die Beziehungen

$$l_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}),$$
$$l_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}),$$
$$l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

§ 29. Der Momentensatz

Bei der Bewegung eines materiellen Punktes verändert sich das Moment seiner Bewegungsgröße in bezug auf irgendeine feste Achse mit der Zeit. Die Veränderung dieses Momentes ist einem Gesetz unterworfen, das der *Momentensatz* genannt wird. Wir wollen dieses Gesetz jetzt ableiten.

Wir stellen uns den materiellen Punkt M vor, der sich unter dem Einfluß der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bewegt (Abb. 49), und bezeichnen die Resultierende dieser Kräfte mit $\mathfrak{F}$. Wir wählen das kartesische Koordinatensystem x, y, z und stellen die Differentialgleichung der Bewegung für den Punkt M auf. Wenn wir die Komponenten der Resultierenden $\mathfrak{F}$ auf den Achsen x, y und z mit X, Y und Z bezeichnen, gilt:

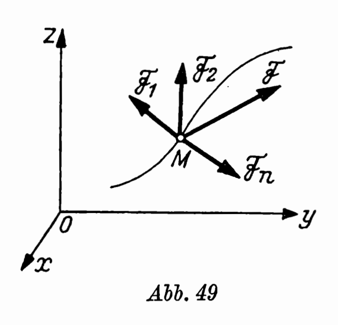


Abb. 49

$$m\ddot{x} = X,$$

$$m\ddot{y} = Y,$$

$$m\ddot{z} = Z.$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $-y$ und die zweite mit x. Addieren wir die gewonnenen Gleichungen, so finden wir:

$$m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) = xY - yX.$$

Der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck ist das Moment der Resultierenden $\mathfrak{F}$ in bezug auf die z-Achse; wir bezeichnen dieses Moment mit M_z. Was jedoch die linke Seite unserer Gleichung anbetrifft, so kann man sich leicht davon überzeugen, daß sie gleich der Ableitung des Momentes der Bewegungsgröße l_z des materiellen Punktes M in bezug auf die z-Achse nach der Zeit ist. Wir haben am Ende des vorhergehenden Paragraphen die Gleichung

$$l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

dargestellt.

Hieraus folgt:

$$\frac{\mathrm{d}\,l_z}{\mathrm{d}\,t} = m(x\ddot{y} + \dot{x}\dot{y} - y\ddot{x} - \dot{y}\dot{x}) = m(x\ddot{y} - y\ddot{x}).$$

Also kann die gewonnene Gleichung auf folgende Art umgeschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}\,l_z}{\mathrm{d}\,t} = M_z.$$

Wir rufen uns ins Gedächtnis zurück, daß das Moment der Resultierenden in bezug auf eine beliebige Achse gleich der Summe der Momente der Komponenten in bezug auf dieselbe Achse ist (s. Teil I, § 57). Wir bezeichnen die Momente der Kräfte

$\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die auf den Punkt M einwirken, in bezug auf die z-Achse mit M_{1z}, $M_{2z}, \ldots, M_{nz}$ und erhalten endgültig

$$\frac{\mathrm{d}\,l_z}{\mathrm{d}\,t} = M_{1z} + M_{2z} + \cdots + M_{nz},$$

d. h., *die Ableitung des Momentes der Bewegungsgröße in bezug auf irgendeine Achse nach der Zeit ist gleich der Summe der Momente der angreifenden Kräfte in bezug auf dieselbe Achse.* Dieses Theorem heißt der *Momentensatz.* Durch ihn wird die Veränderung des Momentes l_z im Laufe der Zeit bestimmt.

Man kann dem Momentensatz auch eine andere Formulierung geben, die sich auf das Moment der Bewegungsgröße $\mathfrak{l}$ in bezug auf den festen Punkt O bezieht.

Bezeichnen wir den von dem Punkte O nach dem sich bewegenden materiellen Punkte M gezogenen Radiusvektor mit $\mathfrak{r}$, so gilt

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{r} \times m\mathfrak{v}.$$

Wir leiten den Vektor $\mathfrak{l}$ nach der Zeit ab und erhalten:

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{l}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{r}}{\mathrm{d}\,t} \times m\,\mathfrak{v} + \mathfrak{r} \times m\,\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{v}}{\mathrm{d}\,t}.$$

Hieraus folgt, wenn wir beachten, daß

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{r}}{\mathrm{d}\,t} = \mathfrak{v}, \qquad \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{v}}{\mathrm{d}\,t} = \mathfrak{w}$$

ist (wobei $\mathfrak{w}$ die Beschleunigung des Punktes M ist),

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{l}}{\mathrm{d}\,t} = \mathfrak{v} \times m\,\mathfrak{v} + \mathfrak{r} \times m\,\mathfrak{w}.$$

Nach der Definition des Vektorproduktes ist jedoch

$$\mathfrak{v} \times m\,\mathfrak{v} = 0$$

(da die Vektoren $\mathfrak{v}$ und $m\mathfrak{v}$ dieselbe Richtung haben). Wenn wir gemäß der Grundgleichung der Dynamik

$$m\,\mathfrak{w} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \cdots + \mathfrak{F}_n$$

substituieren, erhalten wir endgültig:

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{l}}{\mathrm{d}\,t} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}_2 + \cdots + \mathfrak{r} \times \mathfrak{F}_n$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{l}}{\mathrm{d}\,t} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_n,$$

wobei $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ die Momente der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ in bezug auf den Punkt O sind.

Die Vektorableitung des Momentes einer Bewegungsgröße in bezug auf den Punkt O nach der Zeit ist gleich der Summe der Momente der angreifenden Kräfte in bezug auf denselben Punkt. Das ist die zweite Formulierung des Momentensatzes.

§ 30. Die Differentialgleichung der Schwingung eines mathematischen Pendels

Der Momentensatz ist ein bequemes Werkzeug zur Untersuchung der Rotationsbewegungen. In der Dynamik des materiellen Systems werden wir wichtige Anwendungen dieses Gesetzes bei den Rotationsbewegungen eines starren Körpers kennenlernen. Hier werden wir uns auf die Anwendung des Momentensatzes beim Aufstellen der Differentialgleichung der Schwingungen eines mathematischen Pendels beschränken.

Im § 21 (Beispiel 7) nannten wir ein Pendel, das aus dem materiellen Punkt M vom Gewicht P besteht, der an einem undehnbaren und masselosen Faden von der Länge l an dem festen Punkt O aufgehängt ist, ein mathematisches Pendel (Abb. 50). Wir nehmen an, daß das Pendel aus der vertikalen Gleichgewichtslage ausgelenkt wurde und sich dann selbst überlassen wird. Es wird schwingen, d. h., es wird sich bald nach der einen, bald nach der anderen Seite um die Achse drehen, die durch den Aufhängungspunkt O geht und senkrecht zu der Schwingungsebene steht (wir nehmen an, daß die Schwingungsebene des Pendels in der Zeichnungsebene liegt). Die Lage des schwingenden Pendels kann in jedem gegebenen Augenblick durch den Wert des Winkels φ bestimmt werden, der durch den Faden OM und die durch den Punkt O gehende Vertikale gebildet wird. Dieser Winkel verändert sich im Laufe der Zeit. Wir wollen die Differentialgleichung für die Veränderung des Winkels φ aufstellen.

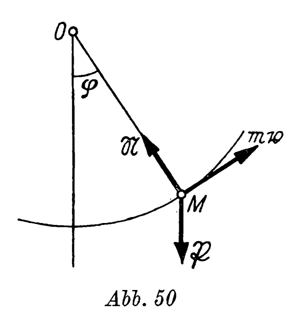


Abb. 50

Dazu wenden wir den Momentensatz auf die Bewegung des materiellen Punktes M an, indem wir als Momentenachse die Drehachse des Pendels wählen (d. h. die Achse, die durch den Punkt O senkrecht zur Zeichnungsebene verläuft). Wir werden diese Achse die z-Achse nennen. An dem materiellen Punkt M greifen zwei Kräfte an: die Schwerkraft $\mathfrak{P}$ und die Reaktion $\mathfrak{N}$ des Fadens. Bezeichnen wir die Momente dieser Kräfte in bezug auf die z-Achse mit M_{1z} und M_{2z} und das Moment des Impulses $m\mathfrak{v}$ in bezug auf dieselbe Achse mit l_z, so erhalten wir nach dem Momentensatz

$$\frac{d\,l_z}{d\,t} = M_{1z} + M_{2z}. \tag{1}$$

Nunmehr errechnen wir das Moment des Impulses l_z. Es ist:

$$l_z = m\,v\,l,$$

wobei l die Länge des Fadens OM ist.

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M als Drehgeschwindigkeit um die z-Achse ist gleich dem Produkt aus dem Radius $OM = l$ und der Winkelgeschwindigkeit des Pendels. Die Winkelgeschwindigkeit ist aber gleich der Ableitung des Drehwinkels φ nach der Zeit. Somit ist $\mathfrak{v} = l\dot{\varphi}$ und folglich

$$l_z = m\,l^2\,\dot{\varphi}\,.$$

Andererseits gilt:

$$M_{1z} = -P\,l \sin\varphi, \qquad M_{2z} = 0.$$

Setzen wir die Werte der Momente l_z, M_{1z}, M_{2z} in die Gl. (1) ein, so erhalten wir

$$m l^2 \ddot{\varphi} = -\,P\,l \sin\varphi.$$

Wenn wir das rechts stehende Glied nach links überführen und die Gleichung durch ml^2 dividieren, folgt endgültig:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0. \tag{2}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Schwingung eines mathematischen Pendels. Würden wir diese Gleichung integrieren, d. h., würden wir den Winkel φ als Zeitfunktion bestimmen, so würden wir die Schwingungsart des Pendels finden. Die Gl. (2) kann jedoch nicht mit Hilfe der elementaren Funktionen integriert werden, ihre Integration erfordert die Anwendung von elliptischen Funktionen, die zu der Ordnung der höheren transzendenten Funktionen gehören. In Anbetracht dessen werden wir uns hier nicht mit dieser Frage befassen.

In einem Spezialfall kann die Differentialgleichung der Schwingung des mathematischen Pendels annähernd mit Hilfe von Elementarfunktionen integriert werden: Das ist der Fall bei *kleinen Schwingungsamplituden* des Pendels. Wir wollen voraussetzen, daß das Pendel schwingt, indem es nur unbedeutend aus seiner vertikalen Gleichgewichtslage ausgelenkt wird. In einem solchen Fall wird der Winkel φ während der ganzen Zeit ein kleiner Winkel bleiben. Für den kleinen Winkel φ aber können wir annähernd $\sin\varphi = \varphi$ setzen. Auf diese Art erhalten wir für den Fall der kleinen Schwingungsausschläge des Pendels die angenäherte Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe von Elementarfunktionen integriert werden, wie das im folgenden Kapitel gezeigt werden wird.

KAPITEL VII

DIE SCHWINGUNG EINES MATERIELLEN PUNKTES

§ 31. Die harmonische Schwingung

Nachdem wir in den vorhergehenden Kapiteln die allgemeinen Gesetze der Bewegung eines materiellen Punktes kennengelernt haben, wenden wir uns nun dem ausführlichen Studium einer Spezialaufgabe zu, nämlich der Aufgabe der Schwingung eines materiellen Punktes. Schwingungen begegnen wir sehr häufig auf verschiedenen Gebieten der Technik. Alle Werkstoffe (Metall, Stein, Holz usw.) irgendeiner

Anlage oder Maschine sind mehr oder weniger elastisch und sind daher imstande, zu schwingen. Unter gewissen Bedingungen können diese Schwingungen Ausmaße annehmen, die für die Dauerfestigkeit der Anlage gefährlich oder für das richtige Funktionieren der Maschine schädlich sind. Eine der Aufgaben, die sich der Techniker beim Studium der Theorie der Schwingungen stellt, ist die Ermittlung dieser Bedingungen und die Feststellung, auf welche Art die unvermeidlichen Schwingungen der Teile einer Anlage oder Maschine in den zulässigen Grenzen gehalten werden können.

In den Fällen, von denen hier die Rede ist, haben wir es natürlich nicht mit den Schwingungen eines materiellen Punktes zu tun, sondern mit Schwingungen von mehr oder weniger komplizierten Systemen. Es ist jedoch am bequemsten, die Grundzüge der Erscheinung am Beispiel der Schwingung eines materiellen Punktes kennenzulernen. Man muß auch im Auge behalten, daß viele praktisch wichtige Fälle unmittelbar auf die Aufgabe der Schwingungen eines materiellen Punktes zurückgeführt werden können. In Anbetracht dessen werden wir in diesem Kapitel recht ausführlich auf die Theorie der Schwingungen eines materiellen Punktes eingehen.

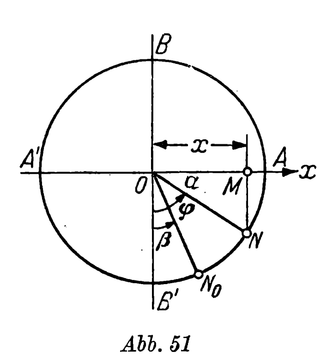


Abb. 51

Der einfachste und wichtigste Schwingungstyp ist die sogenannte *harmonische Schwingung*. Bevor wir uns der Darlegung der dynamischen Schwingungstheorie eines materiellen Punktes zuwenden, wollen wir in diesem Paragraphen einige kinematische Eigenschaften der harmonischen Schwingung betrachten.

Wir wollen uns einen Kreis vom Radius a vorstellen (Abb. 51) und ziehen durch das Zentrum O dieses Kreises zwei zueinander senkrechte Durchmesser $A'A$ und $B'B$ sowie den Radius ON und fällen von dem Punkte N aus das Lot NM auf die Gerade $A'A$. Wir stellen uns vor, daß sich der Radius ON gleichförmig um den Punkt O mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit K dreht. Dann wird sich der Punkt M längs der Geraden $A'A$ bewegen, und zwar führt er um den Punkt O herum Schwingungen aus. Diese Bewegung des Punktes M wird harmonische Schwingung genannt.

Wir wollen jetzt die *Gleichung der harmonischen Schwingung* aufstellen.

Wir wählen die Gerade $A'A$ als x-Achse und als ihren Ursprung den Punkt O; in diesem Falle ist $OM = x$. Die Koordinate x soll als Funktion der Zeit t ausgedrückt werden.

Wir bezeichnen den Winkel, der durch den sich drehenden Radius ON mit dem festen Radius OB' gebildet wird, mit φ, legen die Lage ON_0 des Radius ON zur Zeit $t = 0$ fest und bezeichnen $\sphericalangle B'ON_0$ mit β. Dann gilt:

$$\varphi = kt + \beta .$$

Andererseits ergibt sich aus dem Dreieck ONM

$$x = a \sin \varphi .$$

Setzen wir hier den Wert für φ ein, so erhalten wir:

$$x = a \sin(kt + \beta).$$

Das ist die Gleichung der harmonischen Schwingung.

Die Konstante a ist die Größe der größten Abweichung des Punktes M von seiner mittleren Lage O. Diese Größe heißt die *Amplitude* der Schwingungen des Punktes M. Wir bemerken, daß die Amplitude stets eine positive Größe ist.

Der Winkel $\varphi = kt + \beta$ heißt *Phase* der Schwingungen des Punktes M. Der Winkel β (d. h. der Wert der Phase φ für $t = 0$) heißt die Anfangsphase.

Die Konstante k heißt die *Kreisfrequenz* der Schwingungen. Die Schwingungsdauer T ist die Zeit, während der der Punkt M zwei Schwingungsbogen ausführt. Wir finden die Schwingungsdauer des Punktes M, wenn wir bemerken, daß der sich drehende Radius ON in der Zeit T eine volle Umdrehung ausführt, d. h., sich um den Winkel 2π dreht. Da sich der Radius ON gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit k dreht, erhalten wir

$$kT = 2\pi$$

und daraus

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Die Anzahl der Schwingungen des Punktes M in einer Sekunde oder die Frequenz der Schwingungen ist gleich

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}.$$

Daraus ist zu ersehen, daß die Kreisfrequenz k gleich der Schwingungszahl multipliziert mit 2π ist. Im weiteren werden wir der Kürze halber die Kreisfrequenz einfach Frequenz nennen.

§ 32. Die freien Schwingungen eines materiellen Punktes

Wir wollen uns einen materiellen Punkt M vorstellen (Abb. 52), der sich geradlinig unter der Einwirkung einer Kraft $\mathfrak{F}$ bewegt, die den Punkt M an das feste Zentrum O heranzieht, das auf der geradlinigen Bewegungsbahn des Punktes M liegt. Die Größe der Kraft $\mathfrak{F}$ sei proportional dem Abstand des Punktes M vom Zentrum O, so daß

$$F = c \cdot OM$$

ist, wobei c ein konstanter Koeffizient ist.

Abb. 52

Fällt der materielle Punkt M mit dem Punkt O zusammen, so verschwindet die Kraft $\mathfrak{F}$. Folglich ist der Punkt O die Gleichgewichtslage des materiellen Punktes M. Wenn der Punkt M aus der Gleichgewichtslage O gebracht ist, wirkt auf ihn die Kraft $\mathfrak{F}$, die bestrebt ist, den Punkt M in die Gleichgewichtslage zurückzuführen, das Gleichgewicht wiederherzustellen. Wir wollen vereinbaren, die Kraft $\mathfrak{F}$ der Kürze halber die *Rückstellkraft* zu nennen.

Wir wollen uns vorstellen, daß der materielle Punkt M aus der Gleichgewichtslage O gebracht und darauf sich selbst überlassen ist, d. h. der Wirkung der Rückstellkraft $\mathfrak{F}$ überlassen ist, und untersuchen, wie die Bewegung des Punktes M sein wird. Nehmen wir an, daß der Punkt M nach rechts aus der Gleichgewichtslage O gelenkt ist. Unter der Einwirkung der nach links gerichteten Kraft $\mathfrak{F}$ beginnt der Punkt M sich nach links zu bewegen. Hat der Punkt M die Gleichgewichtslage O erreicht, so bleibt er hier nicht stehen; denn er besitzt eine gewisse Geschwindigkeit und bewegt sich weiter nach links. Da aber die Kraft $\mathfrak{F}$ nun schon nach rechts gerichtet ist, verlangsamt sich unter der Einwirkung dieser Kraft die Bewegung des Punktes M. In einem gewissen Augenblick wird seine Geschwindigkeit zu Null, und danach fängt der Punkt M an, sich nach rechts zu bewegen. Beim Erreichen der Gleichgewichtslage O bleibt der Punkt M wiederum nicht stehen, er setzt seine Bahn fort, bis seine Geschwindigkeit unter der Einwirkung der wieder nach links gerichteten Kraft $\mathfrak{F}$ verschwindet. Darauf wiederholt sich der ganze beschriebene Prozeß von Anfang an. Wir sehen, daß unter der Einwirkung der Rückstellkraft $\mathfrak{F}$ der materielle Punkt M eine Bewegung von schwingendem Charakter um die Gleichgewichtslage O ausführt. Diese unter der Einwirkung der Rückstellkraft ausgeführten Schwingungen nennt man *freie Schwingungen des materiellen Punktes.*

Wir wenden bei der Untersuchung dieser freien Schwingungen die Integrationsmethode für die Differentialgleichung der Bewegung eines materiellen Punktes an.

Wir wählen die geradlinige Bewegungsbahn des Punktes M als x-Achse und legen als Koordinatenursprung die Gleichgewichtslage O fest, so daß $OM = x$ ist. Die Differentialgleichung der Bewegung des Punktes M lautet dann:

$$m\ddot{x} = -F.$$

Es ist aber $F = cx$, folglich ist

$$m\ddot{x} = -cx.$$

Wir bringen das im rechten Teil der Gleichung stehende Glied nach links hinüber und dividieren die Gleichung durch m. Führen wir die Bezeichnung

$$\frac{c}{m} = k^2$$

ein, so erhalten wir:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \tag{1}$$

Das ist die *Differentialgleichung der freien Schwingung* des materiellen Punktes. Wir wenden uns ihrer Integration zu.

Wir haben eine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten gewonnen. Die Integrationsmethode für eine solche Gleichung ist aus dem Lehrgang der Integration von Differentialgleichungen bekannt.

Die charakteristische Gleichung

$$z^2 + k^2 = 0$$

hat die beiden Wurzeln $z_1 = +ik$, $z_2 = -ik$. Folglich ist die allgemeine Lösung der Gl. (1)

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{2}$$

wobei C_1 und C_2 die Integrationskonstanten sind.

Um uns klarzumachen, welche Bewegung die gewonnene Gl. (2) ausdrückt, wollen wir dieser Gleichung eine andere Form geben. Wir führen an Stelle der Konstanten C_1 und C_2 zwei neue willkürliche Konstanten a und β ein, indem wir

$$C_1 = a \sin\beta, \qquad C_2 = a\cos\beta$$

setzen.

Setzen wir die Werte für C_1 und C_2 in Gl. (2) ein, so erhalten wir

$$x = a\sin(kt + \beta). \tag{3}$$

Das ist die Gleichung der harmonischen Schwingungen. *Die freien Schwingungen des materiellen Punktes, die unter der Einwirkung einer Rückstellkraft ausgeführt werden, sind also harmonische Schwingungen*[1].

Die *Amplitude* a und die *Anfangsphase* β dieser Schwingungen werden als willkürliche Konstanten *aus den Anfangsbedingungen bestimmt.* Wir nehmen an, daß zur Zeit $t = 0$ die Koordinate x und ihre Ableitung $\dot{x}$ die Werte x_0 und $\dot{x}_0$ haben. Damit sind die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes M bestimmt. Durch Differentiation der Gl. (3) erhalten wir:

$$\dot{x} = ak\cos(kt + \beta).$$

Mit $t = 0$ in der soeben gewonnenen Gleichung und der Gl. (3) ergibt sich:

$$x_0 = a\sin\beta, \qquad \dot{x}_0 = ak\cos\beta.$$

Daraus folgt:

$$a = +\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}.$$

Die Anfangsphase β wird eindeutig durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{k x_0}{\dot{x}_0}$$

und die Vorzeichen von $\sin\beta$ und $\cos\beta$ bestimmt.

Es ist sehr wichtig, festzustellen, daß die *Frequenz k und* folglich auch die *Schwingungsdauer T der freien Schwingungen nicht von den Anfangsbedingungen abhängen.* Die Frequenz hat den Wert

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

während die Schwingungsdauer nach

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

bestimmt wird.

---

[1] Wir erinnern daran, daß wir die Größe der Rückstellkraft $\mathfrak{F}$ als proportional dem Abstand OM voraussetzten. Bei einer anderen Abhängigkeit zwischen der Rückstellkraft und dem Abstand OM wären die freien Schwingungen nicht harmonisch.

Wie ersichtlich, hängen die Frequenz und die Schwingungsdauer der freien Schwingungen nur von der Masse des materiellen Punktes und vom Koeffizienten c der Rückstellkraft ab. Die Schwingungsdauer vergrößert sich bei Vergrößerung der Masse und verringert sich bei Vergrößerung des Koeffizienten c.

§ 33. Beispiele für freie Schwingungen

Bei der Untersuchung von freien Schwingungen wird die Aufgabe gewöhnlich auf die Errechnung der Frequenz oder der Schwingungsdauer dieser Schwingungen zurückgeführt. Bei einer solchen Aufgabenstellung erfordert die Lösung nur die Aufstellung der Differentialgleichung der Bewegung eines materiellen Punktes und ihre Überführung in die Form

$$\ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Hieraus findet man unmittelbar die Frequenz k, während sich die Schwingungsdauer nach der Gleichung

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

errechnet.

Abb. 53

Beispiel 10. Die Masse M vom Gewicht P ist mit einer elastischen Schraubenfeder an dem festen Punkt A aufgehängt (Abb. 53).

Wenn sich die Masse in Ruhe befindet, ist die Verlängerung der Feder gleich f. Es soll die Schwingungsdauer der Schwingungen der Masse bei kleinen Ausschlägen aus der Gleichgewichtslage ermittelt werden.

Wir nehmen an, daß der Abschnitt AB (Abb. 53) die Länge der nicht gedehnten Feder darstellt und daß der Punkt O die Gleichgewichtslage der an der Feder hängenden Masse M ist, so daß $BO = f$ ist. Wir stellen uns vor, daß die Masse M aus der Gleichgewichtslage gebracht und sich dann selbst überlassen wird. Unter der Einwirkung der elastischen Reaktion der Feder wird sie Schwingungen um die Gleichgewichtslage ausführen, deren Differentialgleichung wir aufstellen wollen.

Wir wählen die vertikale geradlinige Bewegungsbahn des Punktes M als x-Achse und legen als Koordinatenursprung die Gleichgewichtslage O fest (es ist bei der Aufstellung der Differentialgleichung der freien Schwingungen immer zweckmäßig, den Koordinatenursprung in die Gleichgewichtslage zu legen). In diesem Falle ist $OM = x$. Auf die Masse M wirken zwei Kräfte: die Schwerkraft $\mathfrak{P}$ und die elastische Reaktion $\mathfrak{F}$. Die Differentialgleichung der Bewegung der Masse M ist

$$m\ddot{x} = P - F.$$

Die Größe der elastischen Reaktion der Feder F ist proportional der Verlängerung der Feder BM, so daß

$$F = c \cdot BM$$

ist, wobei c ein konstanter Koeffizient ist.

Wenn wir diesen Ausdruck in die vorhergehende Gleichung einsetzen und beachten, daß $BM = f + x$ ist, erhalten wir

$$m\ddot{x} = P - c(f + x).$$

Der Koeffizient c im Ausdruck der elastischen Reaktion der Feder läßt sich leicht bestimmen, wenn das Gewicht der Masse P und die Verlängerung f der Feder bekannt sind, die der Gleichgewichtslage der Masse entsprechen (wir werden diese Verlängerung f die statische Verlängerung nennen).

Wenn die Masse M sich in der Gleichgewichtslage O befindet, müssen die angreifenden Kräfte P und F sich gegenseitig aufheben, d. h., sie müssen der Größe nach gleich sein. Da die Verlängerung der Feder in diesem Fall $BO = f$ ist, hat die elastische Reaktion der Feder in der Gleichgewichtslage den Wert $F = cf$, und die Gleichgewichtsbedingung der Masse nimmt die Form

$$P = cf$$

an, woraus wir

$$c = \frac{P}{f}$$

finden.

Setzen wir diesen Wert c in die Differentialgleichung der Bewegung der Masse M ein, so erhalten wir:

$$m\ddot{x} = P - \frac{P}{f}(f + x) = -\frac{P}{f}x.$$

Bringen wir das auf der linken Seite der Gleichung stehende Glied nach rechts hinüber und dividieren die Gleichung durch m, so finden wir

$$\ddot{x} + \frac{g}{f}x = 0.$$

Wir haben damit eine Gleichung von der Form erhalten, die im vorhergehenden Paragraphen betrachtet wurde. Hieraus schließen wir, daß die Schwingungen der Masse M harmonische Schwingungen sind. Die Frequenz k dieser Schwingungen hat den Wert

$$k = \sqrt{\frac{g}{f}},$$

während die Schwingungsdauer T durch

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{f}{g}}$$

bestimmt wird.

Wenn z. B. $f = 5$ cm ist, dann ist

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5}{981}} = 0{,}449\ \text{s}.$$

Die von uns gegebene Gleichung für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{f}{g}}$$

hat nicht nur für das gegebene Beispiel eine Bedeutung. Sie ist auch in allen den Fällen anwendbar, wo die durch eine elastische Verbindung gehaltene Masse Schwingungen um ihre Gleichgewichtslage herum ausführt. Der Buchstabe f bezeichnet dabei die statische Deformation, die der Gleichgewichtslage entspricht.

Wenn z. B. die statische Durchbiegung von Waggonfedern $f = 5$ cm beträgt, dann ist die Schwingungsdauer des Waggonkastens auf den Federn[1] gleich

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{5}{981}} = 0{,}449\ \mathrm{s}.$$

Wenn die auf einem Träger liegende Masse eine statische Durchbiegung des Trägers $f =$ 1 mm hervorruft, dann ist die Schwingungsdauer des mit dieser Masse belasteten Trägers gleich

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0{,}1}{981}} = 0{,}0634\ \mathrm{s}.$$

Wir erhalten dieses Resultat, indem wir die auf dem Träger liegende Masse als einen materiellen Punkt betrachten und die Masse des Trägers selbst vernachlässigen. Im Abschnitt II des Lehrbuches wird gezeigt werden, auf welche Art man den Einfluß der Masse des Trägers auf die Schwingungsdauer berücksichtigen kann.

Beispiel 11. Schwingungen eines mathematischen Pendels bei kleinen Ausschlägen.

Im § 30 wurde die annähernde Differentialgleichung des mathematischen Pendels für kleine Ausschläge aufgestellt:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0,$$

wobei φ der Abweichungswinkel des Pendels von der vertikalen Gleichgewichtslage und l die Länge des Pendels ist. Wie wir sehen, haben wir es hier mit einer Gleichung von derselben Form wie bei der Gleichung der freien Schwingungen zu tun, die wir im vorhergehenden Paragraphen integrierten. Wir schließen daraus, daß die Schwingungen des mathematischen Pendels für kleine Ausschläge harmonische Schwingungen sind, daß $\frac{g}{l}$ das Quadrat ihrer Frequenz ist und daß die Schwingungsdauer T dieser Schwingungen durch die Gleichung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1}$$

bestimmt wird.

Die Differentialgleichung ist unter der Voraussetzung aufgestellt, daß die Schwingungsausschläge des Pendels äußerst klein sind. Es zeigt sich jedoch, daß durch die Gl. (1) die Schwingungsdauer des Pendels auch in den Fällen hinreichend genau bestimmt wird, in denen die Amplitude seiner Schwingungen nicht sehr klein ist. Wenn die Schwingungsamplitude des Pendels nicht klein ist, dann werden seine Schwingungen durch die Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

bestimmt (siehe § 30).

[1] Wir betrachten hier senkrechte Schwingungen des Waggonkastens ohne Rotation. Der Waggonkasten kann auch Schwingungen rotierenden Charakters ausführen. Die Bestimmung der Periode solcher Schwingungen erfordert Erwägungen, die zur Dynamik des mechanischen Systems gehören.

Die Integration dieser Gleichung führt zu der folgenden genauen Formel für die Schwingungsdauer des Pendels:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u}}, \tag{2}$$

wobei α der größte Ausschlagswinkel des Pendels aus der Vertikalen, d. h. seine Schwingungsamplitude ist. Wir bemerken, daß wir im Fall eines kleinen α die Größe $\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u$ unter dem Integralzeichen in der Gl. (2) vernachlässigen können. Das Integral geht dann in $\frac{\pi}{2}$ über, und wir kehren zu der annähernden Gl. (1) zurück.

Das in der Gl. (2) enthaltene Integral ist ein elliptisches Integral erster Gattung. Wenn man dieses Integral mit Hilfe der vorhandenen Tabellen[1] errechnet, kann man sich leicht überzeugen, daß für eine 30° nicht übersteigende Amplitude α der nach der annähernden Gl. (1) ermittelte Wert der Schwingungsdauer sich von dem nach der genauen Gl. (2) errechneten um nicht mehr als 2 % unterscheidet. Für Amplituden α, die 10° nicht übersteigen, überschreitet der Fehler der annähernden Gl. (1) nicht 0,2 %.

§ 34. Das stabile und das labile Gleichgewicht. Das astatische Pendel

Wir wollen uns einen materiellen Punkt M vorstellen, der sich unter der Wirkung der angreifenden Kräfte im Gleichgewicht befindet. Das Gleichgewicht des Punktes M heißt *stabil*, wenn bei einer genügend kleinen Abweichung des Punktes M von der Gleichgewichtslage die angreifenden Kräfte bestrebt sind, den Punkt in die Gleichgewichtslage zurückzuführen. Wenn aber bei einer beliebig kleinen Abweichung des Punktes M von der Gleichgewichtslage die angreifenden Kräfte bestrebt sind, ihn von dieser Lage zu entfernen, dann heißt das Gleichgewicht des Punktes M *labil*.

Im § 32 haben wir angenommen, daß, wenn der Punkt M aus der Gleichgewichtslage O gebracht ist, auf denselben die Rückstellkraft $\mathfrak{F}$ wirkt, die bestrebt ist, den Punkt M in die Gleichgewichtslage O zurückzubringen. Folglich war die Gleichgewichtslage O in diesem Fall die Lage des stabilen Gleichgewichts. Wir haben gesehen, daß der materielle Punkt, nachdem er aus der stabilen Gleichgewichtslage gebracht und der Wirkung der Rückstellkraft überlassen war, eine schwingende Bewegung um die Gleichgewichtslage herum ausführt. Wenn man aber den materiellen Punkt aus der labilen Gleichgewichtslage bringt und der Einwirkung der angreifenden Kräfte überläßt, wird der materielle Punkt sich so bewegen, daß er sich immer mehr von der Gleichgewichtslage entfernt.

Hieraus folgt, daß man den Charakter des Gleichgewichts nach dem Charakter der Bewegung beurteilen kann, die der materielle Punkt ausführt, wenn er aus der Gleichgewichtslage gebracht ist. Wenn diese Bewegung eine schwingende ist, haben

[1] Die Tabellen der elliptischen Integrale befinden sich in der Tabellensammlung von E. Jahnke und F. Emde: „Tafeln höherer Funktionen", Leipzig 1948, und in anderen Nachschlagewerken.

wir es mit dem stabilen Gleichgewicht zu tun, wenn aber der aus der Gleichgewichtslage gebrachte materielle Punkt sich so bewegt, daß er sich von dieser Lage entfernt, dann ist das untersuchte Gleichgewicht labil.

Wir wollen die Bewegung des aus der *labilen* Gleichgewichtslage gebrachten materiellen Punktes etwas näher betrachten.

Wir setzen voraus, daß auf den materiellen Punkt M (Abb. 54) die Kraft $\mathfrak{F}_1$ einwirkt, die den Punkt M vom festen Zentrum O abstößt und die der Größe nach proportional dem Abstand des Punktes M vom Zentrum O ist, so daß

$$F_1 = c_1 \cdot \overline{OM}$$

ist, wobei c_1 ein konstanter Koeffizient ist.

Wenn der Punkt M sich in der Lage O befindet, ist die Kraft $\mathfrak{F}_1$ gleich Null Folglich ist der Punkt O die Gleichgewichtslage des materiellen Punktes M. Wenn der Punkt M aus der Gleichgewichtslage O gebracht ist, dann ist die Kraft $\mathfrak{F}_1$ bestrebt, ihn von dieser Lage weiter zu entfernen. Folglich haben wir hier einen Fall des labilen Gleichgewichtes.

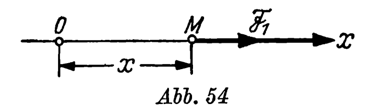


Abb. 54

Wir stellen uns vor, daß der materielle Punkt M aus der Gleichgewichtslage O gebracht und der Wirkung der Kraft $\mathfrak{F}_1$ überlassen ist. Wir setzen voraus, daß sich der Punkt M unter der Einwirkung dieser Kraft geradlinig bewegt (auf der Geraden, die durch den Punkt O geht) und stellen die Differentialgleichung dieser geradlinigen Bewegung auf.

Wir wählen die geradlinige Bewegungsbahn des Punktes M als x-Achse und legen den Koordinatenursprung in die Gleichgewichtslage O, so daß $OM = x$ ist. Damit ergibt sich die Differentialgleichung der Bewegung

$$m\ddot{x} = F_1$$

oder, wenn wir $F_1 = c_1 \cdot \overline{OM} = c_1 x$ annehmen,

$$m\ddot{x} = c_1 x .$$

Wir übertragen das Glied $c_1 x$ auf die linke Seite der Gleichung und dividieren durch m. Führen wir die Bezeichnung

$$\frac{c_1}{m} = k_1^2$$

ein, so erhalten wir

$$\ddot{x} - k_1^2 x = 0. \tag{1}$$

Das ist eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die ihr entsprechende charakteristische Gleichung lautet

$$z^2 - k_1^2 = 0,$$

sie hat die Wurzeln $z_1 = +k_1$, $z_2 = -k_1$.

Folglich ist die allgemeine Lösung der Gleichung (1)

$$x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{-k_1 t},$$

wobei C_1 und C_2 willkürliche Konstanten sind.

Im gewonnenen Ausdruck nähert sich das zweite Glied, das den Faktor $e^{-k_1 t}$ enthält, mit anwachsendem t dem Wert Null, das erste Glied aber vergrößert sich im Laufe der Zeit unbegrenzt. Folglich wächst auch die Koordinate x im Laufe der Zeit unbegrenzt. Der Punkt M entfernt sich unbegrenzt aus seiner Gleichgewichtslage.

Wenn wir die Gleichung (1) mit der Differentialgleichung der freien Schwingungen

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

vergleichen, die im § 32 aufgestellt wurde, bemerken wir, daß diese Gleichungen sich nur durch das Vorzeichen des Koeffizienten von x unterscheiden. Daraus geht folgendes Verfahren zur Lösung der Frage nach dem Charakter des Gleichgewichtes eines materiellen Punktes hervor:

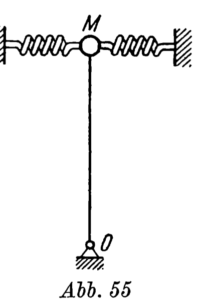


Abb. 55

Um zu untersuchen, ob das Gleichgewicht des materiellen Punktes stabil ist oder nicht, stellen wir uns vor, daß der materielle Punkt aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist, und stellen die Differentialgleichung der Bewegung des gegebenen Punktes auf. Wenn diese Gleichung die Form

$$\ddot{x} + b x = 0$$

hat, wobei x die von der Gleichgewichtslage aus zählende Koordinate und b ein konstanter Koeffizient ist, dann wird durch das Vorzeichen des Koeffizienten b die Antwort auf die gestellte Frage bestimmt. Wenn $b > 0$ ist, haben wir es mit dem stabilen Gleichgewicht zu tun. Zugleich bestimmt die Größe b das Quadrat der Schwingungsfrequenz in der Nähe der Gleichgewichtslage. Ist aber $b < 0$, so ist das untersuchte Gleichgewicht labil.

Wir wollen die geäußerte Erwägung auf den Fall des sogenannten *astatischen Pendels* anwenden. Das gewöhnliche Pendel, das aus der schweren Masse M vom Gewicht P und dem Stabe OM von der Länge l besteht und die feste Drehachse O besitzt, ist umgekehrt aufgestellt und wird in dieser Stellung von zwei gleichen Federn gehalten, deren äußere Enden unbeweglich befestigt sind (Abb. 55); ein Pendel dieser Konstruktion heißt ein astatisches Pendel. Es soll die Stabilitätsbedingung der vertikalen Gleichgewichtslage des Pendels klargestellt und die Schwingungsdauer bei kleinen Ausschlägen in der Nähe der Gleichgewichtslage bestimmt werden.

Wir stellen uns vor, daß das Pendel aus der vertikalen Gleichgewichtslage um einen kleinen Winkel ausgelenkt wird und dann sich selbst überlassen ist. Wir wollen seine Bewegung untersuchen und werden dabei voraussetzen, daß der durch den Stab OM und die Vertikale gebildete Winkel während der ganzen Zeit der Bewegung klein bleibt. Natürlich wird sich dieser Winkel im Laufe der Zeit vergrößern, wenn die vertikale Gleichgewichtslage des Pendels labil ist. In jedem Fall bleiben die weiteren Berechnungen richtig, solange der erwähnte Winkel klein bleibt.

In der Abb. 56 ist das Pendel in einem gewissen Augenblick während seiner Bewegung dargestellt. Wir bezeichnen den durch den Stab OM mit der Vertikalen gebildeten variablen Winkel mit φ und stellen uns ihn klein vor. Der Körper M, den wir als materiellen Punkt betrachten (die Masse des Stabes OM vernachlässigen wir), wird durch die Schwerkraft $\mathfrak{P}$ und die Resultierende $\mathfrak{F}$ der elastischen Reaktionen der beiden Federn beansprucht, von denen die eine zusammengedrückt, die andere gedehnt ist. Zum Aufstellen der Differentialgleichung der Bewegung des Pendels benutzen wir den Momentensatz, indem wir die Momente auf die Drehachse O beziehen. Die Geschwindigkeit des Punktes M ist gleich $l\dot{\varphi}$, seine Bewegungsgröße $ml\dot{\varphi}$; das Moment der Bewegungsgröße in bezug auf die Achse O ist gleich $ml^2\dot{\varphi}$. Die Momente der Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ in bezug auf dieselbe Achse (bei einem kleinen Winkel φ) sind gleich $Pl\varphi$ und $-Fl$. Nach dem Momentensatz erhalten wir

$$m l^2 \ddot{\varphi} = P l \varphi - F l.$$

Abb. 56

Die Abweichung des Punktes M von der Gleichgewichtslage ist gleich $l\varphi$. Diese Abweichung ist gleich der Verkürzung der einen Feder und der Verlängerung der anderen. Die elastische Reaktion der Feder ist proportional der Verkürzung oder der Verlängerung der Feder, d. h., sie ist gleich $cl\varphi$, wobei c ein konstanter Koeffizient ist. Da die Reaktionen beider Federn nach einer Seite gerichtet sind, ist die Resultierende $\mathfrak{F}$ dieser Reaktion der Größe nach

$$F = 2 c l \varphi .$$

Setzen wir diese Größe F in die vorhergehende Gleichung ein, so erhalten wir:

$$m l^2 \ddot{\varphi} = P l \varphi - 2 c l^2 \varphi .$$

Bringen wir alle Glieder auf die linke Seite der Gleichung und dividieren die Gleichung durch ml^2, so finden wir:

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{2c}{m} - \frac{g}{l}\right)\varphi = 0 .$$

Hieraus schließen wir, daß die vertikale Gleichgewichtslage des Pendels stabil ist, wenn

$$\frac{2c}{m} - \frac{g}{l} > 0$$

oder

$$c > \frac{P}{2l}$$

ist[1].

Durch diese Bedingung werden die Abmessungen und die Konstante der Federn bestimmt, die zur Gewährleistung der Stabilität des Pendels notwendig sind. Wenn

[1] Anm. der deutschen Redaktion: Im deutschen Sprachgebrauch benutzt man „astatisches Pendel" nur für den Grenzfall $c = \frac{P}{2l}$.

wir diese Bedingung als erfüllt voraussetzen, gilt für die Schwingungsdauer des Pendels bei kleinen Schwingungsamplituden die Gleichung

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2c}{m} - \frac{g}{l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m\,l}{2\,c\,l - P}}.$$

Bei entsprechender Wahl des Koeffizienten c können wir die Schwingungsdauer T beliebig groß machen.

Dieser Eigenschaft des astatischen Pendels bedient man sich in der Seismometrie (WIECHERT-Pendel), worüber ausführlicher im § 41 berichtet wird.

§ 35. Die erzwungenen Schwingungen eines materiellen Punktes. Die Resonanz

Wir haben gesehen, daß freie Schwingungen eines materiellen Punktes dann stattfinden, wenn auf den materiellen Punkt, nachdem er durch irgendeine äußere Ursache aus der stabilen Gleichgewichtslage gebracht ist, eine Rückstellkraft einwirkt.

Wenn die das Gleichgewicht störende Ursache während der ganzen Zeit der Bewegung des materiellen Punktes nicht aufhört zu wirken, haben wir es mit *erzwungenen Schwingungen* des materiellen Punktes zu tun.

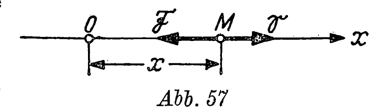


Abb. 57

Wir stellen uns den materiellen Punkt M vor (Abb. 57), der eine geradlinige Bewegung unter der Einwirkung zweier angreifender Kräfte ausführt: der Rückstellkraft $\mathfrak{F}$, deren Größe $F = c \cdot \overline{OM}$ ist und die nach der Gleichgewichtslage O hin gerichtet ist, und der Kraft $\mathfrak{S}$, welche die Größe und die Richtung periodisch verändert, indem sie den Punkt M bald nach der einen, bald nach der anderen Seite bewegt. Diese Kraft $\mathfrak{S}$, die ununterbrochen das Gleichgewicht des Punktes M stört, werden wir der Kürze halber die Erregerkraft[1] nennen.

Wir wählen die geradlinige Bewegungsbahn des Punktes M als x-Achse und legen den Koordinatenursprung in die Gleichgewichtslage O, so daß $OM = x$ ist.

Die Größe und die Richtung der Rückstellkraft $\mathfrak{F}$ hängen von der Lage des Punktes M ab. Die Größe und die Richtung der Erregerkraft $\mathfrak{S}$ setzen wir als unabhängig von der Lage des Punktes M voraus. Die Kraft $\mathfrak{S}$ verändert im Laufe der Zeit periodisch ihre Größe und ihre Richtung nach einem im voraus gegebenen Gesetz. Dieses Gesetz der Veränderung der Kraft $\mathfrak{S}$ kann sehr verschiedenartig sein. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung des einfachsten Falles: Wir setzen voraus, daß sich die Kraft $\mathfrak{S}$ im Laufe der Zeit nach der einfachsten periodischen Funktion verändert, und zwar nach der Sinusfunktion, so daß die Projektion der Kraft $\mathfrak{S}$ auf die x-Achse gleich

$$S = H \sin(p\,t + \delta) \tag{1}$$

ist.

[1] Deutscher Ausdruck auch „*Störkraft*" (Anmerkung der deutschen Redaktion).

Hierin sind H, p und δ gegebene konstante Größen. Wir werden $H > 0$ annehmen. Es ist klar, daß H der Maximalwert der Kraft $\mathfrak{S}$ ist. Der Betrag der Kraft $\mathfrak{S}$ verändert sich gemäß der Gl. (1) in den Grenzen von $-H$ bis $+H$. Die Größe $pt + \delta$ kann als Phase der veränderlichen Kraft $\mathfrak{S}$ bezeichnet werden; δ ist die Anfangsphase. Die Konstante p werden wir die Kreisfrequenz der veränderlichen Kraft $\mathfrak{S}$ nennen; die Schwingungsdauer τ dieser Veränderung ist

$$\tau = \frac{2\pi}{p}.$$

Wir wollen die durch den materiellen Punkt M ausgeführte Bewegung bei gleichzeitigem Wirken der Rückstellkraft $\mathfrak{F}$ und der Erregerkraft $\mathfrak{S}$ untersuchen.

Es gilt die Differentialgleichung der Bewegung

$$m\ddot{x} = -F + S$$

oder, wenn wir die Werte für F und S substituieren,

$$m\ddot{x} = -cx + H\sin(pt + \delta).$$

Wir bringen das Glied cx auf die linke Seite der Gleichung und dividieren die Gleichung durch m. Führen wir die Bezeichnungen

$$\frac{c}{m} = k^2, \qquad \frac{H}{m} = h$$

ein (wobei wir bemerken, daß, da $H > 0$, auch $h > 0$ ist), so erhalten wir:

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin(pt + \delta). \tag{2}$$

Das ist die *Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen* eines materiellen Punktes.

Wir haben hier eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und einer Störfunktion vor uns. Es ist bekannt, daß sich die allgemeine Lösung einer solchen Gleichung zusammensetzt aus: 1. irgendeiner Partikulärlösung der gegebenen Differentialgleichung und 2. der allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung.

Der Gl. (2) entspricht die homogene Differentialgleichung

$$\ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist uns bekannt. Sie kann in der Form

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$$

oder

$$x = a\sin(kt + \beta)$$

dargestellt werden, wobei C_1 und C_2 oder a und β beliebige Konstanten sind. Die Lösung wird auf die Ermittlung irgendeiner Partikulärlösung der Gl. (2) zurückgeführt. Wir werden diese Lösung (2) in folgender Form suchen:

$$x = B \sin(p t + \delta).$$

Wir wollen sehen, ob es nicht möglich ist, die Konstante B so zu wählen, daß dieser Ausdruck die Gl. (2) befriedigt, d. h., daß sich bei seinem Einsetzen in die Gl. (2) diese in eine Identität verwandelt.

Setzen wir den obigen Ansatz anstatt x in die Gl. (2) ein, so erhalten wir

$$-B p^2 \sin(p t + \delta) + k^2 B \sin(p t + \delta) = h \sin(p t + \delta)$$

oder

$$B(k^2 - p^2) \sin(p t + \delta) = h \sin(p t + \delta).$$

Diese Gleichung verwandelt sich in eine Identität, wenn

$$B(k^2 - p^2) = h$$

ist, woraus

$$B = \frac{h}{k^2 - p^2}$$

folgt.

Somit haben wir die folgende Partikulärlösung der Gl. (2) gefunden:

$$x = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(p t + \delta). \tag{3}$$

Auf Grund des obigen Theorems aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen schließen wir, daß die allgemeine Lösung der Gl. (2) in der Form

$$x = C_1 \cos k t + C_2 \sin k t + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(p t + \delta) \tag{4}$$

oder

$$x = a \sin(k t + \beta) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(p t + \delta) \tag{5}$$

dargestellt werden kann, wobei C_1 und C_2 oder a und β beliebige Konstanten sind.

Die gewonnene Gl. (5) zeigt, daß der Punkt M eine zusammengesetzte Schwingungsbewegung ausführt, die sich aus zwei harmonischen Schwingungen zusammensetzt. Das erste Glied der rechten Seite der Gl. (5) entspricht den uns bereits bekannten freien Schwingungen des Punktes M. Die dem zweiten Gliede dieser Gleichung entsprechenden harmonischen Schwingungen heißen *erzwungene Schwingungen.*

Somit kommen wir zu dem folgenden Theorem: *Bei gleichzeitigem Wirken der Rückstell- und der erregenden Kraft führt der materielle Punkt eine zusammengesetzte Schwingungsbewegung aus, die sich durch Überlagerung von freien und erzwungenen Schwingungen darstellt.*

Die freien Schwingungen haben wir bereits im § 32 untersucht. Wir wollen nochmals bemerken, daß die Amplitude a und die Anfangsphase β dieser Schwingungen willkürliche Konstanten sind und folglich aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden können. Die Schwingungsdauer der freien Schwingungen T wird durch die Frequenz k dieser Schwingungen nach

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

berechnet.

Wir wenden uns dem erzwungenen Schwingungsanteil zu, der durch die Gleichung

$$x = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(p\,t + \delta) \tag{3}$$

dargestellt wird.

Wir bemerken zuvor, daß diese Gleichung keine willkürlichen Konstanten enthält. Daraus schließen wir, daß *der erzwungene Schwingungsanteil nicht von den Anfangsbedingungen abhängt.*

Die Frequenz dieser Schwingungen p ist gleich der Frequenz der veränderlichen Erregerkraft $\mathfrak{S}$. Folglich ist auch die *Schwingungsdauer der erzwungenen Schwingungen gleich der Schwingungsdauer der veränderlichen Erregerkraft.*

Diese ist

$$\tau = \frac{2\pi}{p}.$$

Aus Gl. (3) ist zu ersehen, daß die Amplitude der erzwungenen Schwingungen (wir bezeichnen sie mit A) bei $p < k$ den Wert

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}$$

annimmt.

Ist aber $p > k$, so sehen wir, wenn wir Gl. (3) in der Form

$$x = \frac{h}{p^2 - k^2} \sin(p\,t + \delta - \pi) \tag{6}$$

darstellen, daß in diesem Fall die Amplitude A durch

$$A = \frac{h}{p^2 - k^2}$$

ausgedrückt wird.

Wir vergleichen die Phase der erzwungenen Schwingungen mit der Phase der veränderlichen Erregerkraft. Wenn $p < k$, dann ist aus Gl. (3) zu ersehen, daß die Phase der erzwungenen Schwingungen $pt + \delta$ mit der Phase der Kraft $\mathfrak{S}$ zusammenfällt. Wenn jedoch $p > k$, dann zeigt Gl. (6), daß sich in diesem Fall die Phase der erzwungenen Schwingungen $pt + \delta - \pi$ von der Phase der Veränderungen der Kraft $\mathfrak{S}$ um die

Größe π unterscheidet. Bezeichnen wir die Differenz zwischen der Phase der erregenden Kraft und der Phase der erzwungenen Schwingungen mit ε, so erhalten wir für diese Differenz der Phasen folgende Werte:

$$\varepsilon = 0 \quad \text{bei} \quad p < k,$$
$$\varepsilon = \pi \quad \text{bei} \quad p > k.$$

Das bedeutet, daß im Fall $p < k$ die Projektion der Kraft $\mathfrak{S}$ und die Verschiebung x, die durch die Gl. (1) und Gl. (3) bestimmt werden, stets dasselbe Vorzeichen haben. Im Fall $p > k$ jedoch haben die Projektion der Kraft $\mathfrak{S}$ und die Verschiebung x immer verschiedene Vorzeichen. Mit anderen Worten, wenn $p < k$, dann ist die Verschiebung des Punktes M stets nach der Seite gerichtet, nach welcher auch die Kraft $\mathfrak{S}$ verläuft. Wenn aber $p > k$, dann ist die Richtung der Verschiebung des Punktes M stets entgegengesetzt zu der Richtung der Kraft $\mathfrak{S}$.

Wir vereinbaren, erzwungene Schwingungen, deren Frequenz p kleiner als die Frequenz k der freien Schwingungen ist, der Kürze halber „unterkritische erzwungene Schwingungen" zu nennen. Erzwungene Schwingungen mit der Frequenz p, die größer als die Frequenz k der freien Schwingungen ist, werden wir „überkritische erzwungene Schwingungen" nennen. Wenn wir diese Ausdrücke einführen, können wir die soeben festgestellte Eigenschaft der erzwungenen Schwingungen auf folgende Art formulieren: Im Falle *unterkritischer erzwungener Schwingungen* haben die erzwungenen Schwingungen und die erregende Kraft stets *gleiche Phase*, im Fall *überkritischer erzwungener Schwingungen* dagegen haben die erzwungenen Schwingungen und die erregende Kraft stets *entgegengesetzte Phase.*

Wichtig ist die Betrachtung der *Amplitude* der erzwungenen Schwingungen. Wir haben gesehen, daß sie durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{h}{k^2 - p^2} \quad \text{bei} \quad p < k, \\ A &= \frac{h}{p^2 - k^2} \quad \text{bei} \quad p > k \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

bestimmt wird.

Hieraus ist zu ersehen, daß die Amplitude A nicht nur von dem größten Werte H abhängt, den die erregende Kraft $\mathfrak{S}$ erreicht (wir wollen uns daran erinnern, daß $h = \frac{H}{m}$ ist), sondern auch *von der Frequenz p dieser Kraft.* Wir wollen untersuchen, wie sich die Amplitude A in Abhängigkeit von der Frequenz p verändert.

Wir wollen der Frequenz p verschiedene Werte von 0 bis ∞ geben. Bezeichnen wir den Wert der Amplitude A bei $p = 0$ mit A_0, so ist

$$A_0 = \frac{h}{k^2}.$$

Wir bemerken, daß die Größe A_0 nichts anderes ist, als die Auslenkung vom Punkte O, die der materielle Punkt M erhalten würde, wenn er sich im Gleichgewicht unter der Wirkung der Rückstellkraft $\mathfrak{F}$ und der konstanten Kraft befände, deren

Größe gleich H ist, d. h. gleich dem größten Werte der variablen Kraft $\mathfrak{S}$. Das Gleichgewicht der Kräfte $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{H}$ verlangt, daß $F = H$ oder $cx = H$ ist, daher gilt

$$x = \frac{H}{c} = \frac{h}{k^2} = A_0 .$$

Die erste der Gl. (7) zeigt, daß für $0 < p < k$ (d. h. im Fall [unterkritischer] erzwungener Schwingungen geringerer Frequenz) $A > A_0$ ist. Mit der Vergrößerung von p wächst die Amplitude A an. Bei $p = k$ wird die Amplitude A unendlich groß.

Bei $p > k$, also bei überkritischen erzwungenen Schwingungen, wird die Amplitude A durch die zweite der Gln. (7) ausgedrückt. Mit der Vergrößerung von p nimmt die Amplitude A ab. Bei $p = 0$ haben wir $A = A_0$. Bei $p = \infty$ verschwindet die Amplitude A. Es ist sehr wichtig, zu bemerken, daß für $p = k$ der Wert für $A = \infty$ ist. Das bedeutet, daß die Amplitude der erzwungenen Schwingungen unbegrenzt anwächst, wenn p sich dem Werte k von unten oder oben her nähert. Dieser Umstand wird so ausgedrückt, daß man bei $p = k$ von **Resonanz** spricht.

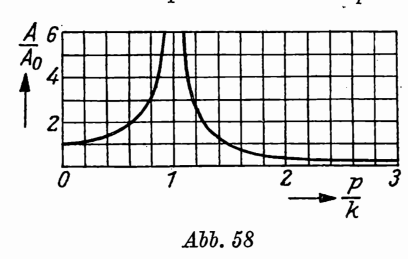


Abb. 58

In der Tabelle 2 sind die Werte der Größe $\frac{A}{A_0}$ angeführt, die verschiedenen Werten $\frac{p}{k}$ entsprechen. Die Veränderung der Amplitude A in Abhängigkeit von der Veränderung der Frequenz p ist graphisch in der Abb. 58 dargestellt; auf der horizontalen Achse sind die Werte $\frac{p}{k}$ abgetragen, auf der vertikalen Achse die entsprechenden Werte der Größe $\frac{A}{A_0}$. Die Punkte dieses Diagramms, die links von dem kritischen Werte $\frac{p}{k} = 1$ liegen, bei dem Resonanz stattfindet, entsprechen den *unterkritischen* erzwungenen Schwingungen; rechts von diesem Werte liegen die *überkritischen* erzwungenen Schwingungen.

Tabelle 2

$\frac{p}{k}$	$\frac{A}{A_0}$	$\frac{p}{k}$	$\frac{A}{A_0}$	$\frac{p}{k}$	$\frac{A}{A_0}$
0	1	0,9	5,263	1,6	0,641
0,1	1,010	0,95	10,256	1,7	0,529
0,2	1,042	1	∞	1,8	0,446
0,3	1,099	1,05	9,756	1,9	0,383
0,4	1,190	1,1	4,762	2	0,333
0,5	1,333	1,2	2,273	3	0,125
0,6	1,562	1,3	1,449	5	0,042
0,7	1,961	1,4	1,042	10	0,010
0,8	2,778	1,5	0,800	∞	0

Bei $p = k$ kann man die Differentialgleichung (2) schon nicht mehr befriedigen, wenn man

$$x = B \sin(kt + \delta)$$

setzt.

In diesem Fall muß man die Partikulärlösung der Gl. (2) in der Form

$$x = Bt \cos(kt + \delta)$$

ansetzen. Setzen wir diesen Ausdruck anstatt x in die Gl. (2) ein, so erhalten wir:

$$-2Bk \sin(kt + \delta) = h \sin(kt + \delta).$$

Daraus folgt

$$B = -\frac{h}{2k}.$$

Daher hat die allgemeine Lösung der Differentialgleichung der Bewegung folgende Form:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt - \frac{h}{2k} t \cos(kt + \delta).$$

Dem Gliede, das den Ausdruck $t \cdot \cos(kt + \delta)$ enthält, entspricht eine schwingende Bewegung mit ununterbrochen anwachsenden Ausschlägen. Die gewonnene Gleichung zeigt, daß im Resonanzfalle die Schwingungsausschläge des Punktes M unbegrenzt anwachsen.

§ 36. Der Einfluß der Dämpfung auf freie Schwingungen. Die abklingenden Schwingungen

Die in den §§ 32 und 35 dargelegte Theorie der freien und der erzwungenen Schwingungen stimmt im wesentlichen gut mit den Resultaten der Erfahrung überein. Doch erweist sich diese Theorie in zwei Beziehungen als unvollständig.

Erstens zeigt die Erfahrung, daß sich die freien Schwingungen um die stabile Gleichgewichtslage herum, die unter der Einwirkung der Rückstellkraft entstehen, nicht endlos fortsetzen, vielmehr verringert sich nach und nach die Schwingungsamplitude, die Schwingungen erlöschen allmählich. Diese Erscheinung des Erlöschens der Schwingungen ist in der im § 32 dargelegten Theorie nicht vorgesehen.

Zweitens, obgleich die Beobachtung eine sehr bedeutende Verstärkung der erzwungenen Schwingungen im Resonanzfalle bestätigt, d. h., wenn die Frequenzen der freien und der erzwungenen Schwingungen zusammenfallen, wird bei Versuchen niemals jenes unbegrenzte Anwachsen der Schwingungsausschläge beobachtet, das wir im Resonanzfalle im § 35 erhalten haben.

Die soeben angeführte Abweichung obiger zwei Punkte zwischen der Theorie und der Praxis weist darauf hin, daß wir in der dargelegten Theorie irgendeinen Faktor nicht in Betracht gezogen haben, dessen Einfluß man die festgestellten Abweichungen der gegebenen Beobachtungen von den Ergebnissen der Theorie zuschreiben muß.

Ein solcher Faktor ist die *Dämpfung der Bewegung*, die von einer Kraft herrührt, die der Bewegung entgegengesetzt gerichtet ist. Bei den beobachteten Verhältnissen der Schwingungen ist das Vorhandensein einer solchen Dämpfung unausbleiblich. Sie tritt in Form der Reibungskraft des Luftwiderstandes usw. auf. Wir wollen die oben dargelegte Theorie der Schwingungsbewegung durch die Untersuchung des Einflusses einer solchen Dämpfung vervollständigen.

In diesem Paragraphen wollen wir den Einfluß der Dämpfung auf die freien Schwingungen des materiellen Punktes untersuchen.

Wir stellen uns den materiellen Punkt M vor (Abb. 59), der eine geradlinige Bewegung unter der Einwirkung der Rückstellkraft $\mathfrak{F}$ ausführt, die der Größe nach $F = c \cdot OM$ ist und denselben nach der Gleichgewichtslage O hinzieht, und des Widerstandes $\mathfrak{R}$, der nach der Seite gerichtet ist, die der Bewegung des Punktes M entgegengesetzt ist. Die Abb. 59 ist unter der Voraussetzung aufgebaut, daß sich der Punkt M im gegebenen Augenblick von links nach rechts bewegt.

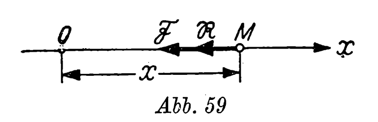


Abb. 59

Die Größe des Widerstandes R kann verschieden sein, je nach der physikalischen Natur dieser Kraft. Die Größe der Reibungskraft kann man (auf Grund des Gesetzes von Coulomb) als konstant annehmen. Der Luftwiderstand ist, wie wir im § 9 gesehen haben, in ziemlich weiten Grenzen proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit des sich bewegenden Körpers. Bei kleinen Geschwindigkeiten (kleiner als 0,2 m/s) muß man den Luftwiderstand als proportional der Geschwindigkeit annehmen. Im weiteren werden wir uns auf die Voraussetzung beschränken, daß die Größe des Widerstandes R proportional der Geschwindigkeit v des Punktes M ist; wir wählen diese Voraussetzung, da sie zu einfacheren Berechnungen führt.

Setzen wir also

$$R = \alpha v,$$

wobei α ein konstanter Koeffizient ist.

Wir wollen jetzt die Differentialgleichung der Bewegung des Punktes M aufstellen und wählen dazu die geradlinige Bahn des Punktes M als x-Achse und legen den Koordinatenursprung in die Gleichgewichtslage O, so daß $OM = x$ ist. Es ergibt sich die Differentialgleichung der Bewegung

$$m\ddot{x} = -F - R$$

oder, wenn wir die Größen der Kräfte F und R einsetzen und beachten, daß $v = \dot{x}$ ist,

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x}.$$

Wir bringen die im rechten Teil der Gleichung stehenden Glieder nach links und dividieren die Gleichung durch m. Wenn wir die Bezeichnungen

$$\frac{c}{m} = k^2, \qquad \frac{\alpha}{m} = 2n$$

einführen, erhalten wir:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0. \tag{1}$$

Das ist die Differentialgleichung der freien Schwingung, ergänzt durch das vom Widerstand abhängige Glied.

Die Integration dieser Gleichung kann nach der allgemeinen Regel der Integration homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ausgeführt werden. Wir stellen die charakteristische Gleichung auf:

$$z^2 + 2nz + k^2 = 0. \tag{2}$$

Ihre Wurzeln sind:

$$z_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}, \qquad z_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Betrachten wir getrennt folgende zwei Fälle:

1. Wir setzen voraus, daß $n < k$ (oder, was das gleiche ist, $\alpha < 2\sqrt{mc}$), und vereinbaren, diesen Fall als Fall *der kleinen Dämpfung* zu bezeichnen.

In diesem Falle stellen wir die Wurzeln der charakteristischen Gleichung in folgender Form dar:

$$z_1 = -n + i\sqrt{k^2 - n^2}; \qquad z_2 = -n - i\sqrt{k^2 - n^2}.$$

Die allgemeine Lösung der Gl. (1) wird sein:

$$x = e^{-nt}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{k^2 - n^2}\, t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}\, t\right)\right),$$

wobei C_1 und C_2 beliebige Konstanten sind. Wenn wir an Stelle dieser Konstanten neue willkürliche Konstanten α und β mit Hilfe der Gleichungen

$$C_1 = \alpha \sin\beta, \qquad C_2 = \alpha\cos\beta$$

einführen, können wir die gewonnene Lösung auch in folgender Form darstellen:

$$x = a\, e^{-nt} \sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}\, t + \beta\right). \tag{3}$$

Die Konstanten α und β in dieser Gleichung werden natürlich aus den Anfangsbedingungen bestimmt. Die der gewonnenen Gleichung entsprechende Bewegung hat Schwingungscharakter, da die Koordinate x periodisch ihr Vorzeichen mit der Veränderung der in dieser Gleichung enthaltenen Sinusfunktion verändert. Der Faktor e^{-nt} verringert sich im Laufe der Zeit; das Vorhandensein dieses Faktors bedingt die *allmähliche Verringerung der Schwingungsamplitude*[1]. Die durch die Gl. (3) bestimmten Schwingungen heißen *gedämpfte Schwingungen.*

---

[1] Amplitude nennt man im Fall der gedämpften Schwingungen die Größe des äußersten Ausschlages des sich bewegenden Punktes nach der einen oder anderen Seite von der Gleichgewichtslage. In diesem Fall werden wir mit Schwingungsdauer oder Zeit einer vollen Schwingung den Zeitraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen des Punktes durch die Gleichgewichtslage nach ein und derselben Seite bezeichnen. Man kann zeigen, daß der Zeitraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden äußersten Ausschlägen des Punktes nach ein und derselben Seite ebenfalls gleich der Schwingungsdauer ist.

Also führt der Punkt M im Fall eines kleinen Widerstandes gedämpfte Schwingungen aus.

Die Frequenz dieser gedämpften Schwingungen ist gleich $\sqrt{k^2 - n^2}$; folglich ist die Schwingungsdauer T gleich

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Während der Zeit einer vollen Schwingung verringert sich die Amplitude um e^{-nT}; die Größe $\frac{1}{2} n \cdot T$ nennt man *logarithmisches Dekrement*; den Koeffizienten n werden wir die *Dämpfungskonstante* nennen.

Wir wissen, daß bei Fehlen einer Dämpfung die Schwingungsdauer der freien Schwingungen (wir bezeichnen sie mit T_0) durch die Gleichung

$$T_0 = \frac{2\pi}{k}$$

ausgedrückt wird.

Abb. 60

Vergleichen wir die Ausdrücke T und T_0, so sehen wir, daß die Dämpfung *die Schwingungsdauer der freien Schwingungen vergrößert.*

Man muß jedoch bemerken, daß bei einem kleinen n, d. h. bei einer kleinen Dämpfung, die Vergrößerung der Schwingungsdauer durch Einwirkung der Dämpfung unbedeutend ist. Indessen verläuft das Abklingen der Schwingungen auch bei sehr kleinen Widerständen sehr energisch.

Nehmen wir z. B. $n = 0{,}05\,k$ an. In diesem Fall erhalten wir:

$$\frac{T}{T_0} = 1{,}00125, \qquad e^{-nT} = 0{,}7301.$$

Folglich unterscheidet sich im gegebenen Fall die Schwingungsdauer T von der Schwingungsdauer T_0 nur um 0,125%. Indessen verringert sich die Amplitude während der Zeit einer vollen Schwingung um mehr als 0,25 ihrer Größe. Nach Ablauf von zehn vollen Schwingungen ist die Amplitude nur noch 0,04304 ihres ursprünglichen Wertes.

Hieraus folgt, daß man bei der Errechnung der Schwingungsdauer der freien Schwingungen den Widerstand vernachlässigen kann, wenn er nicht groß ist. Der Einfluß des Widerstandes drückt sich hauptsächlich in der Erscheinung des Abklingens der Schwingungen aus.

Wir wissen, daß beim Fehlen eines Widerstandes die freien Schwingungen harmonisch sind und durch die Gleichung

$$x = a \sin(kt + \beta) \tag{4}$$

bestimmt werden.

In der Abb. 60 ist diese Schwingungsbewegung graphisch dargestellt. Auf der horizontalen Achse sind die Werte der Zeit t abgetragen, auf der vertikalen Achse die entsprechenden der Koordinate x. Die dargestellte Kurve ist eine Sinuskurve, die der Gl. (4) entspricht.

In der Abb. 61 ist die Kurve der abklingenden (gedämpften) Schwingung dargestellt, die der Gl. (3) entspricht; diese Darstellung gilt für den Fall $n = 0{,}05\,k$. In Abb. 61 sind die Kurven gestrichelt dargestellt, die den Gleichungen $x = \alpha e^{-nt}$ und $x = -\alpha e^{-nt}$ entsprechen. Es läßt sich leicht erkennen, daß die Kurve der abklingenden Schwingungen zwischen diesen zwei Kurven verläuft und dieselben abwechselnd berührt.

Für beide Kurven (Abb. 60 und 61) ist $\beta = 45°$ angenommen.

2. Wir betrachten nun den Fall $n > k$ $\left(\text{oder, was dasselbe ist, } \alpha > 2\sqrt{mc}\right)$. Diesen Fall werden wir den Fall der *großen Dämpfung* nennen.

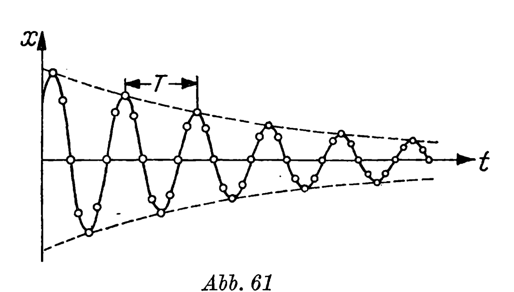


Abb. 61

Die charakteristische Gl. (2) hat die Wurzeln:

$$z_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2},$$

$$z_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Die allgemeine Lösung der Gl. (1) ist im gegebenen Fall

$$x = e^{-nt}\left(C_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2}\,t}\right), \tag{5}$$

wobei C_1 und C_2 willkürliche Konstanten sind.

Wir führen an Stelle der Konstanten C_1 und C_2 zwei neue Konstanten B_1 und B_2 ein, indem wir

$$C_1 = \frac{B_1 + B_2}{2}, \qquad C_2 = \frac{B_1 - B_2}{2}$$

setzen.

Setzen wir diese Werte für C_1 und C_2 in die Gl. (5) ein, so erhalten wir[1]:

$$x = e^{-nt}\left(B_1 \operatorname{Cof} \sqrt{n^2 - k^2}\,t + B_2 \operatorname{Sin} \sqrt{n^2 - k^2}\,t\right).$$

Man kann dieser Gleichung noch eine andere Form geben, indem man wieder neue willkürliche Konstanten α und β durch

$$B_1 = a \cdot \operatorname{Sin} \beta, \qquad B_2 = a \cdot \operatorname{Cof} \beta$$

einführt.

[1] Wir erinnern uns an die Formeln $\operatorname{Cof} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$, $\operatorname{Sin} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$.

Wenn wir diese Werte für B_1 und B_2 in die vorhergehende Gleichung einsetzen, erhalten wir:

$$x = a\,e^{-nt}\cdot \mathfrak{Sin}\left(\sqrt{n^2-k^2}\,t+\beta\right). \tag{6}$$

Die dieser Gleichung entsprechende Bewegung hat keinen Schwingungscharakter; sie heißt *aperiodisch.* Der allgemeine Charakter dieser Bewegung wird dadurch bestimmt, daß bei einem unbegrenzten Anwachsen der Zeit t die Koordinate x sich asymptotisch Null nähert.

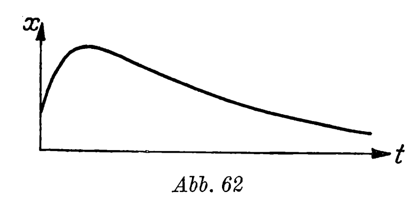


Abb. 62

Eine Kurve dieser Bewegung ist in der Abb. 62 dargestellt[2].

Wir sehen, daß sich im Fall einer großen Dämpfung die freien Schwingungen als vollständig vernichtet erweisen.

Im Fall $n = k$ $\left(\text{oder } \alpha = 2\sqrt{mc}\right)$ hat die charakteristische Gl. (2) gleiche Wurzeln: $z_1 = z_2 = -n$. Die allgemeine Lösung der Gl. (1) hat dann die Form

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t),$$

wobei C_1 und C_2 willkürliche Konstanten sind. Die dieser Gleichung entsprechende Bewegung hat gleichfalls einen aperiodischen Charakter und heißt aperiodischer Grenzfall.

§ 37. Der Einfluß der Dämpfung auf erzwungene Schwingungen

Wir gehen nun zu der Untersuchung des Einflusses der Dämpfung auf die erzwungenen Schwingungen eines materiellen Punktes über.

Wir stellen uns einen materiellen Punkt M vor (Abb. 63), der eine geradlinige Bewegung unter der Einwirkung der Rückstellkraft $\mathfrak{F}$ ausführt, die der Größe nach $F = c\cdot OM$ ist und den Punkt nach der Gleichgewichtslage O hinzieht, sowie der Erregerkraft $\mathfrak{S}$, die der Größe nach $S = H \sin(pt+\delta)$ ist, und des Widerstandes $\mathfrak{R}$, welcher der Bewegung des Punktes M entgegengesetzt gerichtet ist. Wir werden die Größe des Widerstandes R wieder als proportional der Größe der Geschwindigkeit v des Punktes M annehmen, so daß

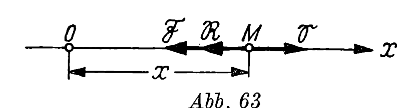


Abb. 63

$$R = \alpha v$$

ist, wobei α ein konstanter Koeffizient ist.

Wir stellen die Differentialgleichung der Bewegung des Punktes M auf. Nehmen wir die geradlinige Bewegungsbahn des Punktes M als x-Achse an und legen den Koordinatenursprung in die Gleichgewichtslage O, so daß $OM = x$ ist, so ergibt sich die Differentialgleichung der Bewegung

$$m\ddot{x} = -F - R + S$$

[2] Die Kurve in der Abb. 62 gilt für den Fall $n = \frac{5}{3}k$, $\beta = 0{,}2$.

oder, wenn wir die Größen der Kräfte F, R und S substituieren und beachten, daß $v = \dot{x}$ ist:

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x} + H\sin(pt + \delta).$$

Wir bringen die Glieder cx und $\alpha\dot{x}$ auf die linke Seite der Gleichung und dividieren die Gleichung durch m. Wenn wir die Bezeichnungen

$$\frac{c}{m} = k^2, \qquad \frac{\alpha}{m} = 2n, \qquad \frac{H}{m} = h$$

einführen, erhalten wir

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin(pt + \delta). \tag{1}$$

Das ist die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen, ergänzt durch das Glied, das von der Dämpfung abhängt.

Wir haben es hier mit einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und einer Störfunktion[1] zu tun. Die entsprechende Gleichung ohne Störfunktion ist

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0. \tag{2}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist uns bekannt. Im Falle kleiner Dämpfung ($n < k$) kann sie in der Form

$$x = a e^{-nt} \sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}\, t + \beta\right)$$

dargestellt werden, wobei a und β willkürliche Konstanten sind. Im Falle großer Dämpfung ($n > k$) ist jedoch die allgemeine Lösung der Gl. (2)

$$x = a e^{-nt} \operatorname{Sin}\left(\sqrt{n^2 - k^2}\, t + \beta\right)$$

mit den Konstanten a und β.

Die vollständige Lösung wird auf die Ermittlung einer beliebigen Partikulärlösung der Gl. (1) zurückgeführt. Wir werden sie in der Form

$$x = A\sin(pt + \delta - \varepsilon) \tag{3}$$

ansetzen.

Wir wollen sehen, ob es nicht möglich ist, die Konstanten A und ε so auszuwählen, daß dieser Ausdruck die Gl. (1) befriedigt. Setzen wir anstatt x den Ansatz in die Gl. (1) ein, so ergibt sich

$$-Ap^2\sin(pt + \delta - \varepsilon) + 2nAp\cos(pt + \delta - \varepsilon) + k^2 A\sin(pt + \delta - \varepsilon) =$$
$$= h\sin(pt + \delta).$$

Wir formen die rechte Seite dieser Gleichung auf folgende Art um:

$$h\sin(pt + \delta) = h\sin(pt + \delta - \varepsilon + \varepsilon)$$
$$= h\cos\varepsilon\sin(pt + \delta - \varepsilon) + h\sin\varepsilon\cdot\cos(pt + \delta - \varepsilon).$$

[1] Deutscher Ausdruck auch „*Störkraft*“ (Anm. d. Redakt.).

Vereinigen wir nun in der vorhergehenden Gleichung die Glieder, die $\sin(pt + \delta - \varepsilon)$ enthalten, und die Glieder, die $\cos(pt + \delta - \varepsilon)$ enthalten, so erhalten wir:

$$\left\{ A(k^2 - p^2) - h\cos\varepsilon \right\} \sin(pt + \delta - \varepsilon) + \\ + (2npA - h\sin\varepsilon)\cos(pt + \delta - \varepsilon) = 0.$$

Diese Gleichung wird zur Identität, wenn

$$A(k^2 - p^2) = h\cos\varepsilon, \qquad 2npA = h\sin\varepsilon. \tag{4}$$

Hieraus finden wir die verlangten Werte für A und ε. Wir erhalten

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}, \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \tag{6}$$

Die Größe ε wird aus $\operatorname{tg}\varepsilon$ auf eindeutige Art bestimmt, da aus der zweiten Gl. (4) ersichtlich ist, daß $\sin\varepsilon > 0$ ist (wir rechnen, daß $h > 0$, $A > 0$ und $\varepsilon < 2\pi$ ist).

Somit ist der Ausdruck (3), der die Konstanten A und ε enthält, die durch die Gln. (5) und (6) bestimmt werden, eine Partikulärlösung der Gl. (1).

Addieren wir diese Partikulärlösung zu der allgemeinen Lösung der homogenen Gl. (2), so erhalten wir die allgemeine Lösung der Gl. (1). Im Fall einer kleinen Dämpfung ($n < k$) erhalten wir

$$x = a e^{-nt} \sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \beta\right) + A\sin(pt + \delta - \varepsilon). \tag{7}$$

Im Fall einer großen Dämpfung ($n > k$) ergibt sich

$$x = a e^{-nt} \operatorname{\mathfrak{Sin}}\left(\sqrt{n^2 - k^2}\,t + \beta\right) + A\sin(pt + \delta - \varepsilon). \tag{8}$$

Die Größen a und β in den Ausdrücken (7) und (8) sind willkürliche Konstanten, während A und ε durch die Gl. (5) und (6) bestimmt werden.

Wenn wir uns der Gl. (7) zuwenden, sehen wir, daß sich im Falle einer kleinen Dämpfung die Bewegung des Punktes M aus zwei Schwingungsbewegungen zusammensetzt: aus freien Schwingungen, die allmählich im Laufe der Zeit erlöschen, und aus erzwungenen Schwingungen, die durch das zweite Glied der Gl. (7) dargestellt werden. Im Fall einer großen Dämpfung wird, wie die Gl. (8) zeigt, der erzwungenen Schwingung eine rasch abklingende aperiodische Bewegung überlagert. Es ist sehr wichtig, zu bemerken, daß die erzwungenen Schwingungen, die den zweiten Gliedern in den Gln. (7) und (8) entsprechen, harmonische Schwingungen sind. Folglich erlöschen erzwungene Schwingungen unter dem Einfluß des Widerstandes nicht. Dadurch unterscheiden sich die erzwungenen Schwingungen wesentlich von den freien Schwingungen.

Wir sahen im vorhergehenden Paragraphen, daß bereits bei sehr kleinen Dämpfungen (bei einem sehr kleinen Wert der Dämpfungskonstante n) die freien Schwingungen sehr rasch erlöschen. Die ersten Glieder in den Gln. (7) und (8) haben im allgemeinen eine merkliche Größe nur bis kurz nach Beginn der Bewegung. Danach nähern sich diese Glieder im Laufe der Zeit infolge der raschen Verringerung des Faktors e^{-nt} schnell dem Werte Null, und nach Ablauf eines gewissen Zeitraumes ist es möglich, sie im Vergleich zu den zweiten Gliedern in den Gln. (7) und (8) zu vernachlässigen. Hieraus folgt, *daß man bei der Untersuchung von erzwungenen Schwingungen die freien Schwingungen im Vergleich zu den erzwungenen vernachlässigen kann.* Dieser Umstand vereinfacht die ganze Frage bedeutend. Es können natürlich Ausnahmen von dieser allgemeinen Regel in dem Fall vorkommen, wenn die Dämpfung einen äußerst kleinen Wert hat (die Konstante n ist dann sehr klein), oder dann, wenn die Konstante a in den Gln. (7) oder (8) einen äußerst großen Wert hat. Die Entscheidung der Frage, ob man die freien Schwingungen vernachlässigen kann, hängt in jedem gegebenen Fall auch von dem Genauigkeitsgrade der Untersuchung ab.

Wir wenden uns den erzwungenen Schwingungen zu, die durch die Gleichung

$$x = A \sin(pt + \delta - \varepsilon) \tag{3}$$

dargestellt werden.

Die Frequenz p dieser Schwingungen ist gleich der Frequenz der Erregerkraft $\mathfrak{S}$; folglich ist *auch die Schwingungsdauer der erzwungenen Schwingungen gleich der Schwingungsdauer der Erregerkraft.* Wie wir sehen, wirkt sich der Einfluß der Dämpfung nicht auf die Periode der erzwungenen Schwingungen aus.

Die Amplitude der erzwungenen Schwingungen hängt dagegen wesentlich von der Dämpfung ab. Die Amplitude A dieser Schwingungen hat den Wert

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}. \tag{5}$$

Diese Formel zeigt, daß bei gegebenen h, k und p die Amplitude A um so kleiner ist, je größer die Dämpfungskonstante n ist. *Die Dämpfung verringert also die Amplitude der erzwungenen Schwingungen.* Nehmen wir in der Gl. (5) $n = 0$ an, so kehren wir zu den in § 35 gewonnenen Resultaten zurück, die unter der Voraussetzung des Fehlens der Dämpfung aufgestellt wurden:

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2} \quad (p < k), \qquad A = \frac{h}{p^2 - k^2} \quad (p > k).$$

Die Verringerung der Amplitude A unter dem Einfluß der Dämpfung ist besonders bemerkbar für die Werte von p, die nahe k liegen. Bei $p = k$ wird bei Fehlen einer Dämpfung $A = \infty$ (Resonanz); wir erhalten indessen, wenn wir $p = k$ in die Gl. (5) einsetzen, die endliche Größe

$$A = \frac{h}{2nk}.$$

Man muß bemerken, daß die Größe A, die durch die Gl. (5) bestimmt wird, ihren größten Wert nicht bei $p = k$ erhält. Wenn wir bei gegebenen h, k und n das Maximum

der Größe A nach den Regeln der Differentialrechnung bestimmen, finden wir, daß die Amplitude A den größten Wert bei $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$ hat; dieser größte Wert ist gleich

$$A_{\max} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Bei kleinen Werten von n ist die Größe $\sqrt{k^2 - 2n^2}$ sehr nahe der Größe k. Bei $n = 0{,}05\,k$ haben wir z. B. $\sqrt{k^2 - 2n^2} = 0{,}9975\,k$. In diesem Fall ist $A_{\max} = 10{,}0125\,\frac{h}{k^2} = 10{,}0125\,A_0$ $\left(\text{wobei } A_0 = \frac{h}{k^2} \text{ der Wert der Amplitude } A \text{ für } p = 0 \text{ ist}\right)$. Folglich

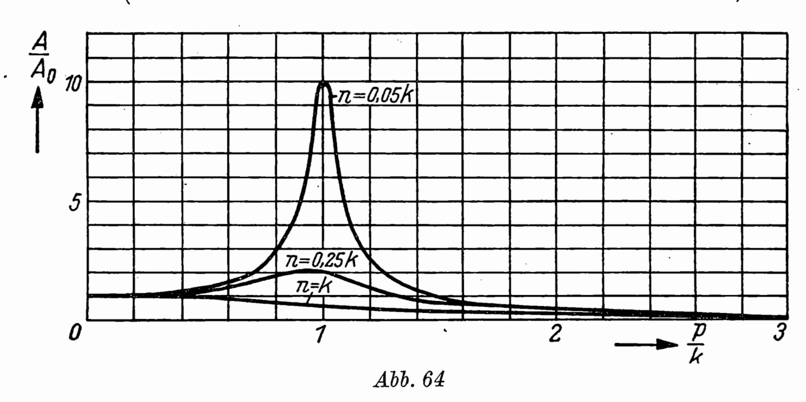


Abb. 64

haben wir bei kleinen n-Werten eine scharf auftretende Vergrößerung der Amplitude A (d. h. eine scharf auftretende Resonanzerscheinung) für p-Werte, die nahe bei k liegen. Mit der Vergrößerung des Koeffizienten n verringert sich die Größe $A_{\max}$ (bei $n = 0{,}25\,k$ ergibt sich $A_{\max} = 2{,}066\,A_0$); die Resonanzerscheinung wird weniger scharf. Wenn schließlich $n > \frac{k}{\sqrt{2}}$ ist, hört das Maximum der Amplitude A auf zu existieren; mit der Veränderung der Frequenz p von 0 bis ∞ nimmt die Amplitude A ununterbrochen von A_0 bis 0 ab; die Resonanzerscheinung verschwindet.

In der Abb. 64 sind die Kurven der Abhängigkeit der Amplitude A von der Frequenz p für $n = 0{,}05\,k$, $n = 0{,}25\,k$ und $n = k$ (aperiodischer Grenzfall) dargestellt. Auf der horizontalen Achse sind die Werte des Verhältnisses $\frac{p}{k}$ abgetragen, auf der vertikalen Achse die Werte der Größe $\frac{A}{A_0}$.

In der Tabelle 3 sind auch die Zahlenwerte der Größe $\frac{A}{A_0}$ angeführt, die verschiedenen Werten des Verhältnisses $\frac{p}{k}$ entsprechen, und zwar für die Fälle $n = 0$ (Fehlen der Dämpfung), $n = 0{,}05\,k$, $n = 0{,}25\,k$ und $n = k$ (aperiodischer Grenzfall).

Wenn wir die Werte der Größe $\frac{A}{A_0}$ für $n = 0$ und $n = 0{,}05\,k$ vergleichen, dann können wir schließen, daß bei kleinen Werten der Dämpfungskonstante n und bei Frequenzen p, die nicht zu nahe dem kritischen Werte $k = p$ sind, die Verringerung der Amplitude A unter der Einwirkung der Dämpfung sehr gering ist. Hieraus folgt, *daß bei kleinen n-Werten und bei Frequenzen p, die genügend weit von der Resonanzstelle entfernt sind, bei der Berechnung der Amplitude die Dämpfung vernachlässigt werden kann*, d. h., daß die Errechnung nach den im § 35 gegebenen Gleichungen

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2} \quad (p < k), \qquad A = \frac{h}{p^2 - k^2} \quad (p > k)$$

erfolgen kann.

Tabelle 3

$\frac{p}{k}$	$\frac{n}{k}$ = 0	0,05	0,25	1
0	1	1	1	1
0,2	1,042	1,041	1,036	0,962
0,4	1,190	1,183	0,158	0,862
0,6	1,562	1,556	1,415	0,735
0,8	2,778	2,712	1,858	0,610
1	∞	10	2	0,500
1,2	2,273	2,193	1,344	0,410
1,4	1,042	1,031	0,842	0,338
1,6	0,641	0,638	0,570	0,281
1,8	0,446	0,445	0,414	0,236
2	0,333	0,333	0,316	0,200
3	0,125	0,125	0,123	0,100
10	0,0101	0,0101	0,0101	0,0099
∞	0	0	0	0

Abb. 65

Vergleichen wir die Gleichung der erzwungenen Schwingungen

$$x = A \sin(p\,t + \delta - \varepsilon) \tag{3}$$

mit dem Ausdruck für die Erregerkraft $S = H \sin(pt + \delta)$, so sehen wir, daß die Phase der erzwungenen Schwingungen von der Phase der Erregerkraft um die Größe ε abweicht. Die Differenz ε der Phasen (die Größe ε heißt *Verschiebungswinkel der Phase* oder auch Phasenverschiebung) wird durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} \tag{6}$$

und die Bedingung $\sin \varepsilon > 0$ bestimmt. Hieraus ersieht man:

$$\varepsilon = 0 \quad \text{bei} \quad p = 0,$$

$$0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2} \quad \text{bei} \quad 0 < p < k,$$

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} \quad \text{bei} \quad p = k,$$

$$\frac{\pi}{2} < \varepsilon < \pi \quad \text{bei} \quad p > k,$$

$$\varepsilon = \pi \quad \text{bei} \quad p = \infty.$$

Die Abhängigkeit der Differenz der Phasen ε von der Frequenz p ist graphisch in Abb. 65 dargestellt für $n = 0$, $n = 0{,}05\,k$, $n = 0{,}25\,k$ und $n = k$. Wir erinnern daran, daß wir für $n = 0$ (Fehlen einer Dämpfung) $\varepsilon = 0$ bei $p < k$ und $\varepsilon = \pi$ bei $p > k$ hatten; die Kurve, die in diesem Fall aus zwei Geraden besteht, weist eine Unterbrechung der Kontinuität bei $p = k$ auf. Unter dem Einfluß des Widerstandes gleicht sich diese Diskontinuität aus.

§ 38. Beispiele für erzwungene Schwingungen

Bevor wir zu der Anwendung der in den vorhergehenden Paragraphen dargelegten Theorie der erzwungenen Schwingungen übergehen, wollen wir nochmals einige der Resultate festhalten, die wir beim Studium dieser Theorie erlangten.

1. Eine große praktische Bedeutung hat die Resonanzerscheinung. Wir haben gesehen, daß bei kleinen Werten der Dämpfungskonstanten n (nur bei solchen Werten hat die Erscheinung der Resonanz einen scharf ausgeprägten Charakter) der Frequenzwert p, bei dem die Resonanz auftritt, gleich k gesetzt werden kann, d. h. gleich der Frequenz der freien Schwingungen beim Fehlen einer Dämpfung. Somit wird die Errechnung der „kritischen" Frequenz p, bei der Resonanz auftritt, auf die Errechnung der Frequenz der freien Schwingungen k zurückgeführt. Die Berechnung der Frequenz k muß so ausgeführt werden, wie das im § 32 erklärt und an Beispielen im § 33 gezeigt ist.

2. Erzwungene Schwingungen sind stets von freien Schwingungen begleitet. Wir haben aber gesehen, daß freie Schwingungen unter dem Einfluß einer Dämpfung abklingen, infolgedessen kann man im allgemeinen diese im Vergleich zu den erzwungenen Schwingungen vernachlässigen.

3. Bei kleinen Werten der Dämpfungskonstanten n und bei Frequenzen p, die nicht zu nahe der Resonanz liegen, hängt die Amplitude der erzwungenen Schwingungen nur in geringem Maße von der Dämpfung ab. Daher kann in diesen Fällen die Berechnung der Amplitude der erzwungenen Schwingungen nach den Gleichungen

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2} \quad (p < k); \qquad A = \frac{h}{p^2 - k^2} \quad (p > k)$$

erfolgen, die unter der Voraussetzung des Fehlens einer Dämpfung aufgestellt sind.

Beispiel 12. Der WATTsche Indikator. Im §14 wurde erklärt, wie die Arbeit des Dampfes im Zylinder einer Dampfmaschine durch Ausmessen der Fläche eines Indikator-Diagramms, das die graphische Abbildung der Abhängigkeit zwischen dem Dampfdruck im Zylinder und der Lage des Kolbens darstellt, bestimmt werden kann. Das Indikator-Diagramm ergibt sich automatisch mit Hilfe des selbstschreibenden Apparates, der Indikator genannt wird (er wurde von WATT erfunden).

Wir wollen uns ein Blatt Papier vorstellen, das sich geradlinig in horizontaler Richtung bewegt, wenn es die Bewegung des Kolbens in verkleinertem Maßstabe aufzeichnet. Wir wollen uns ferner eine schreibende Spitze vorstellen, die sich gleichfalls geradlinig bewegt, aber in vertikaler Richtung, und zwar so, daß ihre Verschiebung, gezählt von irgendeiner Null-Stellung, dem Dampfdruck im Zylinder proportional ist. Die schreibende Spitze wird auf dem sich bewegenden Papierblatt eine Kurve zeichnen, die das Indikator-Diagramm darstellt. Dem Bogen Papier kann man die erforderliche Bewegung auf rein kinematischem Wege mitteilen; es genügt, ihn durch eine entsprechende Übertragung mit irgendeinem Punkte zu verbinden, der eine Bewegung ausführt, die mit der Bewegung des Kolbens identisch ist (z. B. mit einem Punkt des Kreuzkopfes). Was die schreibende Spitze anbelangt, so ist sie mit dem beweglichen Teil des Apparates verbunden, den wir hier sofort beschreiben werden und der Indikator genannt wird.

Abb. 66

Innerhalb eines kleinen vertikal gestellten Zylinders bewegt sich der kleine Kolben A (Abb. 66), an dem der vertikale Stab AB befestigt ist; am Ende dieses Stabes befindet sich die schreibende Spitze B. Im oberen Teil des Zylinders befindet sich eine Schraubenfeder, die mit ihren Enden an dem kleinen Kolben und am oberen Deckel des Zylinders befestigt ist. Der untere Teil des Indikator-Zylinders steht mittels eines Röhrchens mit dem Inneren des Dampfzylinders in Verbindung. Deshalb herrscht im unteren Teil des Indikator-Zylinders ein Dampfdruck, der gleich dem Dampfdruck im Dampfzylinder ist. Dieser Druck verschiebt den kleinen Kolben A zusammen mit der schreibenden Spitze B, indem er die Feder zusammendrückt. Die Verschiebung der Spitze B ist gleich der Zusammendrückung der Feder, ihre Größe wird auf dem Papier durch die schreibende Spitze aufgezeichnet. Es liegt auf der Hand, daß der Indikator nichts anderes ist als ein Feder-Dynamometer, mit dem der veränderliche Dampfdruck gemessen wird.

Die Zusammendrückung der Feder ist proportional der zusammendrückenden Kraft. Wir nehmen an, daß der Apparat so eingeteilt ist, daß man weiß, welche Kraft der Zusammendrückung 1 cm der Feder entspricht (d. h. der Verrückung der Spitze B). Wenn der Dampfdruck konstant wäre und wenn der bewegliche Teil des Indikators (der kleine Kolben A mit dem Stabe AB) sich in Ruhe befände, wäre die Zusammendrückung der Feder proportional dem Dampfdruck, und aus der Lage der Spitze B könnten wir die

Größe des Dampfdruckes bestimmen. Der Dampfdruck ist jedoch eine variable Größe, auch befindet sich der bewegliche Teil des Indikators nicht in Ruhe, sondern führt eine schwingende Bewegung aus. Infolgedessen kann man diese Zusammendrückung der Feder nicht als proportional dem Dampfdruck ansehen. Um die Abhängigkeit zwischen der Größe des Dampfdruckes und der Verschiebung der Spitze B klarzustellen, ist es notwendig, die Bewegungen der Spitze B näher zu betrachten.

Auf den beweglichen Teil des Indikators (wir werden denselben als materiellen Punkt M betrachten und seine ganze Masse als in seinem Schwerpunkt konzentriert voraussetzen) wirken drei Kräfte: die Schwerkraft $\mathfrak{P}$, die Dampfkraft $\mathfrak{S}$ und die elastische Reaktion $\mathfrak{F}$ der zusammengedrückten Feder (Abb. 67). Wir bezeichnen die Lage des Punktes M bei nichtzusammengepreßter und nichtgedehnter Feder mit C; dann ist CM die Zusammendrückung der Feder, und folglich ist

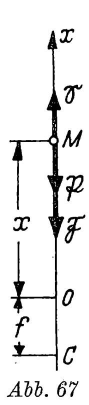


Abb. 67

$$F = c \cdot C\,M\,,$$

wobei c eine konstante Zahl ist (c ist die der Zusammendrückung der Feder um einen Zentimeter entsprechende Kraft). Wenn wir den Dampfdruck mit p bezeichnen[1] und die Fläche des kleinen Indikatorkolbens mit σ, erhalten wir

$$S = \sigma p\,.$$

Der Dampfdruck p verändert sich im Laufe der Zeit periodisch. Die Periode τ dieser Veränderungen ist gleich der Zeit, die für eine volle Umdrehung der Hauptwelle der Maschine benötigt wird. Wir nehmen an, daß die Hauptwelle sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht. In diesem Falle ist $\tau\omega = 2\pi$, daher

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}\,.$$

Folglich ist die Frequenz der Veränderungen des Druckes p gleich der Winkelgeschwindigkeit ω der Hauptwelle.

Der Dampfdruck p, der sich periodisch in den Grenzen zwischen Null und einem maximalen Wert verändert, ist eine ziemlich komplizierte Zeitfunktion. Wir setzen hier voraus, daß der Druck p durch die einfache trigonometrische Funktion

$$p = p_0 + p_0 \sin \omega t$$

ausgedrückt wird.

Nach dieser Funktion verändert sich p periodisch zwischen 0 und $2p_0$; p_0 ist der mittlere Wert des Druckes p. Natürlich entspricht diese Funktion der Änderung des Druckes p längst nicht der Wirklichkeit; wir haben sie nur zur Vereinfachung der weiteren Rechnung aufgestellt. Man muß jedoch im Auge behalten, daß auf Grund der Fourier-Analyse eine beliebige periodische Funktion, wie z. B. die des Druckes p, als trigonometrische Reihe dargestellt werden kann, die ähnlich der von uns angenommenen ist, die aber nicht nur ein, sondern mehrere trigonometrische Glieder enthält.

Wir wollen nun die Differentialgleichung der Bewegung des beweglichen Indikatorteiles aufstellen. Wir nehmen die geradlinige Bewegungsbahn des Punktes M als x-Achse an und legen den Koordinatenursprung in die Gleichgewichtslage O (Abb. 67), in welcher

[1] Hier bezeichnet p den Arbeitsdampfdruck, d. h. den Dampfdruck, verringert um die Größe des Atmosphärendruckes, der auf der Rückseite des kleinen Kolbens wirkt.

der Punkt M sich bei einem konstanten Dampfdruck, der gleich dem mittleren Druck p_0 ist, befinden würde. Es ergibt sich dann die Differentialgleichung der Bewegung:

$$m\ddot{x} = S - P - F.$$

Wir bezeichnen die Zusammendrückung der Feder, die der Gleichgewichtslage O entspricht, mit f, so daß $CO = f$ ist. Setzen wir in der soeben geschriebenen Gleichung

$$F = c \cdot CM = c(f + x),$$

$$S = \sigma p = \sigma p_0 + \sigma p_0 \sin \omega t,$$

so erhalten wir

$$m\ddot{x} = \sigma p_0 + \sigma p_0 \sin \omega t - P - cf - cx.$$

Die Zusammendrückung f wird durch die Gleichgewichtsbedingung bestimmt:

$$\sigma p_0 - P - cf = 0.$$

Auf Grund dieser Bedingung werden die konstanten Glieder im rechten Teil der vorhergehenden Gleichung gekürzt. Bringen wir das Glied cx auf die linke Seite der Gleichung, so erhalten wir

$$m\ddot{x} + cx = \sigma p_0 \sin \omega t.$$

Wir dividieren diese Gleichung durch m, führen die Bezeichnung

$$\frac{c}{m} = k^2$$

ein und erhalten endgültig

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{\sigma p_0}{m} \sin \omega t.$$

Damit haben wir die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen gewonnen. Ihre allgemeine Lösung ist

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{\sigma p_0}{m(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

Wir bestimmen die willkürlichen Konstanten C_1 und C_2, indem wir voraussetzen, daß zur Zeit $t = 0$ der Punkt M sich in Ruhe in der Gleichgewichtslage O befand. In diesem Fall ergeben sich $x = 0$ und $\dot{x} = 0$ für $t = 0$. Differenzieren wir den gewonnenen Ausdruck für x, so finden wir:

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt + \frac{\sigma p_0 \omega}{m(k^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

Wir setzen die Anfangsbedingungen in die Ausdrücke für x und $\dot{x}$ ein und erhalten

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = -\frac{\sigma p_0}{m(k^2 - \omega^2)} \frac{\omega}{k}.$$

Die Substitution dieser Ausdrücke für die willkürlichen Konstanten in dem Ausdruck für x führt zu der Gleichung

$$x = \frac{\sigma p_0}{m(k^2 - \omega^2)}\left(\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin k t\right).$$

Das ist die Verschiebung des beweglichen Indikatorteiles, die hervorgerufen ist durch den veränderlichen Dampfdruck $\sigma p_0 \sin \omega t$. Wenn wir die beobachtete Verschiebung x mit der Konstanten c (die Kraft, die der Zusammendrückung der Feder um 1 cm entspricht) multiplizieren, erhalten wir

$$\frac{c\,\sigma p_0}{m\,(k^2 - \omega^2)}\left(\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin k t\right)$$

oder, da $\frac{c}{m} = k^2$ ist,

$$\sigma p_0 \frac{k^2}{k^2 - \omega^2}\left(\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin k t\right).$$

Dies ist die Größe des veränderlichen Dampfdruckes, die aus der Indikatoranzeige hervorgeht. Die Differenz zwischen dieser Größe und dem wahren Wert des veränderlichen Druckes $\sigma p_0 \sin \omega t$ ist ein Fehler der Indikatoranzeige. Bezeichnen wir diesen Fehler mit η, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\eta &= \sigma p_0 \frac{k^2}{k^2 - \omega^2}\left(\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin k t\right) - \sigma p_0 \sin \omega t \\ &= \sigma p_0 \frac{k^2}{k^2 - \omega^2}\left(\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin k t - \frac{k^2 - \omega^2}{k^2} \sin \omega t\right) \\ &= \sigma p_0 \frac{k^2}{k^2 - \omega^2}\left(\frac{\omega^2}{k^2} \sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin k t\right).\end{aligned}$$

Wie ersichtlich, ist der Fehler η um so kleiner, je kleiner das Verhältnis $\omega : k$ ist. Hieraus folgt, daß der Indikator in dem Fall den Dampfdruck mit genügender Genauigkeit anzeigen wird, wenn die Frequenz k der freien Schwingungen seines beweglichen Teiles hinreichend groß im Vergleich zu der Winkelgeschwindigkeit ω der Hauptwelle ist. Gewöhnlich wird die Indikatorfeder so berechnet, daß das Verhältnis $\omega : k$ nicht größer ist als $1 : 20$. Je schnellaufender eine Maschine ist, desto höher muß die Frequenz der freien Schwingungen des Indikators sein. In den Fällen, wo ein Indikator von sehr hohen Frequenzen der freien Schwingungen benötigt wird, ist ein Indikator von der beschriebenen Konstruktion nicht anwendbar, in solchen Fällen muß die Schraubenfeder des Indikators durch ein elastisches Plättchen ersetzt werden, das eine höhere Frequenz der freien Schwingungen besitzt.

Beispiel 13. In einer Maschinenhalle, die auf vier vertikalen Stützen ruht, befindet sich eine liegende Dampfmaschine (Abb. 68). Die Stützen sollen so berechnet werden, daß die Schwingungen der Halle, die während des Ganges der Maschine entstehen, die vorher gegebenen Grenzen nicht übersteigen. Wir bezeichnen das Gewicht der fortschreitend sich bewegenden Maschinenteile (Kolben, Kolbenstange usw.) mit P. Das Gewicht der Maschinenhalle, in der sich die Maschine befindet, zusammen mit dem Gewicht der Maschinenteile, die nicht an der fortschreitenden Bewegung teilnehmen, bezeichnen wir mit Q. Den

Weg des Kolbens bezeichnen wir mit $2a$ und setzen voraus, daß die Hauptwelle der Maschine gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Wenn das Verhältnis der Länge der Kurbel zu der Länge der Kurbelstange genügend klein ist, können wir die Bewegung des Kolbens als harmonische Schwingungsbewegung mit der Amplitude a und der Schwingungsdauer $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ gleich der Dauer einer vollen Umdrehung der Maschinenwelle betrachten.

Wir schematisieren die Aufgabe und stellen uns (Abb. 69) eine horizontale Platte vom Gewicht Q und der Masse $M = \frac{Q}{g}$ vor, die auf vier vertikalen Stützen ruht und auf die irgendein Körper vom Gewicht P und der Masse $m = P/g$ sich hin und her bewegt

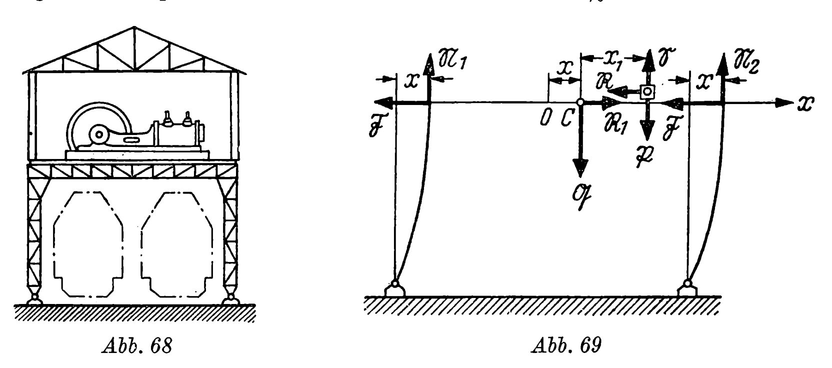


Abb. 68 *Abb. 69*

indem er harmonische Schwingungen mit der Amplitude a und der Schwingungsdauer $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ ausführt. Es sollen die dabei entstehenden Schwingungen der Platte untersucht und die Stützen so berechnet werden, daß die Amplitude dieser Schwingungen die gegebene Größe nicht übersteigt.

Wir wollen uns das Spiel der Kräfte in unserem System klarmachen. Auf die sich auf der Platte bewegende Masse m wirkt ihr Gewicht $\mathfrak{P}$, die sich mit dem Gewicht $\mathfrak{P}$ ausgleichende vertikale Reaktion $\mathfrak{S}$ der Platte und die horizontale Kraft $\mathfrak{R}$, die die Masse m veranlaßt, eine schwingende Bewegung auszuführen (Dampfdruck auf den Kolben). Auf die Platte wirkt ihr im Schwerpunkt C der Platte angreifendes Gewicht $\mathfrak{Q}$, die vertikalen und horizontalen Reaktionen $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ und $\mathfrak{F}$ der zusammengedrückten und gebogenen Stützen, der vertikale Druck der Masse m, der gleich ihrem Gewicht $\mathfrak{P}$ ist, sowie die horizontale Kraft $\mathfrak{R}_1$, die gleich und entgegengesetzt der an der Masse m angreifenden Treibkraft ist (da die Wirkung gleich der Gegenwirkung ist; der im Dampfzylinder befindliche Dampf drückt nicht nur auf den Kolben, sondern auch in umgekehrter Richtung auf den Deckel des Zylinders). Wir werden die auf die Platte einwirkende Kraft $\mathfrak{R}_1$ als in ihrem Schwerpunkt C angreifend annehmen. Gerade diese Kraft ist es, die die kleine Platte während des Ganges der Maschine in Schwingungen versetzt.

Wir stellen nun die Differentialgleichungen der Bewegung sowohl für die Platte als auch für die sich auf derselben befindende Masse m auf (wir betrachten die Platte und die Masse m als materielle Punkte). Wir richten die x-Achse wie in der Abb. 69 angegeben und legen den Koordinatenursprung in die Gleichgewichtslage O des Schwerpunktes C der Platte. Bezeichnen wir die Abweichung OC des Schwerpunktes der

Platte von ihrer Gleichgewichtslage mit x und den Abstand (den veränderlichen Abstand) der Masse m vom Schwerpunkt C der kleinen Platte mit x_1, so finden wir für die Massen M und m die Differentialgleichung der Bewegung

$$M\ddot{x} = R - 4F\,, \tag{1}$$

$$m(\ddot{x} + \ddot{x}_1) = -R\,. \tag{2}$$

Um aus diesen Gleichungen die uns unbekannte Kraft R zu eliminieren, addieren wir die aufgestellten Gleichungen gliedweise:

$$(M + m)\ddot{x} + m\ddot{x}_1 = -4F\,. \tag{3}$$

Wir setzen voraus, daß die mittlere Lage der Masse m auf der Platte, um die herum diese Masse harmonische Schwingungen ausführt, mit dem Schwerpunkt C der Platte zusammenfällt; in einem solchen Falle erhalten wir:

$$x_1 = a \sin \omega t\,.$$

Was die horizontalen Reaktionen der Stützen $\mathfrak{F}$ anbetrifft, so sind diese Kräfte proportional den Durchbiegungen x der Stützen; wir können daher

$$F = c\,x$$

schreiben, wobei c die Federkonstante einer Stütze darstellt. Aus der Festigkeitslehre ist bekannt, daß sich bei einem einseitig fest eingespannten Balken die Federkonstante c zu

$$c = \frac{3EJ}{l^3}$$

ergibt, wobei l die Länge der Stütze, E der Elastizitätsmodul, J das Trägheitsmoment des Querschnittes der Stütze (in bezug auf die Achse, die durch den Schwerpunkt des Schnittes geht und senkrecht zu der Ebene der Biegung verläuft) ist.

Setzen wir den Wert der Größen x_1 und F in die Gl. (3) ein, so erhalten wir

$$(M + m)\ddot{x} - m a \omega^2 \sin \omega t = -4cx$$

oder

$$\ddot{x} + \frac{4c}{M+m}x = \frac{m}{M+m} a \omega^2 \sin \omega t\,. \tag{4}$$

Das ist die Differentialgleichung, durch welche die Größe x und folglich die Schwingungen unserer Platte bestimmt werden.

Die Gl. (4) ist die Differentialgleichung einer erzwungenen Schwingung. Die Amplitude der erzwungenen Schwingungen der Platte wird nach der Beziehung

$$A = \frac{\dfrac{m}{M+m} a\omega^2}{\dfrac{4c}{M+m} - \omega^2} = \frac{m a \omega^2}{4c - (M+m)\omega^2}\,, \quad \text{wenn} \quad \omega < \sqrt{\frac{4c}{M+m}}$$

ist, oder nach

$$A = \frac{m a \omega^2}{(M + m)\omega^2 - 4c}, \quad \text{wenn} \quad \omega > \sqrt{\frac{4c}{M + m}}$$

ist, gefunden.

Nun können wir die Federkonstante c, die die Elastizität der Stützen charakterisiert, so ermitteln, daß die Amplitude der Schwingungen der Platte einen im voraus gegebenen Wert α hat. Nehmen wir $A = \alpha$ in der ersten der gewonnenen Gleichungen an, so erhalten wir:

$$\frac{m a \omega^2}{4c - (M + m)\omega^2} = \alpha,$$

woraus

$$c = \frac{\omega^2}{4}\left(M + m + m\frac{a}{\alpha}\right) = \frac{\omega^2}{4g}\left(P + Q + P\frac{a}{\alpha}\right) \tag{5}$$

folgt.

Auf die gleiche Art gibt die zweite Gl. (4) für c den Wert

$$c = \frac{\omega^2}{4g}\left(P + Q - P\frac{a}{\alpha}\right). \tag{6}$$

Wir bemerken, daß die Größe $\sqrt{\frac{4c}{M+m}}$ nichts anderes ist als die Frequenz der freien Schwingungen der kleinen Platte. Bei $\omega = \sqrt{\frac{4c}{M+m}}$ ist $A = \infty$, was der Resonanz entspricht; bei dieser Winkelgeschwindigkeit ω müssen wir sehr bedeutende Schwingungsausschläge erwarten, die gefährlich für die Dauerfestigkeit der Anlage sind. Analoge Erscheinungen eines unruhigen Ganges der Maschine bei bestimmten Winkelgeschwindigkeiten treten recht häufig auf; die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten heißen kritische. Im gegebenen Fall ist die Winkelgeschwindigkeit eine kritische, die durch

$$\omega_{\text{krit.}} = \sqrt{\frac{4c}{M + m}} = \sqrt{\frac{12 E J g}{l^3 (P + Q)}}$$

bestimmt wird.

Wir kehren zu den gewonnenen zwei Ausdrücken der Federkonstanten c (Gl. (5) und (6)) zurück, bei welchen die Schwingungsamplitude der Platte den vorgegebenen Wert α hat, und bemerken, daß die Gl. (6) dem Fall $\omega > \omega_{\text{krit.}}$ entspricht. Wenn die normale Winkelgeschwindigkeit der Maschine größer als die kritische ist, muß bei der Ingangsetzung der Maschine die kritische Winkelgeschwindigkeit durchfahren werden. In diesem Augenblick können gefährliche Erschütterungen der Anlage entstehen. Hieraus folgt, daß die Gl. (6) keine praktische Bedeutung hat; als Berechnungsgleichung gilt die Gl. (5).

Wenn wir $c = \frac{3EJ}{l^3}$ in der Gl. (5) annehmen und die gewonnene Gleichung nach J auflösen, finden wir:

$$J = \frac{l^3 \omega^2}{12 E g}\left(P + Q + P\frac{a}{\alpha}\right).$$

So groß muß also das Trägheitsmoment des Stützenquerschnittes sein, damit die Schwingungsamplitude des Gebäudes, in dem sich die Maschine befindet, gleich der gegebenen Größe α ist.

KAPITEL VIII

DIE RELATIVE BEWEGUNG EINES MATERIELLEN PUNKTES

§ 39. Die relative Bewegung eines materiellen Punktes bei Translation. Die translative Trägheitskraft

In der Kinematik (Teil I des Lehrbuches, Kapitel XVI) haben wir den Begriff der relativen Bewegung eines Punktes in bezug auf irgendein sich bewegendes unveränderliches Medium kennengelernt. Nun wenden wir uns der Dynamik der relativen Bewegung zu. Wir werden uns folgende Aufgabe stellen: Es ist die relative Bewegung eines materiellen Punktes in bezug auf irgendein sich bewegendes Medium zu bestimmen, wenn man die Kräfte kennt, die auf den materiellen Punkt einwirken, sowie die Bewegung des Mediums. Natürlich könnte man diese Aufgabe lösen, indem man zuerst die absolute Bewegung des materiellen Punktes bestimmt. Wenn uns die an diesem Punkt angreifenden Kräfte gegeben wären, könnten wir seine absolute Bewegung durch die uns schon bekannten Verfahren ermitteln; würden wir aber die absolute und translative Bewegung kennen, so könnten wir auch die relative Bewegung unseres Punktes bestimmen. Dieses Problem kann jedoch viel einfacher gelöst werden, ohne vorher die absolute Bewegung des Punktes zu ermitteln. Das dabei angewandte Verfahren, das wir nun darlegen werden, erweist sich in der Praxis häufig als nützlich.

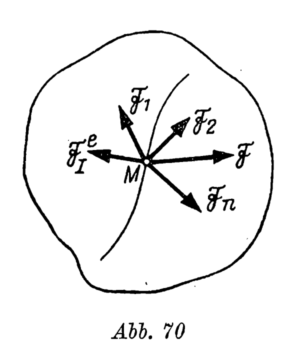


Abb. 70

In diesem Paragraphen werden wir uns mit dem Fall beschäftigen, bei dem die translative Bewegung, d. h. die des Bezugssystems, *fortschreitend* ist.

Wir wollen uns ein unveränderliches Medium und den materiellen Punkt M vorstellen (Abb. 70). Die Bewegung des Mediums, die wir als fortschreitend voraussetzen, nehmen wir als bekannt an. Außerdem sind uns die im Punkte M angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ vorgegeben. Es soll die relative Bewegung des Punktes M in bezug auf das gegebene Medium bestimmt werden.

Bezeichnen wir die Resultierende der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ mit $\mathfrak{F}$ und die absolute Beschleunigung des Punktes M mit $\mathfrak{w}$, so gilt:

$$m\mathfrak{w} = \mathfrak{F}.$$

Andererseits gilt nach dem Theorem der Addition der Beschleunigungen

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_r + \mathfrak{w}_e,$$

wobei $\mathfrak{w}_r$ und $\mathfrak{w}_e$ die relative und die translative Beschleunigung oder Führungsbeschleunigung des Punktes M sind.

Setzen wir diesen Ausdruck $\mathfrak{w}$ in die vorhergehende Gleichung ein, so finden wir

$$m\,\mathfrak{w}_r + m\,\mathfrak{w}_e = \mathfrak{F};$$

daraus folgt

$$m\,\mathfrak{w}_r = \mathfrak{F} - m\,\mathfrak{w}_e.$$

Wir führen nun den Vektor $\mathfrak{F}_I^e = -m\mathfrak{w}_e$ ein, der *seinem Betrage nach gleich dem Produkt* $m\mathfrak{w}_e$ *und entgegengesetzt der Beschleunigung* $\mathfrak{w}_e$ *gerichtet ist.* Diesen Vektor werden wir die *Trägheitskraft des Punktes M* in der translativen Bewegung nennen, oder kürzer, die translative Trägheitskraft des Punktes M. Da wir die translative Bewegung als gegeben annehmen, können wir auch die translative Beschleunigung $\mathfrak{w}_e$ und folglich auch die translative Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^e$ als bekannt voraussetzen.

Die gewonnene Gleichung können wir nun folgendermaßen schreiben:

$$m\,\mathfrak{w}_r = \mathfrak{F} + \mathfrak{F}_I^e.$$

Wenn wir uns daran erinnern, daß die Resultierende $\mathfrak{F}$ gleich der Summe der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ ist, erhalten wir endgültig

$$m\,\mathfrak{w}_r = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \cdots + \mathfrak{F}_n + \mathfrak{F}_I^e.$$

Dies ist die Gleichung, die den Zusammenhang zwischen der Beschleunigung des Punktes M in seiner relativen Bewegung und den angreifenden Kräften angibt. Wir sehen, daß sich diese Gleichung von der Grundgleichung der Dynamik, die sich auf die absolute Bewegung des Punktes bezieht, nur durch das Vorhandensein des zusätzlichen Gliedes $\mathfrak{F}_I^e$ unterscheidet.

Hieraus müssen wir schließen, daß die relative Bewegung des materiellen Punktes M unter der Wirkung der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ genauso vor sich geht, wie die absolute Bewegung desselben Punktes unter der Wirkung der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ und der translativen Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^e$ vor sich gehen würde. *Wenn also die translative Bewegung fortschreitend ist, verläuft die relative Bewegung des materiellen Punktes wie die absolute Bewegung unter der Wirkung der angreifenden Kräfte und der translativen Trägheitskraft.*

Das gewonnene Resultat gibt folgendes einfache Verfahren für die Lösung der Frage der relativen Bewegung eines materiellen Punktes im Falle einer fortschreitenden translativen Bewegung. Fügen wir in Gedanken zu den angreifenden Kräften die translative Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^e$ hinzu und lösen danach die Frage der relativen Bewegung des gegebenen Punktes so, als ob es sich um die absolute Bewegung dieses Punktes handelte. Wenn wir die translative Trägheitskraft einführen, haben wir das Recht, bei der relativen Bewegung des Punktes alle die Verfahren anzuwenden, die in den vorhergehenden Kapiteln in bezug auf die absolute Bewegung dargelegt sind.

Wie wir sehen, liegt der Gedanke des dargelegten Verfahrens sehr nahe dem, der der Methode der Kinetostatik zugrunde liegt. Ähnlich wie wir durch Einführung der Trägheitskraft, die der absoluten Bewegung des Punktes entspricht, eine Aufgabe

der Dynamik in eine Aufgabe der Statik verwandeln, führen wir ganz ebenso hier durch die Einführung der Trägheitskraft, die der translativen Bewegung entspricht, die Aufgabe der relativen Bewegung auf die Aufgabe der absoluten Bewegung des Punktes zurück.

Wir bemerken, daß $\mathfrak{w}_e = 0$ und folglich auch $\mathfrak{F}_I^e = 0$ ist, wenn die fortschreitende translative Bewegung des Mediums *geradlinig und gleichförmig* ist. In diesem Falle unterscheidet sich die Gleichung, die die relative Beschleunigung des materiellen Punktes bestimmt, nicht von der Grundgleichung der Dynamik, die die absolute Beschleunigung des Punktes bestimmt. Vom dynamischen Standpunkt aus unterscheidet sich die relative Bewegung in diesem Spezialfall nicht von der absoluten Bewegung; die relative Bewegung in bezug auf das Medium, das sich geradlinig und gleichförmig bewegt, erfolgt genauso, als ob das Medium unbeweglich wäre.

Hieraus ersehen wir, daß wir aus der Beobachtung der relativen Bewegungen, die in einem Medium vor sich gehen, das sich geradlinig und gleichförmig bewegt, keinerlei Schlußfolgerungen ziehen können, ob das Medium sich bewegt oder sich in Ruhe befindet. *Keinerlei mechanische Erscheinungen, die im Medium vor sich gehen, können dessen geradlinige und gleichförmige Bewegung aufdecken.* Dies ist das Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik[1].

Im § 2 haben wir jene Koordinatenachsen als Grundkoordinatenachsen der Mechanik bezeichnet, auf welche die absolute Bewegung bezogen werden muß (d. h. die Bewegung, von der im ersten und im zweiten Axiom der Dynamik die Rede ist). Aus dem Gesagten geht hervor, daß es eine unzählige Menge von Systemen solcher Grundachsen gibt: Jedes Achsensystem, das sich in bezug auf die Grundachsen geradlinig und gleichförmig bewegt, erscheint selbst als ein System von Grundachsen (diese Achsensysteme heißen „Trägheitssysteme“ oder „Inertialsysteme“). Alle auf alle diese Achsensysteme bezogenen Bewegungen sind dynamisch gleichwertig, sie können alle in gleichem Maße mit dem Ausdruck „absolute Bewegung“ bezeichnet werden.

§ 40. Die Schwingungen des Pendels von Dedouis

Wir wollen das dargelegte Verfahren auf mehrere Beispiele anwenden.

Im § 6 (Beispiel 1) wurde das Verfahren von Dedouis bei der Bestimmung der Beschleunigung eines Zuges aus den Abweichungen eines in einem der Waggons aufgehängten Pendels erklärt. An der erwähnten Stelle haben wir vorausgesetzt, daß die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ des Zuges eine konstante Größe ist und daß das Pendel sich in seiner Gleichgewichtslage befindet, wenn es mit der Vertikalen den konstanten Winkel α bildet. Für den Gleichgewichtswinkel der Abweichung α erhielten wir die Beziehung

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{w}{g} \tag{1}$$

[1] Die Unmöglichkeit der Aufdeckung der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung des Mediums nicht nur durch mechanische, sondern überhaupt durch irgendwelche physikalische Erscheinungen, die in diesem Medium vor sich gehen, bildet den wesentlichen Inhalt der sogenannten speziellen Relativitätstheorie von Einstein.

und daraus

$$w = g \operatorname{tg} \alpha . \tag{2}$$

Indem wir vorläufig die Voraussetzung, daß der Zug sich mit einer *konstanten Beschleunigung* $\mathfrak{w}$ bewegt, bestehen lassen, nehmen wir an, daß das Pendel aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist, und bestimmen die Bewegung des Pendels.

Die im bewegten Waggon beobachtete Bewegung des Pendels ist nichts anderes als seine relative Bewegung in bezug auf den sich bewegenden Waggon. Da wir die Bewegung des Waggonkastens als fortschreitend annehmen können, so kann in der gegebenen Aufgabe das im vorhergehenden Paragraphen dargelegte Verfahren angewandt werden.

Wir vermerken die Gleichgewichtsstellung des Pendels, die von der Vertikalen um den Winkel α abgelenkt ist, und setzen voraus, daß im gegebenen Augenblick das Pendel mit seiner Gleichgewichtslage den Winkel φ bildet (Abb. 71). Wir stellen die Differentialgleichung auf, die den Winkel φ bestimmt.

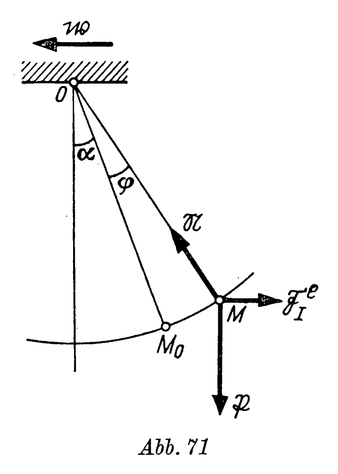


Abb. 71

Auf die kleine Last M (wir betrachten sie als einen materiellen Punkt) wirkt ihr Gewicht $\mathfrak{P}$ und die Reaktion $\mathfrak{N}$ des Pendelstabes. Wir fügen jetzt die translative Trägheitskraft $\mathfrak{J}_I^e = -m\mathfrak{w}$ zu diesen Kräften hinzu, wobei m die Masse der kleinen Last und $\mathfrak{w}$ die Beschleunigung des Zuges (d. h. die translative Beschleunigung des Punktes M) ist. Diese Kraft $\mathfrak{J}_I^e$ richten wir entgegengesetzt der Beschleunigung des Zuges (die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ in der Abb. 71 nehmen wir als von rechts nach links gerichtet an, was durch einen Pfeil angegeben ist). Fügen wir zu den angreifenden Kräften die translative Trägheitskraft hinzu, so haben wir das Recht, die Bewegung des Pendels im bewegten Waggon als absolute Bewegung anzusehen.

Wir bedienen uns des Momentensatzes und wählen als Momentenachse die Drehachse des Pendels (d. h. die Achse, die durch den Aufhängungspunkt O hindurchgeht und senkrecht zur Abbildungsebene gerichtet ist); wir wollen diese Achse die z-Achse nennen. Nach dem Momentensatz finden wir

$$\frac{\mathrm{d}\, l z}{\mathrm{d}\, t} = M_{1z} + M_{2z} + M_{3z}, \tag{3}$$

wobei l_z das Moment der Bewegungsgröße des materiellen Punktes M in bezug auf die z-Achse ist, M_{1z}, M_{2z} und M_{3z} dagegen bezeichnen die Momente der Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{J}_I^e$ in bezug auf dieselbe Achse. Bezeichnen wir die Länge des Pendels OM mit l, so erhalten wir:

$$l_z = m v l ,$$

wobei v die Größe der Geschwindigkeit des Punktes M ist. Da $v = l\dot{\varphi}$, gilt

$$l_z = m\, l^2\, \dot{\varphi}\,.$$

Setzen wir diesen Ausdruck l_z und auch die Werte der Momente der Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{F}_I^e$ in die Gleichung (3) ein, so erhalten wir

$$m\, l^2\, \ddot{\varphi} = -\, P\, l \sin(\alpha + \varphi) + F_I^e\, l \cos(\alpha + \varphi)\,.$$

Nehmen wir $F_I^e = mw$ an und kürzen durch ml^2, so finden wir:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\alpha + \varphi) - \frac{w}{l}\cos(\alpha + \varphi) = 0\,. \tag{4}$$

Hier hat der Winkel α die durch die Gl. (1) bestimmte Bedeutung. Dies ist die Differentialgleichung, durch die der Winkel φ bestimmt wird. Wir werden uns nicht mit der Integration der gewonnenen Gleichung aufhalten (diese wird nicht mit Hilfe elementarer Funktionen integriert), sondern setzen voraus, daß unser Pendel nur unbedeutend von seiner Gleichgewichtslage abweicht; dementsprechend nehmen wir den Winkel φ als einen kleinen Winkel an. In diesem Fall gilt annähernd:

$$\sin(\alpha + \varphi) = \sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi \cong \sin\alpha + \varphi\cos\alpha\,,$$

$$\cos(\alpha + \varphi) = \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi \cong \cos\alpha - \varphi\sin\alpha\,.$$

Wenn wir diese Ausdrücke $\sin(\alpha + \varphi)$ und $\cos(\alpha + \varphi)$ in die Gl. (4) einsetzen, erhalten wir die folgende Näherungsgleichung der Bewegung des Pendels im Falle kleiner Abweichungen von der Gleichgewichtslage:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}(\sin\alpha + \varphi\cos\alpha) - \frac{w}{l}(\cos\alpha - \varphi\sin\alpha) = 0\,,$$

oder

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\alpha - \frac{w}{l}\cos\alpha + \varphi\left(\frac{g}{l}\cos\alpha + \frac{w}{l}\sin\alpha\right) = 0\,.$$

Setzen wir hier auf Grund der Gl. (1)

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + w^2}}\,, \qquad \sin\alpha = \cos\alpha\operatorname{tg}\alpha = \frac{w}{\sqrt{g^2 + w^2}}\,,$$

so finden wir

$$\ddot{\varphi} + \frac{\sqrt{g^2 + w^2}}{l}\,\varphi = 0\,.$$

Damit haben wir die Differentialgleichung der freien Schwingungen gewonnen. Wir schließen, daß bei kleinen Abweichungen aus der Gleichgewichtslage das Pendel

harmonische Schwingungen um diese Lage herum ausführt. Die Frequenz dieser Schwingungen ist gleich

$$\sqrt{\frac{\sqrt{g^2 + w^2}}{l}}.$$

Die Schwingungsdauer T dieser Schwingungen wird durch die Gleichung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + w^2}}}$$

bestimmt.

Wir wollen nun zu dem Fall übergehen, wo die Beschleunigung w des Zuges keine konstante Größe ist (denn dieser Fall besteht in Wirklichkeit). In diesem Fall kann man nicht von der Gleichgewichtslage des Pendels, vom Gleichgewichtswinkel der Abweichung α sprechen. Es fragt sich, wie jetzt der Zusammenhang zwischen der Beschleunigung des Zuges und dem Abweichungswinkel des Pendels sein wird.

Wir werden den Ausschlagswinkel φ von der vertikalen Lage des Pendels aus zählen (Abb. 72). Stellen wir die Differentialgleichung für den variablen Winkel φ auf. Wir führen wieder die translative Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^e = -m\mathfrak{w}_e$ ein, wenden den Momentensatz in bezug auf die Aufhängeachse des Pendels an und erhalten die Gleichung

$$m l^2 \ddot{\varphi} = -P l \sin\varphi + m w l \cos\varphi$$

oder

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = \frac{w}{l}\cos\varphi. \tag{5}$$

Hieraus finden wir

$$w = g\,\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{l\ddot{\varphi}}{\cos\varphi}. \tag{6}$$

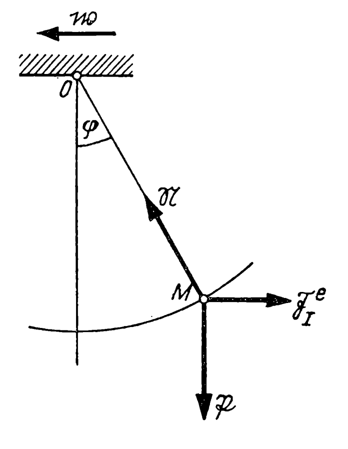


Abb. 72

Durch diese Gleichung muß die elementare Gl. (2) bei variablen w und φ ersetzt werden. Wir sehen, daß sich die soeben gewonnene Gleichung von der Gl. (2) nur durch das zusätzliche Glied $\frac{l\ddot{\varphi}}{\cos\varphi}$ unterscheidet. Wenn aus der Beobachtung der Abweichung des Pendels die Abhängigkeit des Winkels φ von der Zeit bekannt ist, dann kann dieses Korrekturglied leicht errechnet werden. In dem Falle, wenn die Abhängigkeit des Winkels φ von der Zeit graphisch gegeben ist (in den Versuchen von DEDOUIS wurde der Abweichungswinkel φ automatisch durch die schreibende Spitze, die an der kleinen Last M befestigt ist, eingetragen), kann das Verfahren der graphischen Differentiation angewandt werden.

Es wäre natürlich wünschenswert, die einfache Gl. (2) auch im Falle einer variablen Beschleunigung des Zuges beizubehalten. Wir wollen untersuchen, in welchem Fall

diese Formel genügend genaue Resultate bei einem variablen w geben wird, d. h., unter welchen Bedingungen der Ausschlagswinkel des Pendels in jedem Augenblick nahe dem Gleichgewichtswinkel sein wird, welcher der Beschleunigung w entsprechen würde, wenn diese Beschleunigung konstant wäre. Um uns das klarzumachen, setzen wir der Einfachheit halber voraus, daß der Ausschlagswinkel φ die ganze Zeit über ein kleiner Winkel bleibt (was hinreichend genau der Wirklichkeit entspricht). In diesem Falle nimmt die Gl. (5) folgende Form an:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = \frac{w}{l}. \tag{7}$$

Wir erhalten den Gleichgewichtswert des Winkels φ, der der gegebenen konstanten Beschleunigung w entspricht, wenn wir hier $w = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ annehmen. Es gilt dann:

$$\varphi = \frac{w}{g} \tag{8}$$

(was der Gl. (1) entspricht, in welcher $\alpha = \varphi$ gesetzt und $\operatorname{tg}\varphi$ durch φ ersetzt ist).

Um den tatsächlichen Vorgang der Veränderung des Winkels φ bei einer gegebenen variablen Beschleunigung w zu bestimmen, müssen wir die Gl. (7) integrieren.

Wir wollen die einfachste Gesetzmäßigkeit der Veränderung der Beschleunigung w wählen: Wir nehmen an, daß die Beschleunigung w proportional der Zeit anwächst, indem sie sich von 0 bis zu einem Wert w_0 während der Zeit τ verändert.

Dementsprechend setzen wir

$$w = \frac{w_0}{\tau} t.$$

Setzen wir diesen Ausdruck w in die Gl. (7) ein, so erhalten wir

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = \frac{w_0}{l\tau} t.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Diese Gleichung hat die Partikulärlösung:

$$\varphi = \frac{w_0}{g\tau} t.$$

Fügen wir zu dieser Partikulärlösung die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung hinzu, so erhalten wir die allgemeine Lösung unserer Gleichung

$$\varphi = \frac{w_0}{g\tau} t + C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{9}$$

wobei $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ist und C_1 und C_2 beliebige Konstanten sind.

Wir setzen im ersten Gliede dieser Formel $\frac{w_0}{\tau} t = w$, dann ist

$$\varphi = \frac{w}{g} + C_1 \cos k t + C_2 \sin k t .$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit der Gl. (8), so sehen wir, daß der tatsächliche Ausdruck für den Winkel φ sich von dem Ausdruck dieses durch die Gl. (8) bestimmten Winkels durch die beiden letzten Glieder unterscheidet, die den freien Schwingungen des Pendels entsprechen. Wir bestimmen die Amplitude dieser freien Schwingungen, indem wir voraussetzen, daß sich das Pendel im Anfangsaugenblick in vertikaler Lage in Ruhe befand. Nehmen wir $t = 0$, $\varphi = 0$ und $\dot{\varphi} = 0$ in der Gl. (9) und in der Gleichung

$$\dot{\varphi} = \frac{w_0}{g \tau} - C_1 k \sin k t + C_2 k \cos k t$$

an, so erhalten wir

$$C_1 = 0 , \qquad C_2 = - \frac{w_0}{g k \tau} .$$

Wir setzen diese Ausdrücke C_1 und C_2 in die Gl. (9) ein und finden

$$\varphi = \frac{w_0}{g \tau} t - \frac{w_0}{g k \tau} \sin k t .$$

Wie man sieht, ist die Amplitude der freien Schwingungen des Pendels (wir bezeichnen sie mit dem Buchstaben a) gleich

$$a = \frac{w_0}{g k \tau} = \frac{w_0}{2 \pi g} \frac{T}{\tau} ,$$

wobei T die Schwingungsdauer der freien Schwingungen des Pendels ist. Aus dieser Formel folgt, daß die Amplitude a um so kleiner ist, je kleiner das Verhältnis $T : \tau$ ist. Folglich wird die tatsächliche Größe des Winkels φ in jedem Augenblick um so näher dem durch die Gl. (8) bestimmten Wert sein, je kleiner die Schwingungsdauer der freien Schwingungen des Pendels im Vergleich zu der Zeit der Beschleunigungssteigerung des Zuges ist.

Hieraus kommen wir zu folgender Schlußfolgerung: Damit der Zusammenhang zwischen der Beschleunigung w des Zuges und dem Ausschlagswinkel φ des Pendels, der durch die Gl. (8) bestimmt ist, in einem möglichst kleinen Maße durch die freien Schwingungen des Pendels verzerrt wird, ist es notwendig, daß das Pendel eine möglichst kleine Schwingungsdauer (oder eine möglichst große Frequenz) der freien Schwingungen hat.

Zu einem analogen Resultat gelangten wir, als wir die Frage der Genauigkeit des Indikatorstandes betrachteten (siehe § 37). Eine hohe Eigenfrequenz ist überhaupt eine notwendige Bedingung in allen den Fällen, wo zum Messen einer variablen Kraft (des Dampfdruckes im Fall eines Indikators, der translativen Trägheitskraft in dem in diesem Paragraphen betrachteten Fall) ein Dynamometer verwendet wird, welches eigene oder freie Schwingungen ausführt.

§ 41. Der Seismograph für die Aufzeichnung horizontaler Schwingungen

Seismographen nennt man die Apparate, die in seismischen Stationen zum Aufzeichnen von Erdschwankungen aufgestellt werden. Wir wollen den einfachsten Typ eines Seismographen betrachten, der zur Aufzeichnung von horizontalen Erdschwankungen dient.

Stellen wir uns ein gewöhnliches Pendel vor, das sich in einem unterirdischen Raum befindet (Abb. 73). Wenn es keine Erdschwankungen gibt, befindet sich das Pendel in seiner vertikalen Gleichgewichtslage OM_0. Wenn nun der Boden horizontale Schwingungen ausführt, werden diese Schwingungen ein Schwingen des Pendels hervorrufen, das mit Hilfe der an dem Pendel befestigten schreibenden Spitze aufgezeichnet wird. Wir wollen sehen, wie der Zusammenhang zwischen den Schwingungen des Bodens und der Bewegung des Pendels ist.

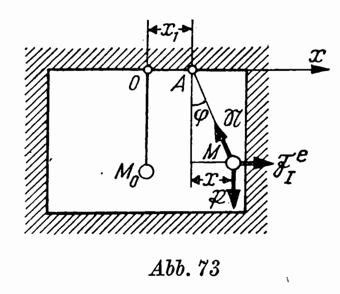


Abb. 73

Die Schwingungen des Pendels, die auf diese Art aufgezeichnet werden, stellen nichts anderes dar als die relative Bewegung des Pendels in bezug auf den schwingenden Boden. Wir wollen die Differentialgleichung der Schwingungen des Pendels aufstellen.

Wir werden die Bewegung des Bodens als fortschreitend voraussetzen und annehmen, daß der Boden harmonische Schwingungen ausführt. Die Aufhängeachse des Pendels nimmt im gegebenen Augenblick, indem sie sich zusammen mit dem sie umgebenden Boden verschiebt, die Lage A ein. Bezeichnen wir OA mit x_1 (die x-Achse ist in der Abb. 73 von links nach rechts gerichtet), so ist

$$x_1 = \alpha \sin p t,$$

wobei α die Amplitude und p die Frequenz der Bodenschwingungen ist.

Am Körper M (wir betrachten ihn als materiellen Punkt) greifen die Schwerkraft $\mathfrak{P}$ und die Reaktion $\mathfrak{N}$ des Pendelstabes an. Wir fügen zu diesen Kräften die translative Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^e = - m\mathfrak{w}_e$ hinzu, wobei m die Masse des Körpers M ist und $\mathfrak{w}_e$ die Beschleunigung der Bewegung des Bodens oder, was dasselbe ist, die Beschleunigung des Punktes A. Wir wollen jetzt diese Beschleunigung bestimmen.

Die Projektion der Beschleunigung $\mathfrak{w}_e$ auf die x-Achse ist gleich

$$\ddot{x}_1 = - \alpha p^2 \sin p t.$$

Hieraus folgt, daß $w_e = \alpha p^2 \sin pt$ ist, wobei die Beschleunigung $\mathfrak{w}_e$ nach der Seite der negativen x-Achse gerichtet ist, d. h. von rechts nach links (wenn $\sin pt > 0$). Folglich ist

$$F_I^e = m \alpha p^2 \sin p t,$$

wobei die Kraft $\mathfrak{F}_I^e$ von links nach rechts gerichtet ist (wenn $\sin pt > 0$).

Wir wollen nun den Momentensatz benutzen, indem wir als Momentenachse die Drehachse A des Pendels wählen; wir nennen diese Achse die z-Achse. Bezeichnen wir die Länge des Pendels AM mit l und seinen Ausschlagswinkel von der Vertikalen mit φ, so erhalten wir (wie im vorhergehenden Paragraphen)

$$l_z = m\, l^2\, \ddot{\varphi}.$$

Nach dem Momentensatz gilt:

$$ml^2\, \ddot{\varphi} = -P\, l \sin\varphi - F_I^e\, l \cos\varphi$$

oder, wenn wir den Ausdruck der Trägheitskraft F_I^e substituieren und durch ml^2 dividieren:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = \frac{\alpha\, p^2}{l} \sin p\, t \cos\varphi.$$

Wir beschränken uns auf den Fall der kleinen Pendelschwingungen.

Nehmen wir $\sin\varphi = \varphi$ und $\cos\varphi = 1$ an, so finden wir

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = \frac{\alpha\, p^2}{l} \sin p\, t.$$

Wir führen anstatt des Winkels φ die horizontale Abweichung x des Punktes M von der Vertikalen ein, die durch den Aufhängungspunkt A hindurchgeht. Nehmen wir (in Anbetracht der Kleinheit des Winkels φ) $x = l\varphi$ an, so ergibt sich die Gleichung

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}\, x = \alpha\, p^2 \sin p\, t.$$

Dies ist die Differentialgleichung der kleinen Pendelschwingungen, sie ist die Differentialgleichung einer erzwungenen Schwingung.

Wir integrieren diese Gleichung nach den im § 35 dargelegten Regeln und erhalten:

$$x = a \sin(k\, t + \beta) + \alpha \frac{p^2}{k^2 - p^2} \sin p\, t,$$

wobei $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$ die Frequenz der freien Pendelschwingungen ist und a, β willkürliche, aus den Anfangsbedingungen bestimmbare Konstanten sind.

Somit setzt sich die Bewegung des Pendels aus freien und erzwungenen Schwingungen zusammen. Wenn wir uns daran erinnern, daß die Bewegung des Bodens nach der Gleichung

$$x_1 = \alpha \sin p\, t$$

vor sich geht, sehen wir, daß die erzwungenen Schwingungen des Pendels die Bodenschwingungen kopieren, indem sie dieselben im Verhältnis

$$\frac{p^2}{k^2 - p^2} = \frac{1}{\left(\frac{k}{p}\right)^2 - 1}$$

vergrößern oder verringern.

Wenn es keine freien Schwingungen gäbe, würde die Aufzeichnung der Pendelschwingungen eine richtige Registrierung der Bodenschwankungen ergeben. Die freien Pendelschwingungen verzerren jedoch diese Registrierung. Man kann sich überzeugen (ähnlich wie das im § 38 bei der Untersuchung der Indikatorschwingungen geschah), daß die Verzerrung durch die freien Schwingungen in dem Fall unbedeutend sein wird, wenn $p:k$ eine kleine Größe ist, d. h., wenn das Pendel eine hohe Eigenfrequenz k hat. Wenn aber $p:k$ klein ist, dann ist das Verhältnis

$$\frac{1}{\left(\frac{k}{p}\right)^2 - 1}$$

eine kleine Größe und folglich wird auch die Amplitude der erzwungenen Pendelschwingungen

$$\frac{\alpha}{\left(\frac{k}{p}\right)^2 - 1}$$

unbedeutend sein, d. h., das Pendel wird wenig empfindlich gegen Bodenschwankungen sein.

Daher muß der Kampf mit den freien Schwingungen anders geführt werden, und zwar wird ein großer Widerstand (Dämpfung) eingeführt, der, wie wir gesehen haben, die freien Schwingungen löscht. Nehmen wir den Widerstand als proportional der Geschwindigkeit an, so erhalten wir folgende Differentialgleichung der Pendelschwingungen:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \frac{g}{l}x = \alpha p^2 \sin pt,$$

wobei n die Dämpfungskonstante ist. In diesem Fall wird die Amplitude der erzwungenen Pendelschwingungen durch den Ausdruck (siehe § 37)

$$\frac{\alpha p^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\left(\frac{k^2}{p^2} - 1\right)^2 + 4\frac{n^2}{p^2}}}$$

dargestellt.

Auf den Seismographenstationen der UdSSR haben die Seismographen eine besondere elektromagnetische Dämpfung, die bis zur Grenze der Aperiodizität geführt wird ($n = k$). In einem solchen Falle wird die Amplitude der erzwungenen Pendelschwingungen durch die Gleichung

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\left(\frac{k^2}{p^2} - 1\right)^2 + 4\frac{k^2}{p^2}}} = \frac{\alpha}{\frac{k^2}{p^2} + 1}$$

dargestellt.

Es ist leicht einzusehen, daß diese Größe in den Grenzen zwischen 0 und α eingeschlossen ist; sie ist um so größer, je kleiner das Verhältnis $k:p$ ist. Das Pendel wird daher um so empfindlicher sein, je kleiner die Eigenfrequenz k ist.

Das ist der Grund, weshalb man bemüht ist, in den Seismographen die Eigenfrequenz des Apparates zu verringern (oder die Schwingungsdauer zu vergrößern). Dies wird dadurch erreicht, daß die Drehachse des Pendels nicht horizontal, sondern fast vertikal angeordnet wird (das horizontale Pendel), oder dadurch, daß das Pendel umgekehrt aufgestellt wird (das astatische Pendel, siehe § 34), oder auf andere Art[1].

Die hier dargelegten Erwägungen sind auf alle Apparate, die zur Aufzeichnung von Schwingungen dienen, anwendbar.

§ 42. Die Relativbewegung eines materiellen Punktes bei Rotation Die zentrifugale, die tangentiale und die Coriolis-Trägheitskraft

Wir wenden uns nun der Betrachtung jenes Falles zu, wo die übertragene Bewegung eine Rotation um eine feste Achse ist.

Wir wollen uns ein starres Bezugssystem, das um die z-Achse rotiert, und den materiellen Punkt M vorstellen (Abb. 74). Uns sind die rotierende Bewegung des Mediums (die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung des Mediums bezeichnen wir mit ω und ε) und auch die am Punkte M angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ gegeben; die Resultierende dieser Kräfte bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}$. Es soll jetzt die Relativbewegung des Punktes M in bezug auf das gegebene Medium bestimmt werden.

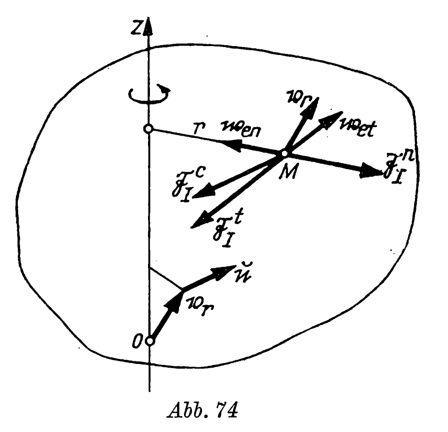


Abb. 74

Wir greifen wieder zu der Grundgleichung der Dynamik, die die absolute Beschleunigung $\mathfrak{w}$ des Punktes M bestimmt:

$$m\mathfrak{w} = \mathfrak{F}.$$

Nach dem Theorem von der Addition der Beschleunigungen ergibt sich:

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_r + \mathfrak{w}_e + \mathfrak{w}_c,$$

wobei $\mathfrak{w}_r$, $\mathfrak{w}_e$ und $\mathfrak{w}_c$ die relative, die translative[2] und die Coriolisbeschleunigung des Punktes M sind. Die übertragene Beschleunigung $\mathfrak{w}_e$, als Beschleunigung des Punktes des rotierenden Mediums, ist ihrerseits gleich der Summe zweier Komponenten: der zentripetalen $\mathfrak{w}_{en}$ und der tangentialen Beschleunigung $\mathfrak{w}_{et}$:

$$\mathfrak{w}_e = \mathfrak{w}_{en} + \mathfrak{w}_{et}.$$

[1] Ausführlichere Berichte über den Bau und die Theorie der Seismographen kann man im Buch: B. B. Golizyn, „Lektionen in der Seismometrie“, finden. Б. Б. Голицын, Лекции по сейсмометрии, 1912.

[2] Die translative Beschleunigung wird im Deutschen auch als Führungsbeschleunigung bezeichnet. (Anm. d. Red.)

Folglich ist

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_r + \mathfrak{w}_{en} + \mathfrak{w}_{et} + \mathfrak{w}_c.$$

Setzen wir diesen Ausdruck für $\mathfrak{w}$ in die Grundgleichung der Dynamik ein, so erhalten wir:

$$m\,\mathfrak{w}_r + m\,\mathfrak{w}_{en} + m\,\mathfrak{w}_{et} + m\,\mathfrak{w}_c = \mathfrak{F};$$

daraus folgt:

$$m\,\mathfrak{w}_r = \mathfrak{F} - m\,\mathfrak{w}_{en} - m\,\mathfrak{w}_{et} - m\,\mathfrak{w}_c.$$

Wir führen drei Vektoren ein:

$$\mathfrak{F}_I^n = -\,m\,\mathfrak{w}_{en}, \qquad \mathfrak{F}_I^t = -\,m\,\mathfrak{w}_{et}, \qquad \mathfrak{F}_I^c = -\,m\,\mathfrak{w}_c,$$

die der Größe nach gleich den Produkten mw_{en}, mw_{et} und mw_c und entgegengesetzt *den Beschleunigungen* $\mathfrak{w}_{en}$, $\mathfrak{w}_{et}$ und $\mathfrak{w}_c$ *gerichtet* sind. Diese Vektoren wollen wir die *zentrifugale*, *die tangentiale und die Coriolis-Trägheitskraft* nennen. Es gilt:

$$m\,\mathfrak{w}_r = \mathfrak{F} + \mathfrak{F}_I^n + \mathfrak{F}_I^t + \mathfrak{F}_I^c.$$

Wenn wir im Auge behalten, daß die Resultierende $\mathfrak{F}$ gleich der Summe der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ ist, erhalten wir endgültig:

$$m\,\mathfrak{w}_r = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \cdots + \mathfrak{F}_n + \mathfrak{F}_I^n + \mathfrak{F}_I^t + \mathfrak{F}_I^c.$$

Durch diese Gleichung wird die Relativbewegung des Punktes M in bezug auf das rotierende System bestimmt. Vergleichen wir diese Gleichung mit der Grundgleichung der Dynamik, so können wir schließen, daß die Relativbewegung des Punktes M genauso vor sich geht, wie die absolute Bewegung desselben Punktes unter der Einwirkung der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ und der drei Trägheitskräfte $\mathfrak{F}_I^n$, $\mathfrak{F}_I^t$ und $\mathfrak{F}_I^c$ vor sich gehen würde.

Wenn also das Bezugssystem rotiert, verläuft die Relativbewegung des materiellen Punktes wie eine absolute Bewegung unter der Einwirkung der angreifenden Kräfte und drei zusätzlicher Trägheitskräfte: der zentrifugalen, der tangentialen und der Coriolis-Trägheitskraft.

Hieraus folgt, daß es genügt, zur Lösung der Frage der Relativbewegung eines materiellen Punktes in bezug auf das rotierende Medium in Gedanken zu den angreifenden Kräften die drei Trägheitskräfte $\mathfrak{F}_I^n$, $\mathfrak{F}_I^t$ und $\mathfrak{F}_I^c$ hinzuzufügen und danach die Aufgabe so zu lösen, als handelte es sich um die absolute Bewegung des Punktes.

Was die Trägheitskräfte $\mathfrak{F}_I^n$, $\mathfrak{F}_I^t$ und $\mathfrak{F}_I^c$ anbetrifft, so sind diese, wie bereits gesagt, der Größe nach gleich den Produkten mw_{en}, mw_{et} bzw. mw_c und entgegengesetzt den Beschleunigungen $\mathfrak{w}_{en}$, $\mathfrak{w}_{et}$ und $\mathfrak{w}_c$ gerichtet. Ferner gilt:

$$w_{en} = r\,\omega^2$$

$$w_{et} = r\,\varepsilon,$$

wobei ω und ε die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung des Mediums sind, und r das von dem Punkte M auf die Rotationsachse des Mediums gefällte Lot ist. Die Beschleunigung w_{en} ist längs des Radius r zur Rotationsachse hin gerichtet;

die Beschleunigung $\mathfrak{w}_{et}$ ist senkrecht zum Radius r (und senkrecht zur z-Achse) gerichtet, und zwar nach der positiven Seite, wenn $\varepsilon > 0$, und nach der negativen Seite, wenn $\varepsilon < 0$. Hieraus folgt:

$$F_I^n = m r \omega^2,$$

$$F_I^t = m r \varepsilon,$$

wobei die zentrifugale Trägheitskraft F_I^n längs des Radius r von der Drehachse z weg gerichtet ist, während die tangentiale Trägheitskraft F_I^t jedoch senkrecht zum Radius r nach der der Beschleunigung $\mathfrak{w}_{et}$ entgegengesetzten Seite gerichtet ist.

Die Coriolis-Beschleunigung $\mathfrak{w}_c$ wird durch die Gleichung (Teil I des Lehrbuches, § 100)

$$\mathfrak{w}_c = 2\,\mathfrak{u}$$

bestimmt, wobei $\mathfrak{u}$ die Umfangsgeschwindigkeit eines Vektors um die z-Achse ist, der von einem beliebigen Punkt dieser Achse abgetragen und gleich der relativen Geschwindigkeit v_r des Punktes M ist. Da $u = v_r\,\omega \cdot \sin\,(\mathfrak{v}_r, z)$ ist, gilt

$$F_I^c = 2\,m\,u = 2\,m\,v_r\,\omega \sin(\mathfrak{v}_r, z),$$

wobei die Richtung der Coriolis-Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^c$ entgegengesetzt der Richtung der Beschleunigung $\mathfrak{w}_c$ ist.

Wir sehen, daß $\varepsilon = 0$ und folglich $F_I^t = 0$ ist, wenn das Medium *gleichförmig* (ω = const) rotiert. In diesem Fall (der am häufigsten bei der Anwendung vorkommt) müssen in die Betrachtung nur zwei Trägheitskräfte eingeführt werden: die zentrifugale und die Coriolis-Trägheitskraft.

Nach Einführung der Trägheitskräfte $\mathfrak{F}_I^n$, $\mathfrak{F}_I^t$, $\mathfrak{F}_I^c$ haben wir das Recht, bei der Relativbewegung des materiellen Punktes alle Gesetze der absoluten Bewegung anzuwenden. Es ist noch wichtig, die Aufmerksamkeit auf einen Umstand zu lenken, den man im Auge behalten muß, wenn man bei der Relativbewegung das Gesetz der kinetischen Energie anwendet. Die Coriolis-Beschleunigung $\mathfrak{w}_c$ und folglich auch die Coriolis-Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^c$ sind senkrecht zu der relativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ gerichtet. Hieraus folgt, daß die Arbeit der Coriolis-Trägheitskraft bei jeder Verschiebung des Punktes während seiner Relativbewegung gleich Null ist. Wenn wir das Gesetz der kinetischen Energie bei der Relativbewegung anwenden, müssen also außer der Arbeit der angreifenden Kräfte nur die Arbeiten der zentrifugalen und der tangentialen Trägheitskraft berücksichtigt werden.

§ 43. Die Schwingungen eines Zentrifugalregulators

Wir wollen das im vorhergehenden Paragraphen dargelegte Verfahren auf einige Beispiele anwenden.

Im § 6 (Beispiel 3) wurde das Schema eines Zentrifugalregulators betrachtet. Wir bestimmten die Gleichgewichtslage des Regulators, die einer bestimmten konstanten

Winkelgeschwindigkeit entsprach. Indem wir die Kugeln M und M_1 (Abb. 8) als materielle Punkte betrachteten und die Massen der übrigen Teile des Mechanismus vernachlässigten, sahen wir, daß bei gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω des Regulators die Stäbe AM und AM_1 des Regulators mit der vertikalen Achse AB den Winkel α bilden, der durch die Gleichung

$$\cos\alpha = \frac{g}{l\,\omega^2}$$

bestimmt wird, wobei l die Länge der Stäbe AM und AM_1 ist. (Die andere Lösung $\alpha = 0$ lassen wir beiseite, da sie nur eine theoretische Bedeutung hat.)

Wir setzen voraus, daß der gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierende Regulator aus der Gleichgewichtslage gebracht und sich selbst überlassen ist. Es soll jetzt die Schwingungsdauer der kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage bestimmt werden.

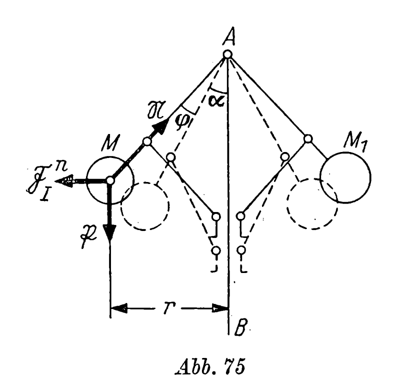


Abb. 75

In Abb. 75 sind durch eine punktierte Linie die Gleichgewichtslage des Regulators und durch ausgezogene Linien die Lage der Regulatorteile in einem bestimmten Augenblick während der Schwingungsbewegung dargestellt. Ebenso wie im § 6 werden wir die Kugeln M und M_1 als materielle Punkte betrachten und die Massen der übrigen Teile des Mechanismus vernachlässigen. Dabei setzen wir voraus, daß der Regulator nicht die Maschine beeinflußt. Die Untersuchung der Schwingungen eines mit der Maschine verbundenen Regulators (der Schwingungen, die sich im Gang der Maschine widerspiegeln und ihrerseits Schwingungen der Winkelgeschwindigkeit des Regulators hervorrufen) stellt eine bedeutend kompliziertere Aufgabe dar.

Wenn wir wie früher den in der Gleichgewichtslage durch die Regulatorstäbe mit der vertikalen Achse gebildeten Winkel mit α bezeichnen, setzen wir voraus, daß im gegebenen Augenblick die Stäbe AM und AM_1 mit ihren Gleichgewichtslagen den Winkel φ bilden. Wir beschränken uns auf den Fall der kleinen Schwingungen und betrachten den Winkel φ als einen kleinen Winkel. Wir stellen die Differentialgleichung auf, die den Winkel φ bestimmt.

Die absolute Bewegung des Regulators setzt sich aus der Rotation um die Achse AB und den uns interessierenden Schwingungen zusammen. Die Schwingungen des Regulators, die der Veränderung des Winkels φ entsprechen, kann man als relative Bewegung des Regulators in bezug auf das Medium betrachten, das um die Achse AB mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Wir wollen nun die Bewegung des materiellen Punktes M untersuchen und das im vorhergehenden Paragraphen dargelegte Verfahren benutzen.

An dem materiellen Punkt M greifen sein Gewicht $\mathfrak{P}$ und die Reaktion $\mathfrak{N}$ des Stabes AM an. Wir fügen zu diesen Kräften zwei Trägheitskräfte hinzu: die zentri-

fugale und die Coriolis-Trägheitskraft (da die übertragene Bewegung eine gleichförmige Rotation ist). Die zentrifugale Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^n$ ist der Größe nach gleich

$$F_I^n = m\, r\, \omega^2$$

(wobei r die Länge des von dem Punkte M auf die Achse AB gefällten Lotes ist) und verläuft in Richtung r von der Drehachse weg.

Wenn wir berücksichtigen, daß $r = l \sin(\alpha + \varphi)$ ist, wobei l die Länge der Stäbe AM und AM_1 ist, ergibt sich

$$F_I^n = m\, l\, \omega^2 \sin(\alpha + \varphi).$$

Was die Coriolis-Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^c$ anbetrifft, so sehen wir, daß ihre Richtung senkrecht auf der Rotationsachse AB und der Relativgeschwindigkeit des Punktes M steht. Da sowohl die Achse AB als auch die relative Geschwindigkeit des Punktes M in der Abbildungsebene liegen, folgt hieraus, daß die Coriolis-Trägheitskraft senkrecht zu der Abbildungsebene gerichtet ist (d. h. senkrecht zu der Ebene, in der sich der Mechanismus befindet).

Wir wenden nun den Momentensatz an, indem wir als Momentenachse die durch den Punkt A gehende und senkrecht zu der Abbildungsebene gerichtete Achse wählen. Wenn wir beachten, daß das Moment der Bewegungsgröße des materiellen Punktes M in bezug auf diese Achse gleich $ml^2\dot{\varphi}$ und das Moment der Coriolis-Trägheitskraft in bezug auf dieselbe Achse gleich Null ist, erhalten wir die Gleichung

$$m\, l^2\, \ddot{\varphi} = -\, P\, l \sin(\alpha + \varphi) + F_I^n\, l \cos(\alpha + \varphi),$$

woraus wir, wenn wir den Ausdruck der Kraft F_I^n substituieren,

$$m\, l^2\, \ddot{\varphi} = -\, P\, l \sin(\alpha + \varphi) + m\, l^2\, \omega^2 \sin(\alpha + \varphi) \cos(\alpha + \varphi)$$

oder

$$\ddot{\varphi} + \left[\frac{g}{l} - \omega^2 \cos(\alpha + \varphi)\right] \sin(\alpha + \varphi) = 0$$

finden.

Bei kleinem φ erhalten wir annähernd:

$$\sin(\alpha + \varphi) = \sin\alpha + \varphi \cos\alpha, \qquad \cos(\alpha + \varphi) = \cos\alpha - \varphi \sin\alpha.$$

Wenn wir diese Ausdrücke für $\sin(\alpha + \varphi)$ und $\cos(\alpha + \varphi)$ in die vorhergehende Gleichung einsetzen und im Auge behalten, daß der Winkel α durch die Gleichung

$$\cos\alpha = \frac{g}{l\,\omega^2}$$

bestimmt wird, erhalten wir

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\, \varphi \sin\alpha (\sin\alpha + \varphi \cos\alpha) = 0$$

oder, wenn wir in Anbetracht der Kleinheit von φ das Glied, das φ^2 enthält, vernachlässigen:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi \sin^2 \alpha = 0.$$

Damit haben wir die Differentialgleichung der freien Schwingungen erhalten. Hieraus folgt, daß die Frequenz der Regulatorschwingungen gleich $\omega \sin \alpha$ ist. Die Schwingungsdauer T wird durch die Gleichung

$$T = \frac{2\pi}{\omega \sin \alpha}$$

bestimmt.

§ 44. Die Ostablenkung eines fallenden Körpers

Infolge der Erdrotation bewegt sich der ohne Anfangsgeschwindigkeit fallende Körper nicht entlang der Vertikalen, sondern wird ein wenig nach Osten abgelenkt. Diese Ostablenkung des fallenden Körpers soll jetzt errechnet werden. Wir wollen uns zuerst mit der Klarstellung dessen beschäftigen, was die Vertikale an einer gegebenen Stelle der Erdoberfläche ist. Vertikale nennen wir die Richtung der lotrechten Linie an der gegebenen Stelle. Wir wollen uns an irgendeiner Stelle auf der Erdoberfläche[1], deren Breite wir mit φ bezeichnen, den Körper M vorstellen, der an einem Faden aufgehängt ist und sich im Gleichgewicht befindet (Abb. 76). Die Gleichgewichtsrichtung des Fadens ist die lotrechte Linie oder die Vertikale an der gegebenen Stelle.

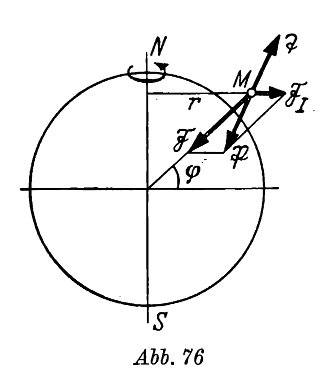


Abb. 76

Wir lenken die Aufmerksamkeit darauf, daß die Richtung der Vertikalen nicht mit der Richtung der Anziehungskraft zusammenfällt, die auf den Körper M von seiten der Erdkugel einwirkt. Infolge der Rotation der Erde ist das Gleichgewicht des Körpers M nur relativ in bezug auf die Erdkugel: Der Körper M beteiligt sich an der Bewegung zusammen mit der Erdkugel.

Wir wenden auf den Körper M (den wir als materiellen Punkt betrachten) die Methode der Kinetostatik an. Auf den Körper M wirkt die Anziehungskraft $\mathfrak{F}$ von seiten der Erdkugel und die Reaktion $\mathfrak{T}$ des Fadens; nach der Methode der Kinetostatik müssen diese Kräfte mit der Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I$ des Punktes M im Gleichgewicht sein. Da die Erde gleichförmig rotiert, ist die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I$ eine zentrifugale Kraft; ihre Größe ist

$$F_I = m r \omega^2,$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation und r die Länge des Lotes ist, das von dem Punkt M auf die Rotationsachse der Erde gefällt ist, wobei die Kraft $\mathfrak{F}_I$ in Richtung r von der Achse der Erdkugel weg verläuft.

[1] Wir stellen uns die Erde in Form einer Kugel vor, wobei wir die Abplattung des Sphäroids vernachlässigen.

Da die Kräfte $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{F}_I$ sich gegenseitig aufheben müssen, muß die Resultierende der Kräfte $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_I$ mit der Reaktion $\mathfrak{T}$ des Fadens im Gleichgewicht sein.

Folglich ist diese Resultierende der Kräfte $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_I$ das von uns beobachtete Gewicht $\mathfrak{P}$ des Körpers. Die Richtung dieser Resultierenden liegt in der Richtung der Vertikalen an der gegebenen Stelle.

Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, daß die Größe der Zentrifugalkraft $\mathfrak{F}_I$ stets klein im Vergleich zu dem Gewicht des Körpers $\mathfrak{P}$ ist. Es gilt nämlich

$$\frac{F_I}{P} = \frac{m r \omega^2}{m g} = \frac{R \omega^2 \cos \varphi}{g},$$

da $r = R \cos \varphi$, wobei R der Radius der Erdkugel ist. Das Verhältnis $F_I : P$ hat den größten Wert auf dem Äquator (bei $\varphi = 0$). Wenn wir $R = 6370$ km, $\omega = 1$ U/ Tag $= \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \frac{1}{\text{s}} = 727 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{s}}$, $\varphi = 0$ und $g = 9{,}78$ m/s² annehmen, erhalten wir auf dem Äquator:

$$\frac{F_I}{P} = 0{,}00344 \quad \text{oder} \quad \frac{F_I}{P} = \frac{1}{290}.$$

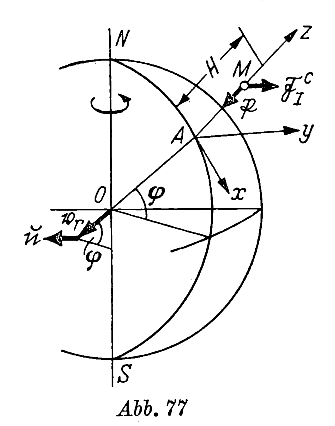


Abb. 77

In Anbetracht der verhältnismäßigen Kleinheit der Zentrifugalkraft $\mathfrak{F}_I$ unterscheidet sich das beobachtete Gewicht $\mathfrak{P}$ wenig von der Größe der Anziehungskraft $\mathfrak{F}$, und die Richtung der Vertikalen bildet einen kleinen Winkel mit der Richtung dieser Kraft.

Wir kehren nun zu der uns gestellten Aufgabe der Ostablenkung eines fallenden Körpers zurück.

Wir wollen uns vorstellen, daß der materielle Punkt M (Abb. 77), der sich auf der Höhe H über dem Niveau der Erde in Ruhe befand (natürlich sprechen wir von der relativen Ruhe in bezug auf die Erdkugel), ohne Anfangsgeschwindigkeit zu fallen beginnt. Die von uns beobachtete Bewegung des fallenden Körpers ist nichts anderes als seine relative Bewegung in bezug auf die rotierende Erdkugel. Wir bestimmen diese Bewegung, indem wir das im § 42 dargelegte Verfahren benutzen. Wir werden hier die angenäherte Lösung der Aufgabe darlegen, die sich auf die verhältnismäßige Kleinheit der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation gründet.

Auf den materiellen Punkt M wirkt während seiner Bewegung die Anziehungskraft $\mathfrak{F}$ der Erde. Wir fügen zu dieser Kraft die zentrifugale Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^n$ und die Coriolis-Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^c$ hinzu. Wir wissen bereits, daß die Resultierende der Anziehungskraft $\mathfrak{F}$ und der Zentrifugalkraft $\mathfrak{F}_I^n$ das Gewicht $\mathfrak{P}$ des materiellen Punktes ist, das längs der Vertikalen gerichtet ist. Wir wollen die Größe und die Richtung der Coriolis-Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^c$ ermitteln. Wir wissen, daß

$$F_I^c = 2 m u$$

ist, wobei u die Umfangsgeschwindigkeit jenes Punktes der Erde ist, der mit dem Ende des Vektors zusammenfällt, der von irgendeinem Punkte der Erdachse ab-

getragen wird und gleich der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ des Punktes M ist. Die Richtung der Coriolis-Kraft $\mathfrak{F}_I^c$ ist der Richtung der Umfangsgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ entgegengesetzt.

Wir errechnen die Umfangsgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$.[1] Zu dem Zweck tragen wir von einem beliebigen Punkt der Erdachse, z. B. vom Erdzentrum O, den Vektor $\mathfrak{v}_r$ der Relativgeschwindigkeit des Punktes M ab. Die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ ist die von uns beobachtete Geschwindigkeit des fallenden Körpers. Die Größe und Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ sind uns unbekannt, solange wir die Bewegung des Punktes M noch nicht bestimmt haben. Doch müssen wir erwarten (was auch durch die Beobachtung bestätigt wird), daß in Anbetracht der Kleinheit der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation die Bewegungsbahn des fallenden Körpers sehr wenig von der vertikalen Geraden abweicht. Hieraus folgt, daß die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ sich sehr wenig von der Richtung der Vertikalen unterscheidet und folglich genau so wenig von der Richtung der Geraden, die die Beobachtungsstelle A mit dem Erdzentrum O verbindet. Bei der Errechnung der Umfangsgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ können wir in erster Näherung annehmen, daß die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ längs der Geraden AO gerichtet ist.

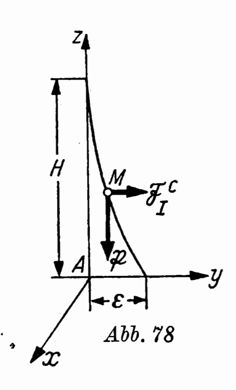


Abb. 78

Wenn wir den Vektor $\mathfrak{v}_r$ vom Punkte O aus längs der Verlängerung der Geraden AO abtragen und $\mathfrak{u}$ als negative Umfangsgeschwindigkeit des Endes dieses rotierenden Vektors bestimmen, finden wir:

$$u = v_r \omega \cos \varphi,$$

wobei $\mathfrak{u}$ entgegen der Erdrotation verläuft und senkrecht zu der Ebene gerichtet ist, die durch die Erdachse und den Radius OA hindurchgeht (d. h. senkrecht zu der Ebene des Meridians an der gegebenen Stelle).

Hieraus folgt, daß

$$F_I^c = 2 m v_r \omega \cos \varphi$$

ist, wobei die Richtung der Kraft $\mathfrak{F}_I^c$ entgegengesetzt zur Richtung von $\mathfrak{u}$ ist. Es ist leicht zu ersehen, daß die Corioliskraft $\mathfrak{F}_I^c$ senkrecht zu der Meridianebene nach Osten gerichtet ist. Das Vorhandensein dieser Kraft ruft die Ostablenkung des fallenden Körpers hervor.

Wir wollen nun die Differentialgleichungen der Bewegung des Punktes M in Komponentenschreibweise in bezug auf die rechtwinkligen Achsen x, y und z aufstellen, die mit der Erdkugel verbunden sind. Den Koordinatenursprung nehmen wir im Punkte A an, die z-Achse errichten wir längs der Vertikalen nach oben, die x-Achse in der Meridianebene nach Süden, die y-Achse senkrecht zu der Meridianebene nach Osten (die Achsen x, y und z sind in der Abb. 77 dargestellt und in der Abb. 78 herausgezeichnet).

[1] Der Anschaulichkeit halber wird das Produkt v_r, $\omega \cos \varphi$ als Umfangsgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ des mit ω rotierenden Vektors $\mathfrak{v}_r$ dargestellt; $\mathfrak{u}$ hat aber die Dimension einer Beschleunigung. (Anm. d. Red.)

Behalten wir im Auge, daß die Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{J}_I^c$ wie die Achsen z und y gerichtet sind, so erhalten wir die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0, \\ m\ddot{y} &= 2mv_r\omega\cos\varphi, \\ m\ddot{z} &= -P. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Außerdem gelten die Anfangswerte:

$$\text{bei} \quad t = 0: \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = H;$$
$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = 0.$$

Integrieren wir die erste Gl. (1) und beachten wir die Anfangswerte ($x = 0$ und $\dot{x} = 0$ bei $t = 0$), so finden wir

$$x = 0,$$

d. h., die Bewegung des Punktes M vollzieht sich in der y-z-Ebene.

Setzen wir $P = mg$ in die dritte Gl. (1) ein, so haben wir

$$\ddot{z} = -g,$$

woraus

$$\dot{z} = -gt + C_1,$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$$

folgt.

Wir bestimmen die Konstanten C_1 und C_2 aus den Anfangsbedingungen und finden $C_1 = 0$, $C_2 = H$. Folglich gilt:

$$\dot{z} = -gt,$$

$$z = H - \frac{gt^2}{2}. \tag{2}$$

Wir wenden uns der zweiten Gl. (1) zu. Im rechten Teil dieser Gleichung steht die uns unbekannte Größe v_r. In Anbetracht dessen, daß die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ sich äußerst wenig von der Richtung der Vertikalen unterscheidet, d. h. von der Richtung der z-Achse, können wir in erster Näherung annehmen, daß die Größe der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ gleich dem absoluten Betrage ihrer Projektion auf der z-Achse ist, d. h.

$$v_r = |\dot{z}| = gt.$$

In diesem Falle nimmt die zweite Gl. (1) die Form

$$m\ddot{y} = 2mgt\omega\cos\varphi$$

an, oder

$$\ddot{y} = 2g\omega t\cos\varphi.$$

Wir integrieren und erhalten

$$\dot{y} = g\,\omega\,t^2 \cos\varphi + C_3,$$

$$y = \frac{1}{3}\,g\,\omega\,t^3 \cos\varphi + C_3 t + C_4.$$

Aus den Anfangswerten finden wir $C_2 = 0$ und $C_4 = 0$. Folglich ist

$$\dot{y} = g\,\omega\,t^2 \cos\varphi,$$

$$y = \frac{1}{3}\,g\,\omega\,t^3 \cos\varphi. \tag{3}$$

Nun ist es nicht schwer, die Größe der Ostablenkung des aus der Höhe H fallenden Körpers zu ermitteln. Die Ostablenkung ist der Wert y, welcher der Zeit t entspricht, bei der z gleich Null wird. Nehmen wir $z = 0$ in der Gl. (2) an, so finden wir

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck t in die Gl. (3) ein und bezeichnen die Ostablenkung des Punktes M mit ε, so erhalten wir:

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\,g\,\omega \sqrt{\frac{8H^3}{g^3}} \cos\varphi = \frac{1}{3}\,\omega \sqrt{\frac{8H^3}{g}} \cos\varphi.$$

Wir wollen nach dieser Formel die Größe der Ostablenkung eines aus der Höhe 100 m auf der Breite von Leningrad fallenden Körpers errechnen. Nehmen wir $H = 100$ m, $\varphi = 60°$ an, so finden wir:

$$\varepsilon = 1{,}1 \text{ cm}.$$

Wie zu erwarten war, erweist sich die Größe ε als äußerst klein.

Beobachtungen der Ostablenkung fallender Körper sind mehrfach durchgeführt worden. Zuerst sind diese Beobachtungen von Hooke auf Veranlassung von Newton im Jahre 1680 vorgenommen worden.

In der Tabelle 4 sind die von den verschiedenen Forschern gewonnenen Resultate angeführt. In der ersten Spalte der Tabelle sind die Fallhöhen H (in Metern) angegeben, in der zweiten die beobachteten Ostablenkungen ε (in Zentimetern). In der letzten Spalte sind gleichfalls Werte ε angeführt, die nach der Gl. (4) errechnet wurden.

Tabelle 4

Forscher	H (m)	Beob. ε (cm)	Errechn. ε (cm)
Guglielmini (1791)	78	1,9	1,13
Benzenberg (1802)	76,4	0,9	0,87
Benzenberg (1804)	85,1	1,15	1,04
Reich (1831)	158,5	2,83	2,75
Holl (1902)	23	0,15	0,18

§ 45. Die Ermittlung der Bewegung des Bezugssystems aus einer gegebenen Relativbewegung

In den vorhergehenden Paragraphen dieses Kapitels haben wir uns mit der Bestimmung der relativen Bewegung eines materiellen Punktes aus den an ihm angreifenden Kräften und aus der gegebenen Translativbewegung beschäftigt. Häufig wird die Aufgabe umgekehrt gestellt: Die Kräfte, die auf den materiellen Punkt wirken, sind gegeben und auch seine relative Bewegung; es soll die Translativbewegung des Punktes bestimmt werden. Die im vorliegenden Kapitel dargelegten Erwägungen gestatten es, auch diese umgekehrte Aufgabe zu lösen.

Wir wollen anfangs voraussetzen, daß die *Translativbewegung*, von der die Rede ist, *eine fortschreitende Bewegung ist.* Bezeichnen wir die Resultierende der an dem materiellen Punkt angreifenden Kräfte mit $\mathfrak{F}$, so gilt die Grundgleichung der Dynamik:

$$m\,\mathfrak{w} = \mathfrak{F},$$

wobei m die Masse des materiellen Punktes und $\mathfrak{w}$ dessen absolute Beschleunigung ist.

Andererseits erhalten wir nach dem Additionstheorem der Beschleunigungen:

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_r + \mathfrak{w}_e,$$

wobei $\mathfrak{w}_r$ und $\mathfrak{w}_e$ die relative und die Führungsbeschleunigung des gegebenen Punktes sind.

Wenn wir diesen Ausdruck $\mathfrak{w}$ in die vorhergehende Gleichung einsetzen, finden wir

$$m\,\mathfrak{w}_r + m\,\mathfrak{w}_e = \mathfrak{F}$$

und daraus

$$m\,\mathfrak{w}_e = \mathfrak{F} - m\,\mathfrak{w}_r.$$

Wir führen den Vektor $\mathfrak{F}_I^r = -\,m\,\mathfrak{w}_r$ ein, der *der Größe nach gleich dem Produkt* $m\,w_r$ ist, aber entgegengesetzt *der Beschleunigung* $\mathfrak{w}_r$ verläuft. Diesen Vektor werden wir die Trägheitskraft des materiellen Punktes in seiner relativen Bewegung nennen, oder kürzer, die *relative Trägheitskraft* des gegebenen Punktes. Die von uns gewonnene Gleichung wird nun folgendermaßen umgeschrieben:

$$m\,\mathfrak{w}_e = \mathfrak{F} + \mathfrak{F}_I^r$$

d. h., im Falle einer fortschreitenden Translativbewegung ist das Produkt aus der Masse und der übertragenen Beschleunigung gleich der Resultierenden der angreifenden Kräfte und der relativen Trägheitskraft.

Hieraus folgt, daß, wenn wir zu den angreifenden Kräften die relative Trägheitskraft hinzufügen, wir die Möglichkeit erhalten, die Aufgabe von der Translativbewegung des Punktes so zu lösen, als ob es sich um seine absolute Bewegung handeln würde. Durch die Einführung der relativen Trägheitskraft verwandeln wir die Aufgabe von der Translativbewegung in eine Aufgabe der absoluten Bewegung des Punktes.

Wir wollen nun voraussetzen, daß *die Bewegung des Bezugssystems* eine *Rotation um eine feste Achse* ist.

In diesem Fall erhalten wir nach dem Additionstheorem der Beschleunigungen:

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_r + \mathfrak{w}_e + \mathfrak{w}_c ,$$

wobei $\mathfrak{w}_r$, $\mathfrak{w}_e$ und $\mathfrak{w}_c$ die relative, die translative und die Coriolis-Beschleunigung des gegebenen Punktes sind. Setzen wir diesen Wert für die absolute Beschleunigung $\mathfrak{w}$ in die Grundgleichung der Dynamik

$$m\mathfrak{w} = \mathfrak{F}$$

ein, so erhalten wir

$$m\,\mathfrak{w}_r + m\,\mathfrak{w}_e + m\,\mathfrak{w}_c = \mathfrak{F} ,$$

woraus

$$m\,\mathfrak{w}_e = \mathfrak{F} - m\,\mathfrak{w}_r - m\,\mathfrak{w}_c$$

folgt.

Führen wir die uns bereits bekannten Kräfte, die relative Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^r$ und die Coriolis-Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^c$, ein, die der Größe nach den Produkten $m w_r$ und $m w_c$ gleich sind, aber entgegengesetzt den Beschleunigungen $\mathfrak{w}_r$ und $\mathfrak{w}_c$ verlaufen, so können wir die letzte Gleichung folgendermaßen umschreiben:

$$m\,\mathfrak{w}_e = \mathfrak{F} + \mathfrak{F}_I^r + \mathfrak{F}_I^c,$$

d. h., im Falle einer rotierenden übertragenen Bewegung ist das Produkt aus der Masse und der Translativbeschleunigung gleich der Resultierenden der angreifenden Kräfte und der zwei Trägheitskräfte $\mathfrak{F}_I^r$ und $\mathfrak{F}_I^c$.

Wir schließen daraus, daß es in dem betrachteten Falle zur Lösung der Aufgabe von der übertragenen Bewegung eines Punktes genügt, zu den angreifenden Kräften zwei Trägheitskräfte — die relative und die Coriolis-Trägheitskraft — hinzuzufügen und darauf die Aufgabe so zu lösen, als handelte es sich um die absolute Bewegung des Punktes.

§ 46. Die Schwingungen von Fundamenten

Wir wollen die Anwendung des im vorhergehenden Paragraphen dargelegten Verfahrens am Beispiel einer Berechnung der Schwingungen eines Maschinenfundamentes erklären.

Auf dem Fundament A ist ein vertikaler Einzylindermotor aufgestellt (Abb. 79). Während der Arbeit des Motors wird das Fundament ununterbrochen erschüttert. Diese Fundamentschwingungen sollen untersucht werden.

Zur Lösung der Aufgabe brauchen wir Angaben, die den Motor, das Fundament und den Untergrund, auf dem das Fundament errichtet ist, charakterisieren.

Was den Motor anbetrifft, so benötigen wir das Gewicht P seiner hin- und hergehenden Teile (im Gewicht P ist das Gewicht des Kolbens und ein gewisser Teil,

ungefähr $^1/_3$ des Gewichts der Kurbelstange[1] enthalten), die Länge der Kurbel r und die Länge der Kurbelstange l. Wir setzen voraus, daß sich die Hauptwelle des Motors gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht.[2]

Wir bezeichnen das Gewicht des Fundamentes (zusammen mit dem Gewicht der Motorteile, die an der vertikalen Bewegung nicht beteiligt sind) mit Q und die Fläche der Fundamentsohle mit S. Schließlich ist noch die Größe vorzugeben, die die elastischen Eigenschaften des Bodens charakterisiert. Bei Einsenkung des Fundamentes in den Boden wirkt auf dasselbe die elastische Bodenreaktion $\mathfrak{F}$, die wir proportional der Sohlenfläche S und der Größe der Einsenkung des Fundamentes in den Boden annehmen. Bezeichnen wir diese Senkung des Fundamentes mit δ, so erhalten wir

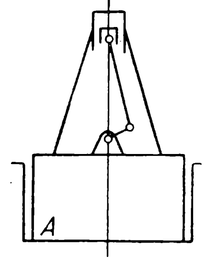


Abb. 79

$$F = c S \delta.$$

Durch den Koeffizienten c charakterisieren wir in dieser Gleichung die elastischen Eigenschaften des Bodens (wir nennen c die Bettungsziffer des Bodens). Wir sehen, daß, wenn F in kg ausgedrückt ist, S in cm², δ in cm und der Koeffizient c in kg/cm³ ausgedrückt werden muß.

Also sind uns die Gewichte P und Q, die Fläche der Fundamentsohle S, die Länge der Kurbel r und der Kurbelstange l, die Bettungsziffer c des Bodens sowie auch die Winkelgeschwindigkeit ω der Hauptmotorwelle gegeben. Nach diesen Angaben sollen die Fundamentschwingungen ermittelt werden.

Wir bezeichnen die Masse der sich hin und her bewegenden Motorteile mit $m = \frac{P}{g}$.
Wenn das Fundament unbeweglich wäre, würde es leicht sein, nach den Angaben r, l und ω die Bewegung der Masse m zu bestimmen (d. h. die Bewegung des Motorkolbens). In Wirklichkeit aber schwingt das Fundament, und zusammen mit diesem schwingt die ganze Maschine. Es setzt sich also die absolute Bewegung der Masse m aus ihrer relativen Bewegung in bezug auf das Fundament (das ist die Bewegung, die die Masse m unter Voraussetzung eines unbeweglichen Fundamentes ausführt) und der übertragenen Bewegung mit dem Fundament zusammen. Die erste dieser beiden Bewegungen ist uns bekannt (sofern die Maße des Kurbelmechanismus und die Winkelgeschwindigkeit ω gegeben sind); die Translationsbewegung zusammen mit dem Fundament dagegen ist uns unbekannt, sie soll nun bestimmt werden.

Wir werden voraussetzen, daß das Fundament Schwingungen in vertikaler Richtung ausführt, wobei es sich *ohne Rotation* verschiebt. Da wir die übertragene Bewegung als fortschreitend annehmen, erhalten wir, wenn wir das im vorhergehenden Paragraphen dargelegte Verfahren anwenden, das Recht, die übertragene Bewegung der Masse m zusammen mit dem Fundament als absolute Bewegung zu behandeln, und zwar unter der Bedingung, daß die relative Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^r$ zu den auf die Masse m

[1] Die Frage, welcher Teil des Gewichtes der Kurbelstange zu dem Gewicht des Kolbens bei der Berechnung des Gewichtes der hin- und hergehenden Maschinenteile hinzugefügt werden muß, wird im Lehrgang der Maschinendynamik untersucht. Siehe z. B. E. L. Nikolai, „Das Regulieren von Maschinen", 1930, § 9.

[2] Die rotierenden Motormassen setzen wir als vollständig ausgeglichen voraus.

wirkenden Kräften hinzugefügt wird. Nach Einführung dieser Trägheitskraft haben wir das Recht, von der Relativbewegung der Masse m abzusehen; wir erhalten das Recht, diese Masse als unveränderlich mit dem Fundament verbunden zu betrachten. Die Fundamentschwingungen während der Arbeitszeit des Motors gehen so vor sich, als ob die Maschine nicht arbeite, die Masse m aber unter Einwirkung der variablen Kraft $\mathfrak{F}_r^I$ stünde.

Wir wenden uns jetzt der Errechnung der relativen Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^r$ zu. Diese Trägheitskraft ist der Größe nach gleich $m w_r$ und entgegengesetzt der Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ gerichtet. Wir errechnen zunächst die relative Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ der Masse m.

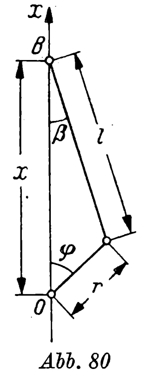


Abb. 80

Die Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ ist nichts anderes als die Beschleunigung des Punktes B (Abb. 80) unter der Voraussetzung eines unbeweglichen Fundamentes. Wir wollen die Bewegungsgleichung des Punktes B aufstellen. Deshalb richten wir die x-Achse längs der Zylinderachse nach oben und setzen den Koordinatenursprung im Punkte O fest.

Bezeichnen wir $OB = x$, so gilt:

$$x = r \cos \varphi + l \cos \beta ,$$

wobei φ der Drehwinkel der Kurbel und β der von der Kurbelstange mit der Zylinderachse gebildete Winkel ist.

Der Winkel β ist mit dem Winkel φ durch die Abhängigkeit

$$r \sin \varphi = l \sin \beta$$

verbunden, daher

$$\sin \beta = \lambda \sin \varphi ,$$

wobei $\lambda = \frac{r}{l}$ ist. Folglich ist

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} .$$

Wenn wir den Radikanden in eine Binomische Reihe entwickeln und in dieser Reihe alle Glieder abwerfen, die λ in der vierten und höheren Potenz enthalten, dann erhalten wir annähernd:

$$\cos \beta = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \varphi$$

und folglich

$$x = r \cos \varphi + l \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \varphi\right) = r \left(\cos \varphi - \frac{\lambda}{2} \sin^2 \varphi\right) + l .$$

Setzen wir hier $\varphi = \omega t$, so erhalten wir die angenäherte Bewegungsgleichung des Punktes B:

$$x = r \left(\cos \omega t - \frac{\lambda}{2} \sin^2 \omega t\right) + l .$$

Wir differenzieren zweimal nach der Zeit und finden

$$\dot{x} = -r\,\omega\,(\sin\omega\,t + \lambda\sin\omega\,t\cos\omega\,t) = -r\,\omega\left(\sin\,\omega\,t + \frac{\lambda}{2}\sin 2\,\omega\,t\right),$$

$$\ddot{x} = -r\,\omega^2(\cos\omega\,t + \lambda\cos 2\,\omega t).$$

Die gewonnene zweite Ableitung $\ddot{x}$ ist nichts anderes als die Projektion der Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ auf die x-Achse. Wenn wir diese Projektion mit w_{rx} bezeichnen, gilt

$$w_{rx} = -r\,\omega^2(\cos\omega\,t + \lambda\cos 2\,\omega\,t).$$

Da die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^r$ der Größe nach gleich $m\,w_r$ und entgegengesetzt der Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ gerichtet ist, erhalten wir, wenn wir die Projektion der Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^r$ auf die x-Achse mit $\mathfrak{F}_{Ix}^r$ bezeichnen:

$$F_{Ix}^r = -m\,w_{rx} = m\,r\,\omega^2(\cos\,\omega\,t + \lambda\cos 2\,\omega\,t). \qquad (2)$$

Nachdem wir die Errechnung der Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^r$ beendet haben, wenden wir uns der Bestimmung der Fundamentbewegung zu.

Auf die Masse $M + m$ wirkt die Schwerkraft $\mathfrak{Q} + \mathfrak{P}$ und die elastische Reaktion $\mathfrak{F}$ des Bodens; zu diesen Kräften fügen wir die relative Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^r$ hinzu (Abb. 81). Im Gleichgewichtszustand hat das Fundament die statische Durchsenkung f, die aus der Gleichgewichtsbedingung zwischen der Schwerkraft $Q + P$ und der elastischen Reaktion $\mathfrak{F}$ des Bodens bestimmt wird, d. h. aus der Gleichung

Abb. 81

$$Q + P = c\,S\,f. \qquad (3)$$

Wir vermerken die Gleichgewichtslage des Schwerpunktes des Fundamentes C_0 und seine Lage C in irgendeinem Augenblick während seiner Schwingungsbewegung. Wir richten die x-Achse senkrecht nach oben und bezeichnen C_0C mit x_1 (die Größe x_1 nehmen wir dann positiv an, wenn sie oberhalb des Punktes C_0 liegt). Da die Senkung des Fundamentes im gegebenen Augenblick gleich $f - x_1$ ist, erhalten wir für die elastische Kraft F den Ausdruck

$$F = c\,S\,(f - x_1).$$

Die Differentialgleichung der Bewegung der Masse $M + m$ in der Projektion auf die x-Achse ist:

$$(M + m)\ddot{x}_1 = -(Q + P) + F + F_{Ix}^r = -(Q + P) + c\,S\,(f - x_1) + F_{Ix}^r,$$

woraus wir, wenn wir die Wechselbeziehung (3) im Auge behalten und den Ausdruck F_{Ix}^r aus der Gl. (2) einsetzen,

$$(M + m)\,x_1 = -c\,S\,x_1 + m\,r\,\omega^2(\cos\,\omega\,t + \lambda\cos 2\,\omega\,t)$$

erhalten.

Wir führen die Bezeichnung

$$\frac{c\,S}{M+m} = k^2$$

ein.

Dann hat die gewonnene Gleichung folgende Form:

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = \frac{m}{M+m}\,\omega^2(\cos\omega t + \lambda\cos 2\,\omega t). \tag{4}$$

Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = 0$$

ist uns bekannt; sie ist gleich

$$x_1 = C_1\cos k\,t + C_2\sin k\,t, \tag{5}$$

wobei C_1 und C_2 beliebige Konstanten sind. Wir suchen die Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$x_1 = A\cos\omega t + B\cos 2\,\omega t$$

mit bestimmten Koeffizienten A und B.

Setzen wir diesen Ausdruck x_1 in die Gl. (4) ein, so erhalten wir

$$(k^2 - \omega^2)A\cos\omega t + (k^2 - 4\,\omega^2)B\cos 2\,\omega t = \frac{m\,r\,\omega^2}{M+m}(\cos\omega t + \lambda\cos 2\,\omega t),$$

woraus wir, wenn wir die Koeffizienten von $\cos\omega t$ und $\cos 2\omega t$ links und rechts vom Gleichheitszeichen vergleichen, finden:

$$A = \frac{m\,r\,\omega^2}{(M+m)(k^2 - \omega^2)}, \qquad B = \frac{m\,r\,\omega^2\,\lambda}{(M+m)(k^2 - 4\,\omega^2}.$$

Somit ist die gesuchte Partikulärlösung

$$x_1 = \frac{m\,r\,\omega^2}{M+m}\left(\frac{\cos\omega t}{k^2 - \omega^2} + \frac{\lambda\cos 2\,\omega t}{k^2 - 4\,\omega^2}\right).$$

Wenn wir zu dieser Partikulärlösung die allgemeine Lösung (5) der homogenen Gleichung hinzufügen, erhalten wir die allgemeine Lösung unserer Gl. (4):

$$x_1 = C_1\cos k\,t + C_2\sin k\,t + \frac{m\,r\,\omega^2}{M+m}\left(\frac{\cos\omega t}{k^2 - \omega^2} + \frac{\lambda\cos 2\,\omega t}{k^2 - 4\,\omega^2}\right).$$

Die Glieder, welche die willkürlichen Konstanten C_1 und C_2 enthalten, entsprechen den Eigen- oder freien Schwingungen des Fundamentes; die Frequenz dieser Schwingungen ist gleich k. Das letzte Glied der gewonnenen Gleichung entspricht den er-

zwungenen Schwingungen des Fundamentes. Diese erzwungenen Schwingungen setzen sich ihrerseits aus zwei harmonischen Schwingungen mit den Frequenzen ω und 2ω zusammen.

Wie wir sehen, haben wir auch hier zwei Fälle von Resonanz, und zwar: bei $\omega = k$ und bei $\omega = \frac{k}{2}$. Diese Werte der Winkelgeschwindigkeit des Motors, bei welchen wir starke Fundamentschwingungen erwarten müssen, heißen kritische Winkelgeschwindigkeiten und die ihnen entsprechenden Drehzahlen kritische Drehzahlen. Beim Projektieren des Fundamentes muß man sein Gewicht und die Abmessungen so wählen, daß die normale Drehzahl des Motors genügend weit von diesen gefährlichen kritischen Drehzahlen entfernt liegt.

§ 47. Die physikalische Deutung der Trägheitskräfte in der Theorie der Relativbewegungen

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir uns mit der Frage der physikalischen Deutung jener Trägheitskräfte befassen, von welchen in den vorhergehenden Paragraphen die Rede war. Existieren diese Trägheitskräfte wirklich oder sind sie rein fiktive Größen, durch die wir nur formal der Abhängigkeit zwischen den angreifenden Kräften und der Beschleunigung in der Relativbewegung dieselbe Form geben, die die Grundgleichung der Dynamik in der absoluten Bewegung hat?

Um sich mit dieser Frage auseinanderzusetzen, muß man sich daran erinnern, was im § 4 von der Trägheitskraft bei der absoluten Bewegung gesagt wurde: Die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I = - m\mathfrak{w}$ ist eine vollständig reale Kraft, sie greift aber nicht am materiellen Punkt an, der die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ erfährt, sondern an dem Körper oder den Körpern, welche diese Beschleunigung mitteilen.

Wir wollen uns nun einen materiellen Punkt M vorstellen, an dem die Kraft $\mathfrak{F}$ angreift, und annehmen, daß wir die Relativbewegung dieses Punktes in bezug auf ein rotierendes System untersuchen. Um die Möglichkeit zu haben, bei der Relativbewegung des Punktes M die Gleichungen der absoluten Bewegung anzuwenden, fügen wir zu der Kraft $\mathfrak{F}$ die zentrifugale, tangentiale und die Coriolis-Trägheitskraft hinzu:

$$\mathfrak{F}_I^n = - m\,\mathfrak{w}_{en}, \qquad \mathfrak{F}_I^t = - m\,\mathfrak{w}_{et}, \qquad \mathfrak{F}_I^c = - m\,\mathfrak{w}_c.$$

Andererseits können wir, wenn wir die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I = - m\mathfrak{w}$ des Punktes M in seiner absoluten Bewegung errechnen wollen, annehmen, daß

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_{en} + \mathfrak{w}_{et} + \mathfrak{w}_c + \mathfrak{w}_r$$

ist, woraus

$$\mathfrak{F}_I = - m\,\mathfrak{w}_{en} - m\,\mathfrak{w}_{et} - m\,\mathfrak{w}_c - m\,\mathfrak{w}_r = \mathfrak{F}_I^n + \mathfrak{F}_I^t + \mathfrak{F}_I^c + \mathfrak{F}_I^r$$

folgt, wobei $\mathfrak{F}_I^r = - m\mathfrak{w}_r$ die relative Trägheitskraft unserer Punkte ist.

Folglich sind die zentrifugale, tangentiale, Coriolis- und die relative Trägheitskraft des Punktes M Komponenten seiner vollen (oder absoluten) Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I$.

Hieraus schließen wir, daß alle aufgezählten Trägheitskräfte vollständig reale Kräfte sind, daß sie in Wirklichkeit aber *nicht am Punkte M angreifen*, sondern an dem Körper oder an den Körpern, die dem Punkte M seine absolute Beschleunigung $\mathfrak{w}$ mitteilen.

In der Theorie der Relativbewegungen greifen die Trägheitskräfte des Punktes M an ihm selbst an. Wir bekommen dadurch die Möglichkeit, formal die Grundgleichung der Dynamik für die Relativbewegung in dieselbe Form zu bringen, die sie in der absoluten Bewegung hat. Natürlich ist dies ein rein formales Verfahren. Trägheitskräfte, *die am Punkte M selbst angreifen*, gibt es in Wirklichkeit nicht.

KAPITEL IX

DIE ANGENÄHERTE LÖSUNG DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER BEWEGUNG

§ 48. Die numerische Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung

Wenn wir Differentialgleichungen der Bewegung eines materiellen Punktes aufstellen, stoßen wir sehr häufig auf Gleichungen, die nicht mit Hilfe der uns bekannten Funktionen integriert werden können. In solchen Fällen muß man auf eine genaue analytische Lösung der Aufgabe verzichten und deren angenäherte Lösung suchen. Es gibt Tabellenverfahren und graphische Methoden für die Nährungslösung von Differentialgleichungen. In diesem Paragraphen werden wir ein einfaches Verfahren der tabellarischen Lösung von Differentialgleichungen der Bewegung darstellen, das hinreichend genaue Resultate ergibt und keinen großen Aufwand an Rechenarbeit erfordert.

Wir betrachten eine Differentialgleichung von der Form

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \tag{1}$$

und nehmen an, daß eine Lösung dieser Gleichung gefunden werden soll, welche die Anfangswerte $x = x_0$ und $\dot{x} = \dot{x}_0$ bei $t = 0$ befriedigt.

Wir wählen eine Reihe von aufeinanderfolgenden Zeitpunkten 0, t_1, t_2, t_3, . . . , die sich voneinander um genügend kleine Zeiträume Δt unterscheiden (so daß $t_{n+1} - t_n = \Delta t$ ist), und errechnen die Werte x_1, x_2, x_3, . . . der Größe x, die den Zeitpunkten t_1, t_2, t_3, . . . entsprechen, sowie die Werte $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$, . . . der Größe $\dot{x}$ für die gleichen Zeitpunkte.

Zunächst bestimmen wir aus der Gl. (1) den Wert der zweiten Ableitung $\ddot{x}$, der dem Anfangszeitpunkt $t = 0$ entspricht. Bezeichnen wir diesen Wert von $\ddot{x}$ mit $\ddot{x}_0$

und setzen auf der rechten Seite der Gl. (1) $t = 0$, $x = x_0$ und $\dot{x} = \dot{x}_0$ ein, so erhalten wir

$$\ddot{x}_0 = f(0, x_0, \dot{x}_0).$$

Nachdem wir die Größe $\ddot{x}_0$ bestimmt haben, können wir die Größen x_1 und $\dot{x}_1$ in der ersten Näherung nach den Gleichungen

$$x_1 = x_0 + \dot{x}_0 \Delta t,$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_0 + \ddot{x}_0 \Delta t$$

errechnen.

Die erste dieser Gleichungen wäre exakt, wenn die erste Ableitung $\dot{x}$ ihren konstanten Wert $\dot{x}_0$ während der Zeit von $t = 0$ bis $t = t_1$ beibehielte; ganz ebenso wäre die zweite Gleichung exakt, wenn die Größe $\ddot{x}$ den Wert $\ddot{x}_0$ von $t = 0$ bis $t = t_1$ beibehielte. Tatsächlich verändern sich aber im Laufe der Zeit sowohl $\dot{x}$ als auch $\ddot{x}$, und die für x_1 und $\dot{x}_1$ geschriebenen Gleichungen gelten nur angenähert. Wir bezeichnen die durch diese Gleichungen zu bestimmenden Werte x_1 und $\dot{x}_1$ mit (x_1) und $(\dot{x}_1)$, d. h., wir setzen

$$(x_1) = x_0 + \dot{x}_0 \Delta t,$$

$$(\dot{x}_1) = \dot{x}_0 + \ddot{x}_0 \Delta t.$$

Wir werden uns nicht mit dieser ersten Näherung befassen; wir werden uns bemühen, genauere Werte x_1 und $\dot{x}_1$ zu ermitteln, indem wir die Veränderung der Größen $\dot{x}$ und $\ddot{x}$ im Laufe der Zeit berücksichtigen. Genauere Werte x_1 und $\dot{x}_1$ erhalten wir, wenn wir

$$x_1 = x_0 + \alpha \Delta t, \tag{2}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_0 + \beta \Delta t \tag{3}$$

setzen, wobei α und β die mittleren Werte von $\dot{x}$ und $\ddot{x}$ während der Zeit von $t = 0$ bis $t = t_1$ sind. Wir wollen sehen, wie man, wenn auch nur annähernd, die Größen α und β ermitteln kann.

Setzen wir auf der rechten Seite der Gl. (1) $t = t_1$, $x = (x_1)$, $\dot{x} = (\dot{x}_1)$ ein, so erhalten wir den annähernden Wert $\ddot{x}$ für den Zeitpunkt $t = t_1$; wir bezeichnen den Wert mit $(\ddot{x}_1)$, so daß

$$(\ddot{x}_1) = f[t_1, (x_1), (\dot{x}_1)]$$

ist.

Nachdem wir die Größe $(\ddot{x}_1)$ errechnet haben, können wir den angenäherten Wert β erhalten, wenn wir

$$\beta = \frac{\ddot{x}_0 + (\ddot{x}_1)}{2}$$

annehmen.

Setzen wir diesen Wert β in die Gl. (3) ein, so finden wir einen genaueren Wert $\dot{x}_1$:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_0 + \frac{\ddot{x}_0 + (\ddot{x}_1)}{2} \Delta t. \tag{4}$$

Nun nehmen wir annähernd an

$$\alpha = \frac{\dot{x}_0 + \dot{x}_1}{2}$$

und finden, wenn wir diesen Wert α in die Gl. (2) einsetzen, den genaueren Wert x_1:

$$x_1 = x_0 + \frac{\dot{x}_0 + \dot{x}_1}{2} \Delta t. \tag{5}$$

Also haben wir aus den gegebenen Werten x_0 und $\dot{x}_0$ die Größen x_1 und $\dot{x}_1$ gefunden. Genauso können wir aus den bereits bekannten Werten x_1 und $\dot{x}_1$ die Werte x_2 und $\dot{x}_2$ usw. errechnen. Wenn wir dieselbe Reihenfolge von Handlungen wiederholen, finden wir nacheinander die Werte x und $\dot{x}$ für alle festgelegten Zeitpunkte $t_1, t_2, t_3, \ldots$

Wir wollen nochmals vermerken, welche Berechnungen ausgeführt werden müssen, um nach den bereits gefundenen Größen x_n und $\dot{x}_n$ die Größen x_{n+1} und $\dot{x}_{n+1}$ zu errechnen.

Zuerst errechnen wir den Wert $\ddot{x}$ für den Zeitpunkt t_n (wir bezeichnen ihn mit $\ddot{x}_n$) nach der Formel

$$\ddot{x}_n = f(t_n, x_n, \dot{x}_n).$$

Darauf finden wir die angenäherten Werte x und $\dot{x}$ für den Zeitpunkt t_{n+1} [wir bezeichnen sie mit (x_{n+1}) und $(\dot{x}_{n+1})$] nach den Gleichungen

$$(x_{n+1}) = x_n + \dot{x}_n \Delta t,$$

$$(\dot{x}_{n+1}) = \dot{x}_n + \ddot{x}_n \Delta t.$$

Nun errechnen wir den annähernden Wert $\ddot{x}$ für den Zeitpunkt t_{n+1} [wir bezeichnen ihn mit $(\ddot{x}_{n+1})$] nach der Gleichung

$$(\ddot{x}_{n+1}) = f\left[(t_{n+1}), (x_{n+1}), (\dot{x}_{n+1})\right].$$

Schließlich finden wir den genaueren Wert $\dot{x}_{n+1}$ nach der Gleichung

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \frac{\ddot{x}_n + (\ddot{x}_{n+1})}{2} \Delta t$$

und den genaueren Wert x_{n+1} nach der Gleichung

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\dot{x}_n + \dot{x}_{n+1}}{2} \Delta t.$$

Natürlich wird das Resultat der Rechnung um so genauer sein, je kleiner der Zeitraum Δt ist. Im folgenden Paragraphen werden wir sehen, daß keine Notwendigkeit vorliegt, ein sehr kleines Δt anzunehmen, um eine für praktische Zwecke genügende Genauigkeit zu erzielen.

Wir bemerken, daß keine Notwendigkeit vorliegt, die Größen $(\dot{x}_n)$ zu errechnen, wenn der rechte Teil der Gl. (1) $\dot{x}$ nicht enthält; wenn aber im rechten Teil der Gl. (1) kein x vorhanden ist, so müssen trotzdem die Größen (x_n) errechnet werden.

§ 49. Die Schwingungen eines mathematischen Pendels

Wir wollen das im vorhergehenden Paragraphen dargelegte Verfahren zur Lösung der Schwingungsgleichung des mathematischen Pendels anwenden. Wir nehmen an, daß das Pendel im Anfangsaugenblick um 90° von der Vertikalen abweicht und ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen wird. Es soll die Bewegung des Pendels bestimmt werden.

Bezeichnen wir den Ausschlagswinkel des Pendels von der Vertikalen mit φ, so gilt die Differentialgleichung der Bewegung des Pendels (s. § 30):

$$\frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d} t^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0,$$

wobei l die Länge des Pendels ist. Die Frage wird auf die Ermittlung der Lösung dieser Gleichung zurückgeführt, welche die Anfangsbedingungen

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d} \varphi}{\mathrm{d} t} = 0 \quad \text{bei} \quad t = 0$$

befriedigt.

Wir bestimmen die Bewegung des Pendels während einer Viertelperiode seiner Schwingungen, d. h. bis zu dem Augenblick, in dem φ zu Null wird. Zuvor wollen wir die gegebene Differentialgleichung vereinfachen, indem wir anstatt t eine neue unabhängige Variable τ einführen, die mit t durch die Abhängigkeit

$$\tau = t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

verbunden ist.

Es gilt

$$\frac{\mathrm{d} \varphi}{\mathrm{d} t} = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\mathrm{d} \varphi}{\mathrm{d} \tau}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d} t^2} = \frac{g}{l} \frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d} \tau^2}.$$

Wenn wir den obigen Ausdruck für $\frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d} t^2}$ in die gegebene Differentialgleichung einsetzen und durch $\frac{g}{l}$ dividieren, erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d} \tau^2} + \sin \varphi = 0.$$

Im weiteren werden wir uns der Bezeichnungen

$$\frac{\mathrm{d} \varphi}{\mathrm{d} \tau} = \dot{\varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d} \tau^2} = \ddot{\varphi}$$

bedienen.

Unter Verwendung dieser Bezeichnungen wird unsere Aufgabe auf die Ermittlung der Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} = -\sin \varphi$$

zurückgeführt, welche die Anfangsbedingungen $\varphi = \frac{\pi}{2} = 1{,}571$, $\dot{\varphi} = 0$ bei $\tau = 0$ befriedigt.

Wir wählen $\Delta\tau = 0{,}2$ (es ist leicht zu ersehen, daß τ eine reine Zahl ist) und errechnen die Werte φ und $\dot{\varphi}$ bei $\tau = 0{,}2,\ 0{,}4,\ 0{,}6, \ldots$; dabei werden wir die Größen φ und $\dot{\varphi}$ auf drei Stellen nach dem Komma und die Größe $\ddot{\varphi}$ auf zwei Stellen nach dem Komma berechnen.

Wenn wir die Bezeichnungen des vorhergehenden Paragraphen verwenden, erhalten wir $\varphi_0 = 1{,}571$ und $\dot{\varphi}_0 = 0$. Wir errechnen φ_1 und $\dot{\varphi}_1$.

Es ist

$$\ddot{\varphi}_0 = -\sin\varphi_0 = -1{,}00.$$

Ferner ist

$$(\varphi_1) = \varphi_0 + \dot{\varphi}_0 \Delta\tau = 1{,}571.$$

Nun finden wir:

$$(\ddot{\varphi}_1) = -\sin(\varphi_1) = -1{,}00.$$

Hieraus erhalten wir die Werte $\dot{\varphi}_1$ und φ_1

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_0 + \frac{\ddot{\varphi}_0 + (\ddot{\varphi}_1)}{2}\Delta\tau = -1{,}00 \cdot 0{,}2 = -0{,}200\,;$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{\dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi}_1}{2}\Delta\tau = 1{,}571 - 0{,}100 \cdot 0{,}2 = 1{,}551\,.$$

In der Tabelle 5 sind die Werte (φ_n), φ_n, $\dot{\varphi}_n$

$$\frac{\dot{\varphi}_n + \dot{\varphi}_{n+1}}{2}, \quad (\ddot{\varphi}_n), \quad \ddot{\varphi}_n \quad \text{und} \quad \frac{\ddot{\varphi}_n + (\ddot{\varphi}_{n+1})}{2} \quad \text{für}$$

$$\tau = 0,\ 0{,}2,\ 0{,}4,\ \cdots,\ 2{,}0$$

zusammengestellt.

Tabelle 5

τ	(φ_n)	φ_n	$\dot{\varphi}_n$	$\frac{\dot{\varphi}_n + \dot{\varphi}_{n+1}}{2}$	$(\ddot{\varphi}_n)$	$\ddot{\varphi}_n$	$\frac{\ddot{\varphi}_n + (\ddot{\varphi}_{n+1})}{2}$
0		1,571	0,	− 0,100		− 1,00	− 1,00
0,2	1,571	1,551	− 0,200	− 0,300	− 1,00	− 1,00	− 1,00
0,4	1,511	1,491	− 0,400	− $0{,}499_5$	− 1,00	− 1,00	− $0{,}99_5$
0,6	1,411	1,391	− 0,599	− 0,696	− 0,99	− 0,98	− 0,97
0,8	1,271	1,252	− 0,793	− 0,885	− 0,96	− 0,95	− 0,92
1,0	1,093	1,075	− 0,977	− $1{,}059_5$	− 0,89	− 0,88	− $0{,}82_5$
1,2	0,880	0,863	− 1,142	− $1{,}209_5$	− 0,77	− 0,76	− $0{,}67_5$
1,4	0,635	0,621	− 1,277	− 1,324	− 0,59	− 0,58	− 0,47
1,6	0,366	0,356	− 1,371	− $1{,}392_5$	− 0,36	− 0,35	− $0{,}21_5$
1,8	0,082	0,078	− 1,414	− 1,408	− 0,08	− 0,08	+ 0,06
2,0	− 0,205	− 0,204	− 1,402		+ 0,20		

Wir sehen, daß $\varphi = 0{,}078$ bei $\tau = 1{,}8$ ist und $\varphi = -0{,}204$ bei $\tau = 2{,}0$. Wenn wir interpolieren, finden wir, daß $\varphi = 0$ bei $\tau = 1{,}855$ ist.

Hiermit ist der Zeitpunkt des Durchganges des Pendels durch die vertikale Lage bestimmt und folglich auch die Dauer einer Viertelperiode der Pendelschwingung. Wenn wir uns erinnern, daß

$$\tau = t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

ist, und die Schwingungszeit des Pendels mit T bezeichnen, erhalten wir

$$\frac{T}{4} = 1{,}855\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Im § 33 war die genaue Gleichung für die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels angegeben worden; nach dieser ist

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2 u}},$$

wobei α der größte Auslenkungswinkel des Pendels von der Vertikalen ist. Im gegebenen Fall ist

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Wir errechnen das hier enthaltene Integral mit Hilfe der Tabelle der elliptischen Integrale[1] und finden

$$\frac{T}{4} = 1{,}8541\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Somit ist der Fehler unseres angenäherten Resultates kleiner als 0,1%, was die für praktische Zwecke genügende Genauigkeit weit übersteigt.

Wir wiederholen die Rechnung, indem wir große Zwischenräume $\Delta\tau$ nehmen, z. B. $\Delta\tau = 0{,}4$, und errechnen φ und $\dot\varphi$ nur auf zwei Stellen nach dem Komma. Die Werte sind in der Tabelle 6 angeführt.

Durch Interpolation finden wir, daß $\varphi = 0$ bei $\tau = 1{,}86$ ist und daher

$$\frac{T}{4} = 1{,}86\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Wie man sieht, beträgt der Fehler dieses Resultates ungefähr 0,5%. Auch eine solche Genauigkeit genügt vollständig für praktische Zwecke.

[1] E. Jahnke und F. Emde: „Tafeln höherer Funktionen“, Leipzig 1948.

Tabelle 6

τ	(φ_n)	φ_n	$\dot{\varphi}_n$	$\frac{\dot{\varphi}_n + \dot{\varphi}_{n+1}}{2}$	$(\ddot{\varphi}_n)$	$\ddot{\varphi}_n$	$\frac{\ddot{\varphi}_n + (\ddot{\varphi}_{n+1})}{2}$
0		1,57	0			— 1,00	
				— 0,20			— 1,00
0,4	1,57	1,49	— 0,40		— 1,00	— 1,00	
				— $0{,}59_5$			— $0{,}98_5$
0,8	1,33	1,25	— 0,79		— 0,97	— 0,95	
				— $0{,}95_5$			— $0{,}87_5$
1,2	0,93	0,86	— 1,14		— 0,80	— 0,76	
				— $1{,}25_5$			— $0{,}57_5$
1,6	0,40	0,36	— 1,37		— 0,39	— 0,36	
				— $1{,}38_5$			— $0{,}08_5$
2,0	— 0,19	— 0,19	— 1,40		+ 0,19		

§ 50. Die Bewegung eines gebremsten Zuges

Das im § 48 dargelegte Verfahren einer zahlenmäßigen Lösung der Differentialgleichung der Bewegung kann auch in solchen Fällen angewandt werden, in denen die analytische Form der Funktion $f(t, x, \dot{x})$ nicht vorgegeben ist und nur die Werte dieser Funktion für eine Reihe einzelner Werte ihrer Argumente bekannt sind.

Im § 8 haben wir die Frage von der Bewegung eines gebremsten Zuges auf einer horizontalen Bahn betrachtet, wobei wir voraussetzten, daß sich beim Bremsen ein Bewegungswiderstand entwickelt, der gleich kP ist, wobei P das Gewicht des Zuges und k ein konstanter Koeffizient (den wir gleich 0,1 setzten) ist.

In Wirklichkeit ist der Koeffizient k (der sogenannte spezifische Widerstand beim Bremsen) keine konstante Größe: Er verändert sich mit der Veränderung der Geschwindigkeit des Zuges, wobei er sich mit der Verringerung der Geschwindigkeit vergrößert (außerdem hängt er von der Art des Zuges ab).

Wir wollen bestimmen, nach welcher Entfernung und nach welcher Zeit ein Zug, der mit der Geschwindigkeit 90 km/Std. oder 25 m/s fährt, auf einer geradlinigen horizontalen Strecke angehalten werden kann, wenn der spezifische Widerstand beim Bremsen für diesen Zug folgende Werte[1] hat:

Tabelle 7

v m/s	k	v m/s	k
0	0,132	15	0,083
5	0,115	20	0,068
10	0,099	25	0,053

[1] Diese Angaben beziehen sich auf einen D-Zug von einer bestimmten Art. Siehe J. W. Lomonossow, „Zugberechnungen". Ю. В. Ломоносов, Тяговые расчеты, 2-е изд., 1915, стр. 155.

Nachdem wir die x-Achse längs der geradlinigen Bahn des Zuges gelegt haben und x von der Stelle an zählen, wo sich der Zug beim Beginn des Bremsens befand, gilt folgende Differentialgleichung der Bewegung des Zuges:

$$m\ddot{x} = -kP$$

oder

$$\ddot{x} = -k \cdot g$$

mit den Anfangswerten $x = 0$ und $x = 25$ m/s bei $t = 0$.

Unten sind die Werte des Produktes $k \cdot g$ für verschiedene Geschwindigkeiten angeführt.

Tabelle 8

v m/s	$k \cdot g$ m/s²	v m/s	$k \cdot g$ m/s²
0	1,29	15	0,81
5	1,13	20	0,66
10	0,97	25	0,52

Aus diesen Angaben können wir durch Interpolation den Wert $k \cdot g$ für einen beliebigen Wert v errechnen.

Wir wollen nun die Lösung der Differentialgleichung (1) suchen, die die gestellten Anfangsbedingungen erfüllt. Wir werden die Länge in Metern und die Zeit in Sekunden ausdrücken. Es sei $\Delta t = 5$ s.

Ferner ist $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 25$ m/s. Hieraus folgt

$$\ddot{x}_0 = -0{,}52 \text{ m/s}^2.$$

Somit ist

$$(\dot{x}_1) = 25 - 0{,}52 \cdot 5 = 22{,}4 \text{ m/s}.$$

Nach der Tabelle 8 finden wir durch Interpolation

$$(\ddot{x}_1) = -0{,}59 \text{ m/s}^2.$$

Damit wird

$$\frac{\ddot{x}_0 + (\ddot{x}_1)}{2} = -0{,}55_5 \text{ m/s}^2,$$

$$\dot{x}_1 = 25 - 0{,}55_5 \cdot 5 = 22{,}2 \text{ m/s},$$

$$\frac{\dot{x}_0 + \dot{x}_1}{2} = 23{,}6 \text{ m/s},$$

$$x_1 = 23{,}6 \cdot 5 = 118 \text{ m}.$$

Weitere Werte sind in der Tabelle 9 angeführt.

Tabelle 9

t	x_n	$(\dot{x}_n)$	$\dot{x}_n$	$\frac{\dot{x}_n + \dot{x}_{n+1}}{2}$	$(\ddot{x}_n)$	$\ddot{x}_n$	$\frac{\ddot{x}_n + (\ddot{x}_{n+1})}{2}$
0	0		25	23,6		— 0,52	— $0{,}55_5$
5	118	22,4	22,2	20,6	— 0,59	— 0,60	— 0,64
10	221	19,2	19,0	$17{,}1_5$	— 0,68	— 0,69	— 0,74
15	307	15,6	15,3	$13{,}1_5$	— 0,79	— 0,80	— $0{,}86_5$
20	373	11,3	11,0	$8{,}4_5$	— 0,93	— 09,4	— $1{,}01_5$
25	415	6,3	5,9	$2{,}9_5$	— 1,09	— 11,0	— 1,19
30	430	0,4	0,0		— 1,28		

Hieraus ist zu ersehen, daß der Zug nach 30 s stehenbleiben wird, nachdem er in dieser Zeit 430 m durchfahren hat.

Zweiter Teil

DIE DYNAMIK DER MATERIELLEN SYSTEME

KAPITEL X

DIE AUF DIE PUNKTE EINES MATERIELLEN SYSTEMS WIRKENDEN KRÄFTE

§ 51. Die äußeren und inneren Kräfte

Uns ist bereits bekannt, daß wir in der Mechanik jeden materiellen Körper in Gedanken in einzelne Teilchen, in materielle Punkte, zerspalten können; wir denken uns in der Mechanik alle Körper aus materiellen Punkten zusammengesetzt. Die Gesamtheit der materiellen Punkte heißt *das materielle System* (oder das System der materiellen Punkte). Die Frage nach der Bewegung irgendeines beliebigen Körpers oder einer beliebigen Gesamtheit von Körpern wird somit auf die Aufgabe von der Bewegung eines materiellen Systems zurückgeführt.

Nachdem wir die Gesetze der Bewegung des materiellen Systems ermittelt haben, werden wir die allgemeinsten Gesetze erhalten, denen alle mechanischen Erscheinungen unterworfen sind, die in der uns umgebenden Welt vor sich gehen.

Natürlich müssen wir die Zahl der in einem beliebigen Körper endlicher Abmessungen enthaltenen materiellen Punkte als unendlich groß annehmen. In unseren allgemeinen Untersuchungen werden wir voraussetzen, daß in einem materiellen System n materielle Punkte enthalten sind, wobei die Zahl n beliebig groß sein kann.

Wir wollen uns vor allem mit der Frage der auf die materiellen Punkte wirkenden Kräfte befassen, die im Bestande eines materiellen Systems enthalten sind.

Man kann alle auf die Punkte eines materiellen Systems wirkenden Kräfte in zwei Gruppen unterteilen: *in innere und äußere Kräfte.* Innere Kräfte heißen die Kräfte der Wechselwirkung zwischen den materiellen Punkten des gegebenen Systems. Äußere Kräfte sind Kräfte, die auf die Punkte des Systems von seiten der materiellen Punkte einwirken, die nicht zum gegebenen System gehören (sondern zu irgendwelchen anderen Systemen).

Ein Beispiel für innere Kräfte sind die elastischen Kräfte, die zwischen den Teilchen eines elastischen Körpers wirken. Dagegen kann die Schwerkraft, die auf alle Teilchen eines in der Nähe der Erdoberfläche befindlichen Körpers wirkt, als Beispiel für eine äußere Kraft dienen.

Es ist notwendig, zu bemerken, daß ein und dieselbe Kraft eine äußere in bezug auf das eine System und eine innere in bezug auf ein anderes System sein kann. So muß z. B. die Schwerkraft, die als äußere Kraft in bezug auf einen gegebenen Körper erscheint, zu den inneren Kräften gezählt werden, wenn zum System außer dem gegebenen Körper auch noch die ganze Erdkugel gezählt wird.

Die Bewegung der Punkte eines materiellen Systems hängt sowohl von äußeren als auch von inneren, an diesen Punkten angreifenden Kräften ab. Bei der Mehrzahl der Fälle bleiben die Größen der inneren Kräfte unbekannt. Daher ist es sehr wünschenswert, solche Abhängigkeiten zu erhalten, aus welchen die inneren Kräfte eliminiert sind. Wir werden sehen, daß solche Abhängigkeiten mit Hilfe einiger jener allgemeinen Gesetze der Bewegung eines materiellen Systems erhalten werden können, die im folgenden dargelegt werden.

§ 52. Die Zwangsbedingungen. Die zweiseitigen und die einseitigen Bindungen. Die Zwangskräfte

Alle auf die Punkte eines materiellen Systems wirkenden Kräfte können auch noch auf eine andere Art, nach einem anderen Kennzeichen, in zwei Gruppen eingeteilt werden. Um dieses Kennzeichen klarzustellen, wollen wir uns mit dem Begriff der Bindung oder Zwangsbedingung beschäftigen.

Es gibt Systeme, deren sämtliche Punkte sich beliebig verschieben können, so daß jeder Punkt eine beliebige Verrückung erhalten kann, unabhängig von den Verrückungen der übrigen Punkte. In diesem Fall sprechen wir von einem System *freier* materieller Punkte. Als Beispiel eines solchen Systems kann das Sonnensystem dienen, wenn man (wie es häufig in der Astronomie getan wird), die zu diesem System gehörigen Himmelskörper als materielle Punkte betrachtet.

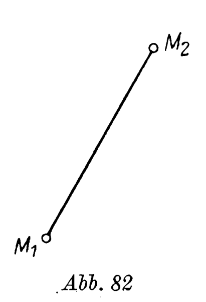


Abb. 82

Viel häufiger haben wir es mit materiellen Systemen zu tun, deren Punkte untereinander verbunden sind, so daß nicht jeder Punkt des Systems eine beliebige Verrückung, unabhängig von den Verrückungen der übrigen Punkte, erhalten kann. Ein solches System nennen wir ein System von *unfreien* materiellen Punkten. Wir wollen dies an dem folgenden einfachen Beispiel erläutern.

Wir stellen uns zwei Körper M_1 und M_2 vor, die sich an den Enden eines geradlinigen Stabes befinden (Abb. 82). Wir betrachten die Körper M_1 und M_2 als materielle Punkte. Den sie verbindenden Stab werden wir als absolut starr und masselos ansehen; einen solchen Stab nennen wir einen *ideellen* Stab. Wir haben es also mit einem System zu tun, das aus den zwei materiellen Punkten M_1 und M_2 besteht, die durch den ideellen Stab M_1M_2 miteinander verbunden sind. Die Punkte M_1 und M_2 können keine willkürlichen Verrückungen erhalten, die unabhängig voneinander sind. Wenn z. B. der Punkt M_2 unbeweglich bleibt, kann sich der Punkt M_1 nur auf der Oberfläche der Kugel mit dem Zentrum im Punkte M_2 und einem Radius gleich der Länge des Stabes M_1M_2 verschieben. Wir haben somit ein Beispiel eines Systems von unfreien materiellen Punkten.

In dem gegebenen Beispiel sind die Verrückungen der Punkte M_1 und M_2 der Bedingung unterworfen, daß die Entfernung zwischen diesen Punkten konstant bleiben muß. Diese Bedingung, die die Bewegungsfreiheit der Punkte M_1 und M_2 beschränkt, nennen wir eine Zwangsbedingung, die unserem System auferlegt ist. Jede die Bewegungsfreiheit der Punkte eines Systems einschränkende Bedingung heißt Bindung oder Zwangsbedingung.

Wir führen nun noch einige Beispiele von Zwangsbedingungen an. Wir stellen uns ein System vor, das aus n materiellen Punkten besteht, wobei jeder Punkt mit jedem durch einen ideellen Stab verbunden ist. Ein solches System heißt starres System; es wird dadurch charakterisiert, daß der Abstand zwischen seinen Punkten *unveränderlich* bleibt. Das Vorhandensein eines jeden Stabes in diesem System bedeutet eine Beschränkung der Bewegungsfreiheit der Punkte des Systems. Wir haben damit so viel Zwangsbedingungen, wie Stäbe im System vorhanden sind.

Man sieht leicht ein, daß es zur Gewährleistung der Unveränderlichkeit der Abstände zwischen allen Punkten eines unveränderlichen Systems nicht notwendig ist, alle Punkte paarweise durch ideelle Stäbe zu verbinden. Wir wollen die notwendige Anzahl der Stäbe ermitteln, welche die Unveränderlichkeit des Systems gewährleistet.

Damit die Abstände zwischen den drei Punkten M_1, M_2 und M_3 unveränderlich bleiben, müssen diese Punkte durch die drei Stäbe M_1M_2, M_2M_3, M_1M_3 verbunden sein. Die Unveränderlichkeit der Abstände des Punktes M_4 von den drei ersten Punkten erfordert drei neue Stäbe M_1M_4, M_2M_4, M_3M_4. Damit der Punkt M_5 in unveränderlichen Abständen von den ersten vier Punkten bleibt, genügt es, denselben mit beliebigen drei dieser Punkte zu verbinden, was eine Einführung weiterer drei neuer Stäbe erfordert. Überhaupt verlangt der Anschluß jedes weiteren Punktes an das System die Einführung von drei neuen Stäben. Somit sind drei Stäbe notwendig, die die Punkte M_1, M_2 und M_3 verbinden, und je drei Stäbe für jeden der übrigen $n - 3$ Punkte, also insgesamt

$$3 + 3(n - 3) = 3n - 6$$

Stäbe. Dies ist die Zahl der Zwangsbedingungen, welche die Unveränderlichkeit des Systems von n Punkten gewährleistet[1].

Wenn wir die Anzahl der in einem starren System enthaltenen Punkte als unendlich groß annehmen und die Längen der dieselben verbindenden ideellen Stäbe als unendlich klein, erhalten wir ein Gebilde, das in der Mechanik ein *absolut starrer Körper* genannt wird. In vielen Fällen (und zwar in allen den Fällen, in denen man die Deformationen der realen Körper vernachlässigen kann) können wir in unseren Vorstellungen den realen starren Körper durch einen solchen ideellen, absolut starren Körper ersetzen. Dieses Gebilde werden wir also im weiteren im Auge haben, wenn wir von einem absolut starren Körper reden werden.

[1] Die Anzahl der Stäbe, welche die Starrheit eines räumlichen Fachwerks mit n Knoten gewährleistet, ist die gleiche. Das unveränderliche System von n Punkten, die durch ideelle Stäbe verbunden sind, ist nichts anderes als ein räumliches Fachwerk mit n Knoten.

Wir wollen uns nun irgendeinen Mechanismus, z. B. einen Kurbelmechanismus, vorstellen (Abb. 83). Er stellt ein aus mehreren starren Körpern bestehendes System dar: der Welle mit der Kurbel, der Kurbelstange, dem Kreuzkopf mit der Kolbenstange und dem Kolben; diese Glieder des Mechanismus werden wir als absolut starre Körper betrachten. In diesem System gibt es eine ganze Reihe von Zwangsbedingungen. Einerseits haben wir Bindungen, welche die Unveränderlichkeit oder Starrheit der zum System gehörigen starren Körper selbst gewährleisten, andererseits ist die Bewegungsfreiheit dieser Körper noch durch weitere Zwangsbedingungen eingeschränkt. So ist die Bewegung der Welle mit der Kurbel der Bedingung unterworfen, daß die Wellenachse unbeweglich bleiben muß; diese Bedingung wird durch die Befestigung der Wellenzapfen in den Lagern verwirklicht. Die Bewegungsfreiheit des Kreuzkopfes ist durch die Gleitbahnen beschränkt, die ihm nur eine

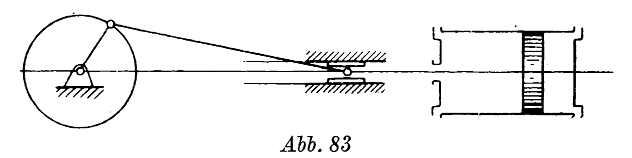


Abb. 83

geradlinige fortschreitende Bewegung gestatten. Schließlich gibt es noch Bindungen, welche die Kurbel mit der Kurbelstange und die Kurbelstange mit dem Kreuzkopf verbinden.

Also kann das System der n materiellen Punkte einer ganzen Reihe von Zwangsbedingungen unterworfen sein, die die Bewegungsfreiheit der Punkte des Systems beschränken.

Wir kennen zwei Arten von Bindungen. Zu der ersten Art gehören die Bindungen, die, indem sie irgendwelche Verrückungen der Punkte des Systems verhindern, gleichzeitig auch entgegengesetzte Verrückungen verhindern. Solche Bindungen heißen *zweiseitige* Bindungen. Alle oben aufgezählten Beispiele von Bindungen gehören zu dieser Kategorie. Es gibt aber auch solche Bindungen, die, indem sie irgendwelche Verrückungen verhindern, gleichzeitig aber entgegengesetzte Verrückungen zulassen. Das sind *einseitige* Bindungen. Als Beispiel einer einseitigen Bindung kann eine horizontale Ebene dienen, die irgendeinen Körper unterstützt: Indem sie die Verrückung des Körpers vertikal nach unten verhindert, gestattet diese Ebene eine Bewegung des Körpers vertikal nach oben in jeder Weise. Wenn der Körper von oben durch eine andere Ebene bedeckt ist (so daß sich zwei Führungen ergeben, zwischen denen der Körper gleiten kann), handelt es sich um eine zweiseitige Bindung.

Wir wissen, daß jede Bindung die Bewegungsfreiheit der Punkte des Systems einschränkt. Wir wollen nun sehen, wie diese rein kinematische Wirkung der Bindung in dynamischer Hinsicht in Erscheinung tritt.

Jede Bindung verändert, indem sie die Bewegungsfreiheit der Punkte des Systems begrenzt, gleichzeitig die Bewegung, die unter der Einwirkung der angreifenden Kräfte vom System ausgeführt wird, und zwar in dem Sinne, daß sich bei Vorhandensein einer Bindung die Punkte des Systems anders bewegen, als sie sich (bei sonst gleichen Bedingungen) bei Fehlen einer Bindung bewegen würden. Wenn die Bindung

die Bewegung des Systems verändert, treten diese oder jene Beschleunigungen in der Bewegung der Punkte des Systems auf. Wir wissen aber, daß die Beschleunigung des materiellen Punktes das Resultat der Wirkung der an diesem Punkte angreifenden Kräfte ist. Hieraus müssen wir schließen, daß das Vorhandensein einer Bindung das Auftreten entsprechender, an den Punkten des Systems angreifender Kräfte nach sich zieht. Diese Kräfte heißen besser *Zwangskräfte.*

Wir wollen z. B. den Kurbelmechanismus (Abb. 83) betrachten. Es gibt hierin eine ganze Reihe von Bindungen. Die Zapfen der Welle liegen in Lagern; hierdurch wird die Bindung realisiert, die verlangt, daß die Wellenachse unbeweglich ist. Als dynamischer Ausdruck dieser Bindung erscheinen die Reaktionen, die von den Lagern auf die Wellenzapfen übertragen werden. Eine andere Bindung, die dem gegebenen System auferlegt ist, wird durch die Verbindung der Kurbel mit dem Kurbelstangenende verwirklicht. Auch hier treten Reaktionen auf, die auf die Kurbel (seitens der Kurbelstange) und auf das Kurbelstangenende (seitens der Kurbel) wirken; natürlich sind nach dem Prinzip „die Kraft ist gleich der Gegenkraft“ diese zwei Reaktionen einander der Größe nach gleich und haben entgegengesetzte Richtungen.

Wenn also die Punkte des Systems mehreren Bindungen unterworfen sind, dann wirkt von seiten jeder Bindung auf jeden Punkt des Systems irgendeine Zwangskraft. Im allgemeinen wirken auf jeden Punkt des Systems so viel Zwangskräfte ein, wie Bindungen zwischen dem Punkte und den anderen Punkten des Systems bestehen.

Wir sehen nun, daß alle auf die Punkte des Systems wirkenden Kräfte in zwei Gruppen nach dem Kennzeichen ihrer Zugehörigkeit oder Nichtzugehörigkeit zu den Zwangskräften eingeteilt werden können. Es soll festgelegt werden, alle Kräfte mit Ausnahme der Zwangskräfte als *vorgegebene* Kräfte zu bezeichnen (zuweilen nennt man sie auch die angreifenden Kräfte). Folglich können alle auf die Punkte des Systems wirkenden Kräfte in zwei Gruppen unterteilt werden: in vorgegebene Kräfte und in Zwangskräfte.

Man muß beachten, daß die vorgegebenen Kräfte keinesfalls mit den äußeren Kräften und die Zwangskräfte nicht mit den inneren Kräften identifiziert werden dürfen. In der Zahl der vorgegebenen Kräfte können auch äußere Kräfte (z. B. die Schwerkraft) und innere Kräfte (z. B. elastische Kräfte) enthalten sein. Ebenso können in der Zahl der Reaktionen auch äußere und innere Kräfte enthalten sein. So z. B. sind im Falle eines Kurbelmechanismus die an den Wellenzapfen angreifenden Reaktionen der Lager Kräfte, die in bezug auf das gegebene System äußere Kräfte sind. Die Reaktionen jedoch, die an die Kurbel (seitens der Kurbelstange) und dem Kurbelstangenende (seitens der Kurbel) angreifen, müssen den inneren Kräften zugezählt werden.

Wir bemerken, daß die Größen der Zwangskräfte wesentlich von der Bewegung des Systems selbst abhängen; daher bleiben die Größen der Reaktionen solange unbekannt, bis die Bewegung des Systems bestimmt ist. In Anbetracht dessen ist eine Eliminierung der Zwangskräfte aus den Gleichungen der Dynamik eines Systems sehr wünschenswert. Wir werden im weiteren ein sehr einfaches Verfahren kennenlernen, mit dessen Hilfe eine Eliminierung der Zwangskräfte erreicht wird.

§ 53. Die virtuellen Verrückungen

Wir haben gesehen, daß jegliche Bindung die Bewegungsfreiheit der Punkte eines materiellen Systems einschränkt, indem sie nur bestimmte Verrückungen dieser Punkte zuläßt; andere Verrückungen werden durch die Bindung nicht zugelassen. Eine geringfügig kleine Verrückung des Systems, die durch die in diesem System vorhandenen Bindungen zugelassen ist, nennt man eine *virtuelle* oder *mögliche Verrückung* des Systems.

Wir stellen uns z. B. den geraden Hebel AB mit einer festen Stütze O vor (Abb. 84); als virtuelle Verrückung dieses Systems erscheint die Drehung um den winzig kleinen Winkel um den Punkt O. Die virtuelle Verrückung des Kurbelmechanismus (Abb. 85) ist die winzig kleine Verrückung, bei der die Welle sich mit der Kurbel um den winzig kleinen Winkel um ihre Achse dreht, wobei das Gleitstück und die Kurbelstange sich gleichfalls auf entsprechende Art verschieben.

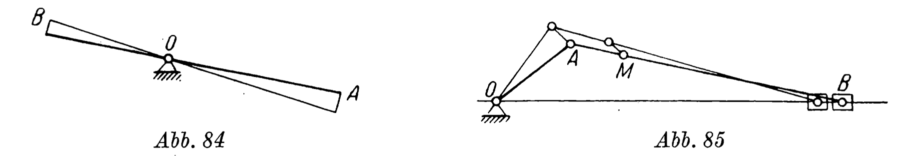


Abb. 84 *Abb. 85*

Wir stellen uns irgendein mechanisches System vor und geben ihm eine beliebige virtuelle Verrückung. Die einzelnen Punkte des Systems erhalten dabei sehr kleine Verrückungen, die wir die *virtuellen* Verrückungen dieser Punkte nennen werden. Diese virtuellen Verrückungen der Punkte des Systems stellen geringfügig kleine Bewegungsbahnbogen der gegebenen Punkte dar. So z. B. sind die virtuellen Verrückungen der Punkte A und B des Hebels AB (Abb. 84) winzig kleine Kreisbogen mit dem Zentrum im Stützpunkt O; die virtuelle Verrückung des Kurbelzapfens A im Kurbelmechanismus (Abb. 85) ist ein unbedeutend kleiner Kreisbogen mit dem Zentrum im Punkte O. Die virtuelle Verrückung des Gleitstückes B ist ein winzig kleiner Abschnitt der geraden Linie; die virtuelle Verrückung des Punktes M der Kurbelstange ist ein winzig kleiner Bogen irgendeiner Kurve vierter Ordnung.

Aus der „Kinematik" ist uns bekannt (siehe Teil I, § 97), daß man die krummlinige Verrückung des Punktes mit einem geradlinigen Abschnitt vertauschen kann, der längs der Tangente an die Bewegungsbahn im gegebenen Punkte verläuft, wenn man die elementare Verrückung eines Punktes als eine kleine Größe erster Ordnung betrachtet und die kleinen Größen höherer Ordnungen vernachlässigt. Im weiteren werden wir die virtuellen Verrückungen der Punkte des Systems als kleine Größen erster Ordnung betrachten. Aus dem Gesagten folgt, daß wir, wenn wir die kleinen Größen höherer Ordnungen vernachlässigen, das Recht haben, die virtuellen Verrückungen aller Punkte des Systems als *geradlinige Abschnitte* zu betrachten, die längs der Tangenten an die Bewegungsbahnen der entsprechenden Punkte verlaufen.

Wir bemerken, daß es Bindungen gibt, *die sich im Laufe der Zeit verändern.* Wir wollen uns z. B. eine Bindung denken, die verlangt, daß der gegebene materielle Punkt M auf irgendeiner horizontalen Ebene bleibt, wobei diese Ebene selbst eine

gewisse vorgegebene Bewegung in vertikaler Richtung ausführt (dieses kann mittels zweier horizontal geführter Ebenen verwirklicht werden, zwischen denen der Punkt M liegt und die sich selbst in vertikaler Richtung bewegen). In ähnlichen Fällen muß man unter *einer virtuellen Verrückung des Systems die geringfügig kleine Verrückung verstehen, die durch die für einen bestimmten Augenblick geltende Bindung zugelassen ist*, d. h., eine geringfügig kleine Verrückung, die durch die Bindung zugelassen werden würde, wenn diese sich nicht im Laufe der Zeit veränderte. So ist in dem soeben erwähnten Beispiel die mögliche Verrückung des Punktes M eine geringfügig kleine Verrückung in horizontaler Richtung; mit anderen Worten, unter der virtuellen Verrückung des Punktes M muß man in diesem Beispiel seine relative Verrückung in bezug auf die sich bewegenden Gleitführungen verstehen, nicht aber die absolute Verrückung, die sich aus dieser relativen Verrückung und aus der translativen Verrückung in vertikaler Richtung zusammen mit den führenden Ebenen zusammensetzt.

Wir wollen noch bemerken, daß jeder virtuellen Verrückung der Punkte des Systems eine andere virtuelle Verrückung entspricht, die der ersten entgegengesetzt ist, wenn das System zweiseitigen Bindungen unterworfen ist. Das kann man nicht sagen, wenn sich unter den Bindungen des Systems auch einseitige Bindungen befinden.

§ 54. Die ideellen Bindungen

Wir wollen uns ein materielles System vorstellen, das aus n materiellen Punkten $M_1, M_2, \ldots, M_n$ besteht (Abb. 86). Wir nehmen an, daß dieses System irgendeiner zweiseitigen Bindung unterworfen ist; die Zwangskräfte bezeichnen wir dann mit $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n$. Wir geben dem System eine beliebige virtuelle Verrückung; die Verrückungen der Punkte des Systems bezeichnen wir mit $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$. Nunmehr errechnen wir die Summe der Arbeiten der Reaktionen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n$ bei den Verrükkungen $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$, indem wir uns bei der Errechnung dieser Summe nur auf die kleinen Glieder erster Ordnung beschränken (und die Glieder höherer Ordnungen vernachlässigen). Wenn die Summe der bezeichneten Arbeiten, die mit dem erwähnten Genauigkeitsgrade errechnet wurde, für alle virtuellen Verrückungen des Systems gleich Null ist, dann heißt die gegebene Bindung eine ideelle.

Also heißt die zweiseitige Bindung *ideell*, wenn die Summe der Arbeiten der Reaktionen bei *jeder* virtuellen Verrückung des Systems, errechnet mit einer Genauigkeit bis zu den kleinen Größen erster Ordnung (einschließlich), gleich Null ist, d. h., wenn

$$\sum R_i \varepsilon_i \cos(\mathfrak{R}_i, \vec{\varepsilon}_i) = 0^{1}$$

für alle virtuellen Verrückungen $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots \vec{\varepsilon}_n$ gilt.

Wir wollen zeigen, daß ein ideeller Stab, der zwei materielle Punkte verbindet und von dem im § 52 die Rede war, das Beispiel einer ideellen Bindung darstellt.

[1] Hier und im folgenden werden mit dem Zeichen Σ die Summen bezeichnet, die auf alle Punkte des Systems ausgedehnt sind, d. h. auf alle i-Werte von $i = 1$ bis $i = n$.

Die Reaktionen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ des ideellen Stabes M_1M_2 (Abb. 87), die an den materiellen Punkten M_1 und M_2 angreifen, sind der Größe nach gleich und längs der Achse des Stabes nach verschiedenen Seiten gerichtet; sie sind so gerichtet, wie in der Abb. 87 angegeben, wenn der Stab zusammengedrückt ist. Wenn der Stab gedehnt ist, haben sie entgegengesetzte Richtungen. Wir geben dem System eine virtuelle Verrückung, indem wir den Stab in die Nachbarlage $M_1'M_2'$ verlegen.

Natürlich gilt nach wie vor

$$M_1' M_2' = M_1 M_2 = l,$$

wobei l die Länge des Stabes ist. Wenn wir $\overline{M_1M_1'}$ mit $\vec{\varepsilon}_1$ und $\overline{M_2M_2'}$ mit $\vec{\varepsilon}_2$ bezeichnen, dann ist die Summe der Arbeiten der Reaktionen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ bei den Verrückungen $\vec{\varepsilon}_1$ und $\vec{\varepsilon}_2$:

$$R_1 \varepsilon_1 \cos(\mathfrak{R}_1, \vec{\varepsilon}_1) + R_2 \varepsilon_2 \cos(\mathfrak{R}_2, \vec{\varepsilon}_2).$$

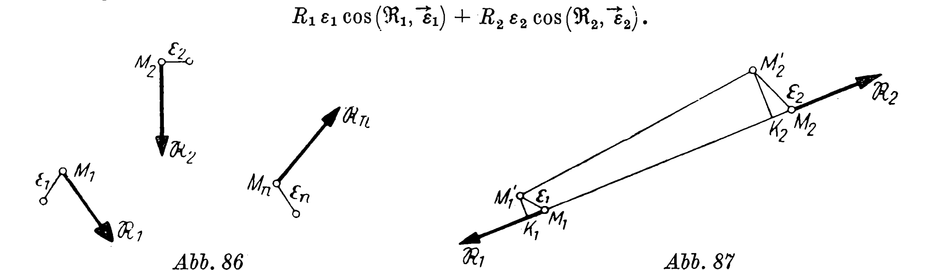


Abb. 86 *Abb. 87*

Wir fällen von den Punkten M_1' und M_2' die Lote $M_1'K_1$ und $M_2'K_2$ auf die Richtung der Stabachse M_1M_2. Dann gilt

$$\varepsilon_1 \cos(\mathfrak{R}_1, \vec{\varepsilon}_1) = K_1 M_1,$$

$$\varepsilon_2 \cos(\mathfrak{R}_2, \vec{\varepsilon}_2) = - K_2 M_2.$$

Folglich erhalten wir, wenn wir $R_1 = R_2 = R$ setzen, für die uns interessierende Summe der Arbeiten den Ausdruck:

$$R(K_1 M_1 - K_2 M_2).$$

Nun wollen wir vermerken, daß

$$K_1 M_1 - K_2 M_2 = K_1 K_2 - M_1 M_2 = l \cos\alpha - l = l(\cos\alpha - 1)$$

und folglich

$$R(K_1 M_1 - K_2 M_2) = R\, l(\cos\alpha - 1)$$

ist, wobei α der Winkel zwischen den Richtungen M_1M_2 und $M_1'M_2'$ ist. Wenn aber die Verrückungen ε_1 und ε_2 kleine Größen erster Ordnung sind, dann ist auch der Winkel α eine Größe derselben Ordnung; in dem Falle ist $\cos\alpha - 1$ eine kleine Größe zweiter Ordnung. Vernachlässsigen wir diese Größe, so erhalten wir:

$$R(K_1 M_1 - K_2 M_2) = 0,$$

ganz gleich, wie auch die virtuelle Verrückung unseres Stabes sein mag. Hieraus schließen wir, daß die zu untersuchende Bindung eine ideelle ist.

Da wir vereinbart haben, den absolut starren Körper als System einer unendlich großen Anzahl materieller Punkte zu betrachten, die durch unendlich kleine ideelle Stäbe miteinander verbunden sind, ziehen wir aus dem Bewiesenen die Schlußfolgerung, daß alle Bindungen in einem absolut starren Körper ideelle Bindungen sind.

Wenn die Bewegungsfreiheit eines in einem beliebigen System befindlichen starren Körpers durch weitere zweiseitige Bindungen begrenzt ist, werden diese Bindungen durch Berührung des gegebenen Körpers mit anderen starren Körpern realisiert;

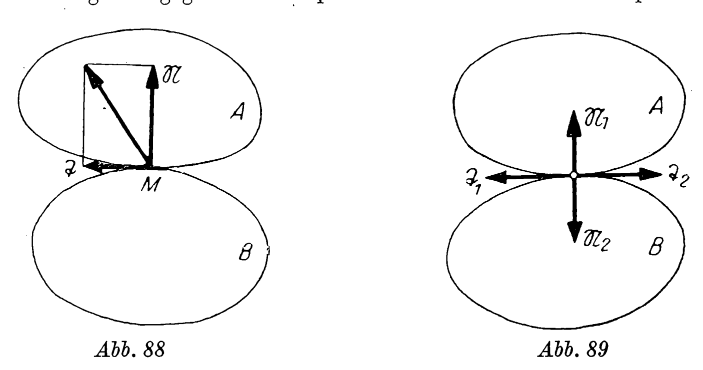


Abb. 88 *Abb. 89*

diese letzteren können beweglich oder unbeweglich sein, sie können zum gegebenen System gehören oder äußere Bindungen in bezug auf dasselbe sein (wir erinnern uns an das Beispiel des Kurbelmechanismus — Welle und Lager, Kreuzkopf und Gleitführungen usw.).

Wir wollen uns den starren Körper A vorstellen, der gezwungen ist, in Berührung mit dem unbeweglichen starren Körper B zu bleiben, der nicht zum gegebenen System gehört (Abb. 88). Auf den Körper A wirkt von seiten des Körpers B im Berührungspunkt M eine Reaktion, die in die Normalkomponente $\mathfrak{N}$ und die Tangentialkomponente $\mathfrak{T}$ zerlegt werden kann; diese letztere ist nichts anderes als die Reibungskraft. Wir geben dem Körper A eine virtuelle Verrückung und errechnen die Summe der Arbeiten der Kräfte $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T}$. Wenn die Bindung zwischen den Körpern A und B ein Gleiten des Körpers A auf der Fläche des Körpers B zuläßt, können wir bei Vernachlässigung der kleinen Größen höherer Ordnungen annehmen, daß die virtuelle Verrückung $\vec{\varepsilon}$ des Punktes M in einer Bewegung auf der tangentiellen Ebene im Berührungspunkt der Flächen der Körper A und B besteht.

Hieraus folgt, daß die Arbeit der normalen Reaktion $\mathfrak{N}$ auf der Verrückung $\vec{\varepsilon}$ gleich Null ist; die Arbeit der Reibungskraft $\mathfrak{T}$ jedoch ist nicht gleich Null. Folglich ist die Summe der Arbeiten der Kräfte $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T}$ nicht gleich Null.

Wir bemerken, daß die Arbeit der Reibungskraft $\mathfrak{T}$ Null wird, wenn ein Gleiten des Körpers A durch die Bindung nicht zugelassen wird (der Körper A rollt ohne zu gleiten auf der Fläche des Körpers B). In dem Falle ist die virtuelle Verrückung ε des Punktes M eine kleine Größe zweiter Ordnung, und wir können folglich bei der Errechnung der Arbeit der Kräfte $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T}$ $\vec{\varepsilon} = 0$ setzen.

Wenn der Körper B ebenso wie der Körper A zum gegebenen System gehörte, müßten wir sowohl die Reaktionen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{T}_1$, die am Körper A angreifen, als auch die Reaktionen $\mathfrak{N}_2$ und $\mathfrak{T}_2$, die auf den Körper B wirken, berücksichtigen (Abb. 89). Natürlich sind die normalen Reaktionen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ der Größe nach gleich und entgegengesetzt gerichtet; dasselbe gilt auch für die Reibungskräfte $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$. Wir wollen den Körpern A und B eine virtuelle Verrückung erteilen und die Summe der Arbeiten aller dieser Kräfte errechnen. Bei dieser Berechnung genügt es, die relative Verrückung des Körpers A in bezug auf den Körper B zu betrachten, da bei einer gemeinsamen translativen Bewegung der Körper A und B die Summe der Arbeiten unserer Kräfte gleich Null ist (die Arbeiten der Kräfte $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ sowie der Kräfte $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ sind der Größe nach gleich und dem Vorzeichen nach entgegengesetzt). Auf diese Art kommen wir bereits auf den Fall des untersuchten unbeweglichen Körpers B. Wir schließen, daß die Summe der Arbeiten der normalen Reaktionen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ gleich Null ist, dagegen ist die Summe der Arbeiten der Reibungskräfte $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ nicht gleich Null.

Also sind durch das Vorhandensein der Reibungskräfte zwischen den starren Körpern die Bindungen zwischen ihnen keine ideellen; die Bindung zwischen starren Körpern kann nur in dem Falle eine ideelle genannt werden, wenn sie ohne Reibung vor sich geht.

Man kann jedoch mit Hilfe eines sehr einfachen Verfahrens eine durch Reibung realisierte Bindung in eine ideelle verwandeln: Man braucht nur die Reibungskräfte aus der Kategorie der Reaktionen zu eliminieren und dieselben zu der Gruppe der vorgegebenen Kräfte hinzuzuzählen, indem man in der Zahl der Reaktionen nur die normalen Reaktionen läßt, deren Arbeitssumme auf jeder virtuellen Verrückung, wie wir gesehen haben, gleich Null ist. Im folgenden werden wir so verfahren. Wenn wir die Reibungskräfte zu den vorgegebenen Kräften rechnen, erhalten wir das Recht, alle Bindungen zwischen den starren Körpern als ideelle Bindungen zu betrachten.

Wir werden uns hier nicht mit dem Fall der einseitigen Bindungen beschäftigen. Im weiteren (s. § 63) wird gezeigt werden, daß die Reaktionen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_n$ dieser Bindung die Bedingung $\Sigma R_i \varepsilon_i \cos(\mathfrak{R}_i, \vec{\varepsilon}_i) \geq 0$ für alle möglichen Verrückungen $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$ befriedigen, wenn die einseitige Bindung ohne Reibung verwirklicht ist.

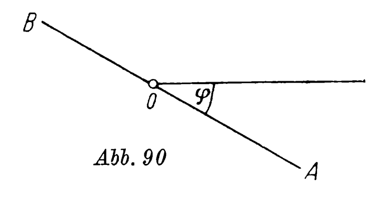


Abb. 90

§ 55. Die Anzahl der Freiheitsgrade

Mit der Vorstellung von den in einem System vorhandenen Bindungen ist die Vorstellung von der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems eng verbunden. Wir wollen einiges darüber sagen.

Wir stellen uns einen geraden Hebel AB, den wir als absolut starr betrachten, mit der festen Drehachse O vor (Abb. 90). Wieviel Größen müssen vorgegeben werden, damit die Lage aller Punkte dieses Stabes eindeutig bestimmt werden kann? Es ist offensichtlich, daß keine Notwendigkeit vorliegt, die Koordinaten aller Punkte des Stabes vorzugeben. Es genügt vollständig, eine Größe, und zwar den Dreh-

winkel des Stabes φ vorzugeben. Durch den Winkel φ wird die Lage aller Punkte des Hebels AB völlig bestimmt. Wir sagen, daß der Hebel AB ein System mit einem Freiheitsgrade darstellt.

Wir wählen noch das Beispiel eines Kurbelmechanismus (Abb. 91). Auch hier wird die Lage aller Punkte des Systems eindeutig durch das Vorgeben einer Größe — des Drehwinkels φ der Kurbel bestimmt. Wir setzen dabei natürlich voraus, daß alle Teile des Mechanismus absolut starr sind. Auch der Kurbelmechanismus stellt ein System mit einem Freiheitsgrade dar.

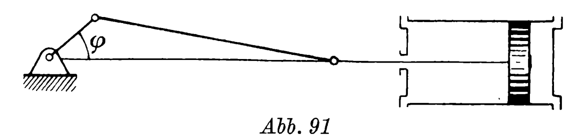


Abb. 91

Nun stellen wir uns einen Zentrifugalregulator vor, der sich um eine vertikale Achse dreht (Abb. 92). Um die Lage aller Punkte dieses Systems eindeutig zu bestimmen, muß man zwei Größen vorgeben: den Drehwinkel φ des Regulators und den Winkel α, der durch einen der Stäbe mit der vertikalen Achse gebildet wird. Wir sagen, der Zentrifugalregulator hat zwei Freiheitsgrade.

Allgemein gesagt: Wenn die Lage aller Punkte des Systems durch das Vorgeben von k unabhängigen Größen eindeutig bestimmt ist, besitzt das System k Freiheitsgrade. Die Größen, durch deren Vorgabe die Lage aller Punkte des Systems eindeutig bestimmt ist, nennt man die *verallgemeinerten Koordinaten* des Systems. Folglich ist die *Anzahl der Freiheitsgrade* des Systems gleich der Anzahl der unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten, welche die Lage des Systems bestimmen.

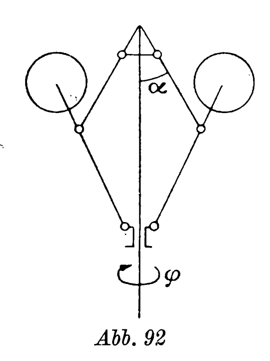


Abb. 92

Die Mehrzahl der in der Praxis verwendeten Mechanismen stellt Systeme mit einem Freiheitsgrade dar (genauer gesagt, kann man sie als Systeme mit einem Freiheitsgrade betrachten, wenn man alle ihre Teile als absolut starr annimmt). Daher erscheinen Systeme mit einem Freiheitsgrade praktisch als besonders wichtig; zuweilen werden solche Systeme auch Systeme mit *einer vollen Anzahl von Bindungen* genannt. Jedoch kommen im Maschinenbau auch Systeme mit einer größeren Anzahl von Freiheitsgraden vor. Eine mit einem Zentrifugalregulator versehene Dampfmaschine stellt das Beispiel eines Systems mit zwei Freiheitsgraden dar. Im Falle einer sogenannten nicht geraden Regulierung haben wir es mit Systemen zu tun, die drei oder noch mehr Freiheitsgrade besitzen.

§ 56. Die Differentialgleichungen der Bewegung eines materiellen Systems

In den vorhergegangenen Paragraphen haben wir gesehen, daß alle auf die Punkte eines materiellen Systems wirkenden Kräfte in zwei Gruppen eingeteilt werden können, und zwar auf zweierlei Art: entweder in äußere und innere oder in vorgegebene

Kräfte und Zwangskräfte. Wir wollen nun die Differentialgleichungen der Bewegung der Systempunkte aufschreiben. Die Gleichungen können ebenfalls auf zweierlei Art geschrieben werden.

Wir stellen uns ein materielles System vor, daß aus n materiellen Punkten $M_1, M_2, \ldots, M_n$ besteht (Abb. 93); die Massen dieser Punkte bezeichnen wir mit $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Wir teilen alle an den Punkten des Systems angreifenden Kräfte in innere und äußere Kräfte ein. Ferner bezeichnen wir die Resultierende aller am Punkt M_1 angreifenden äußeren Kräfte mit $\mathfrak{F}_1^E$ und die Resultierende aller an demselben Punkte angreifenden inneren Kräfte mit $\mathfrak{F}_1^J$. Entsprechend bezeichnen wir die Resultierenden der an den übrigen Punkten $M_2, \ldots, M_n$ angreifenden äußeren und inneren Kräfte mit $\mathfrak{F}_2^E, \mathfrak{F}_2^J, \ldots, \mathfrak{F}_n^E, \mathfrak{F}_n^J$.

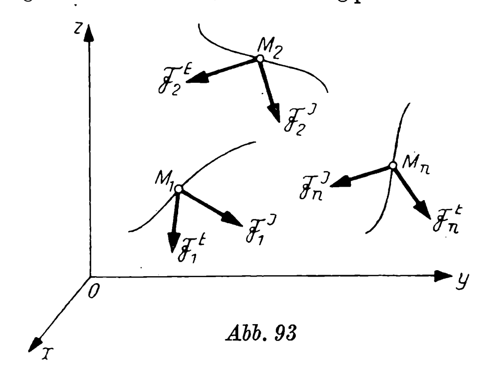


Abb. 93

Wir wählen die rechtwinkligen Koordinatenachsen x, y und z und bezeichnen die Koordinaten der Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ in bezug auf diese Achsen mit $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$. Für jeden dieser Punkte dieses Systems können wir drei Differentialgleichungen der Bewegung aufschreiben. Wählen wir einen beliebigen Punkt M_i (wobei $i = 1, 2, \ldots, n$ ist) und bezeichnen die Projektionen der an diesem Punkte angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_i^E$ und $\mathfrak{F}_i^J$ auf die Achsen x, y, z mit X_i^E, Y_i^E, Z_i^E und X_i^J, Y_i^J, Z_i^J, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= X_i^E + X_i^J, \\ m_i \ddot{y}_i &= Y_i^E + Y_i^J, \\ m_i \ddot{z}_i &= Z_i^E + Z_i^J. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Indem wir dem Index i alle Werte $1, 2, \ldots, n$ geben, erhalten wir $3n$ Differentialgleichungen der Bewegung des Systems.

Wir stellen uns wieder das materielle System $M_1, M_2, \ldots, M_n$ vor (Abb. 94) und unterteilen alle auf diese Punkte einwirkenden Kräfte in vorgegebene Kräfte und Zwangskräfte. Wir bezeichnen die Resultierende aller an dem Punkte M_1 angreifenden vorgegebenen Kräfte mit $\mathfrak{F}_1$ und die Resultierende aller auf denselben Punkt einwirkenden Zwangskräfte mit $\mathfrak{F}_1'$; für die übrigen Punkte führen wir die entsprechenden Bezeichnungen $\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_2', \ldots, \mathfrak{F}_n, \mathfrak{F}_n'$ ein. Wählen wir die Koordinatenachsen x, y und z und bezeichnen die Komponenten der auf den Punkt M_i wirkenden Kräfte $\mathfrak{F}_i$ und $\mathfrak{F}_i'$ mit X_i, Y_i, Z_i und X_i', Y_i', Z_i', so gilt:

$$\left.\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= X_i + X_i', \\ m_i \ddot{y}_i &= Y_i + Y_i', \\ m_i \ddot{z}_i &= Z_i + Z_i'. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Wir lassen den Index i die Werte $1, 2, \ldots, n$ durchlaufen und erhalten wiederum $3n$ Differentialgleichungen der Bewegung unseres Systems.

Wenn alle auf die Punkte des Systems wirkenden Kräfte bekannt wären, würde die Integration der Gl. (2) oder (1), theoretisch gesprochen, zu der Bestimmung der Bewegung des Systems unter der Wirkung der vorgegebenen Kräfte führen.

Jedoch ist eine solche Problemstellung nur in Ausnahmefällen möglich; in der Mehrzahl der Fälle ist die Anzahl der im System enthaltenen materiellen Punkte so groß (im Fall eines starren Körpers $n = \infty$), daß die Anwendung der Gln. (1) oder (2) sich als praktisch unausführbar erweist. Außerdem wissen wir bereits, daß die Zwangskräfte wesentlich von der Bewegung des Systems abhängen und daher nicht ermittelt werden können, solange die Bewegung des Systems selbst nicht bestimmt ist. Die inneren Kräfte bleiben uns in den meisten Fällen unbekannt. In Anbetracht dessen ist die praktische Bedeutung der Gln. (1) und (2) nicht groß. Wir werden im weiteren sehen, auf welche Art Gleichungen gewonnen werden können, in denen die inneren Kräfte oder Zwangskräfte eliminiert sind; diese letzteren Gleichungen erweisen sich bei der Anwendung als bequem.

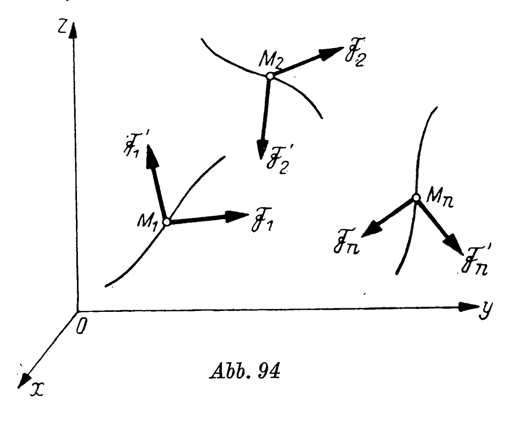


Abb. 94

KAPITEL XI

DIE METHODE DER KINETOSTATIK

§ 57. Die Methode der Kinetostatik

Beim Studium der Bewegung des materiellen Punktes haben wir (im Kapitel II) das Verfahren kennengelernt, durch das jede Aufgabe der Dynamik des materiellen Punktes auf die entsprechende Aufgabe der Statik zurückgeführt werden kann. Dieses Verfahren kann auch bei der Lösung von Aufgaben der Dynamik des materiellen Systems angewandt werden.

Wir stellen uns ein in Bewegung befindliches materielles System vor, das aus den materiellen Punkten $M_1, M_2, \ldots, M_n$ besteht (Abb. 95), und bezeichnen die Resultierende der vorgegebenen Kräfte und die Resultierende der Zwangskräfte, die an

den Punkt M_1 angreifen, mit $\mathfrak{F}_1$ bzw. $\mathfrak{F}_1'$. Die vorgegebenen Kräfte und Bindungsreaktionen, die an den übrigen Punkten angreifen, bezeichnen wir auf ähnliche Art mit $\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_2', \ldots, \mathfrak{F}_n, \mathfrak{F}_n'$.

Wir fügen zu diesen Kräften die Trägheitskräfte $\mathfrak{F}_{I1}, \mathfrak{F}_{I2}, \ldots, \mathfrak{F}_{In}$ der Punkte unseres Systems hinzu. Bezeichnen wir die Massen dieser Punkte mit $m_1, m_2, \ldots, m_n$ und ihre Beschleunigungen mit $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \ldots, \mathfrak{w}_n$, so erhalten wir

$$\mathfrak{F}_{I1} = -m_1\mathfrak{w}_1, \qquad \mathfrak{F}_{I2} = -m_2\mathfrak{w}_2, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{F}_{In} = -m_n\mathfrak{w}_n.$$

Wir wissen, daß die Trägheitskraft $\mathfrak{F}_{I1}$ mit den Kräften $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_1'$ im Gleichgewicht steht; ebenso stehen die Kräfte $\mathfrak{F}_{I2}$, $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_2'$ im Gleichgewicht usw. Hieraus folgt, daß die Gesamtheit der Kräfte, die aus den vorgegebenen Kräften, den Zwangskräften und den Trägheitskräften besteht, sich im Gleichgewicht befindet.

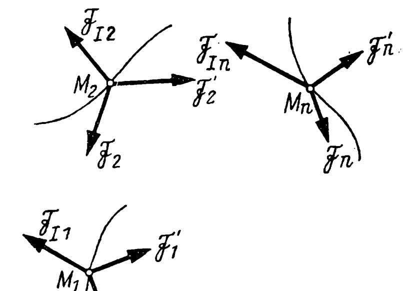


Abb. 95

Die Trägheitskräfte der Punkte eines materiellen Systems stehen also mit den vorgegebenen Kräften und den Zwangskräften im Gleichgewicht.

Wir sehen, daß durch die Einführung der Trägheitskräfte die Aufgabe von der Bewegung eines materiellen Systems, eine Aufgabe der Dynamik, auf eine Aufgabe vom Gleichgewicht desselben Systems zurückgeführt wird, d. h. auf eine Aufgabe der Statik. Dieses Verfahren erweist sich häufig bei der Anwendung als sehr nützlich. Besonders einfach wird es dann angewandt, wenn die Bewegung des Systems gegeben ist und irgendeine Frage, welche die auf das System wirkenden Kräfte betrifft, beantwortet werden soll.

Wenn die Punkte des Systems sich längs krummliniger Bewegungsbahnen bewegen, muß die Trägheitskraft jedes Punktes in eine zentrifugale und eine tangentiale Komponente zerlegt werden, wie im § 5 erläutert wurde.

§ 58. Die Spannungen im Radkranz eines Schwungrades

Wir wollen das dargelegte Verfahren auf die Bestimmung dynamischer Spannungen im Radkranz eines schnell rotierenden Schwungrades anwenden. Wir werden voraussetzen, daß das Schwungrad gleichförmig mit einer Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Wir werden die Masse der Speichen vernachlässigen und das Schwungrad als einen Ring vom Radius R betrachten.

Wir bringen an allen Elementen, in die wir in Gedanken diesen Ring zerlegen, die zentrifugale Trägheitskraft $F = mR\,\omega^2$ an, wobei m die Masse des gegebenen Elementes ist (Abb. 96). Wenn wir diese Trägheitskräfte einführen, erhalten wir das Recht,

unser Schwungrad als in Ruhe befindlich anzusehen. Wir kommen zu der Aufgabe, die Spannungen in dem Ringe zu bestimmen, der durch radial gerichtete und gleichmäßig über den Umfang des Ringes verteilte Kräfte $\mathfrak{F}_I$ gedehnt wird.

Wir durchschneiden den Ring an den Punkten A und B (an den Enden des vertikalen und des horizontalen Durchmessers) und betrachten das Gleichgewicht der an einem Viertel des Ringumfanges AB angreifenden Kräfte (Abb. 97). An alle Elemente dieses Ringteiles sind radiale Trägheitskräfte $\mathfrak{F}_I$ angelegt; außerdem wirken in den Schnitten A und B (von seiten der von uns abgeschnittenen Ringteile) die Kräfte $\mathfrak{T}$ (die Schwerkraft vernachlässigen wir).

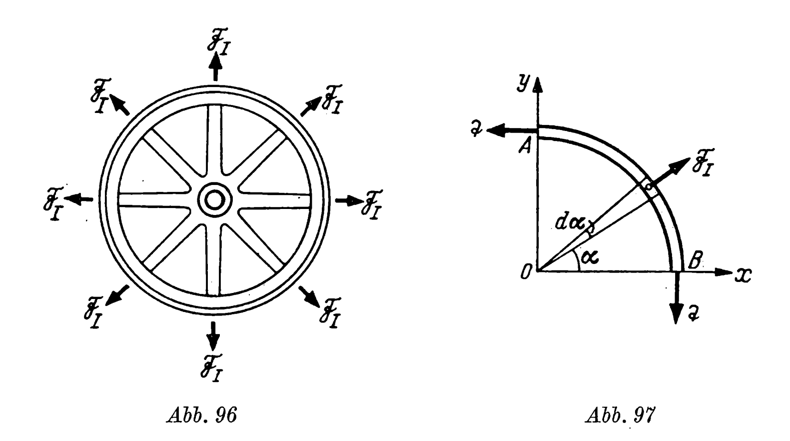


Abb. 96 *Abb. 97*

Wir wählen den horizontalen und den vertikalen Durchmesser des Ringes als Achsen x und y. Ferner trennen wir eins der Elemente des Ringes ab und bezeichnen die Winkel, die durch die von den Enden dieses Elementes gezogenen Radien mit der x-Achse gebildet werden, mit α und $\alpha + d\alpha$. In diesem Falle erhalten wir, wenn wir alle Kräfte auf die x-Achse projizieren, die Gleichgewichtsgleichung:

$$\sum F_I \cos\alpha - T = 0,$$

wobei die Summe auf alle Elemente des Viertelumfanges des Ringes ausgedehnt ist. Hieraus folgt:

$$T = \sum F_I \cos\alpha. \tag{1}$$

Hierin ist $\mathfrak{F}_I = mR\omega^2$. Ferner gilt, wenn wir die Masse des ganzen Schwungrades (des Ringes) mit M bezeichnen:

$$\frac{m}{M} = \frac{d\alpha}{2\pi} \quad \text{oder} \quad m = \frac{M}{2\pi} d\alpha.$$

Folglich ist

$$F_I = \frac{M}{2\pi} R\,\omega^2\, d\alpha.$$

Setzen wir diesen Ausdruck für F_I in die Gl. (1) ein und gehen zur Grenze über, so finden wir

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M R \omega^2}{2\pi} \cos\alpha \, \mathrm{d}\alpha = \frac{M R \omega^2}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \, \mathrm{d}\alpha .$$

Es ist aber $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha \, \mathrm{d}\alpha = 1$. Folglich ist

$$T = \frac{M R \omega^2}{2\pi} = \frac{P R \omega^2}{2\pi g},$$

wobei P das Gewicht des Schwungrades ist.

Wir wollen diese Gleichung umschreiben, indem wir das spezifische Gewicht γ des Materials einführen, aus dem das Schwungrad hergestellt ist. Es gilt:

$$P = 2\pi\gamma R S,$$

wobei S die Fläche des Querschnittes des Schwungradkranzes ist. Folglich ist

$$T = \frac{\gamma}{g} S R^2 \omega^2 .$$

Um die Ringspannung im Radkranz des Schwungrades zu gewinnen, haben wir nur noch die gewonnene Kraft T durch die Schnittfläche S zu dividieren. Folglich erhalten wir, wenn wir die gesuchte Spannung mit σ bezeichnen:

$$\sigma = \frac{T}{S} = \frac{\gamma}{g} R^2 \omega^2 .$$

Wir bemerken noch, daß $R\omega$ nichts anderes ist als die Größe der Umfangsgeschwindigkeit v. Also folgt endgültig:

$$\sigma = \frac{\gamma v^2}{g}. \tag{2}$$

Wie ersichtlich, wächst die Spannung σ im Radkranz eines rotierenden Schwungrades mit dem Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit an. Wenn die Spannung σ den für das gegebene Material zulässigen Wert σ_{zul} übersteigt, tritt Bruchgefahr für das Schwungrad ein. Die von uns gewonnene Gl. (2) zeigt, daß diese Gefahr dann eintritt, wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades die Größe

$$v_{zul} = \sqrt{\frac{g}{\gamma} \sigma_{zul}}$$

übersteigt.

Nach dieser Gleichung kann die zulässige Umfangsgeschwindigkeit v_{zul} für ein beliebiges Material berechnet werden. Wir wollen eine derartige Berechnung für ein gußeisernes Schwungrad durchführen. In diesem Fall ist $\gamma = 7{,}25\ \text{g/cm}^3 = 0{,}00725\ \text{kg/cm}^3$; nehmen wir $\sigma_{\text{zul}} = 70\ \text{kg/cm}^2$ an, so erhalten wir

$$v_{\text{zul}} = \sqrt{\frac{981 \cdot 70}{0{,}00725}} = 3{,}08 \cdot 10^3\ \text{cm/s} = 30{,}8\ \text{m/s}.$$

§ 59. Die Reduktion der Trägheitskräfte bei Translation

Wenn wir die Methode der Kinetostatik zur Erforschung der Bewegung eines starren Körpers oder eines aus mehreren starren Körpern bestehenden Systems anwenden, müssen wir in die Berechnung eine unzählige Menge von Trägheitskräften aufnehmen. An jedes im gegebenen Körper oder den gegebenen Körpern befindliche Teilchen muß eine ihr entsprechende Trägheitskraft angelegt werden. In ähnlichen Fällen ist es zweckmäßig, die an jeden starren Körper angelegten Trägheitskräfte nach den in der Statik starrer Körper dargelegten Regeln der Reduktion von Kräften zu reduzieren. Besonders einfache Resultate erzielt man im Falle einer fortschreitenden Bewegung des starren Körpers. Diesen Fall betrachten wir in diesem Paragraphen.

Abb. 98

Stellen wir uns also das materielle System $M_1, M_2, \ldots, M_n$ vor, das sich fortschreitend bewegt (Abb. 98). Alle Punkte des Systems bewegen sich in gleicher Weise. Wir vermerken den Schwerpunkt C unseres Systems; auch dessen Bewegung ist identisch mit der Bewegung aller Punkte des Systems. Wir bezeichnen die allen Punkten des Systems und auch dem Schwerpunkt gemeinsame Beschleunigung mit $\mathfrak{w}$.

Nun führen wir die Trägheitskräfte $\mathfrak{J}_{I1}, \mathfrak{J}_{I2}, \ldots, \mathfrak{J}_{In}$ der Punkte unseres Systems ein. Es gilt

$$\mathfrak{J}_{I1} = -m_1 \mathfrak{w}, \qquad \mathfrak{J}_{I2} = -m_2 \mathfrak{w}, \ldots, \qquad \mathfrak{J}_{In} = -m_n \mathfrak{w},$$

wobei $m_1, m_2, \ldots, m_n$ die Massen der Punkte des Systems sind. Die Richtungen aller Trägheitskräfte $\mathfrak{J}_{I1}, \mathfrak{J}_{I2}, \ldots, \mathfrak{J}_{In}$ sind der Richtung der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ entgegengesetzt.

Wir addieren die Kräfte $\mathfrak{J}_{I1}, \mathfrak{J}_{I2}, \ldots, \mathfrak{J}_{In}$ nach den Regeln der Statik eines starren Körpers. Es handelt sich hier um ein System paralleler Kräfte im Raume. Da alle Kräfte nach ein und derselben Seite gerichtet sind, haben sie eine Resultierende, die nach derselben Seite gerichtet und gleich der Summe der gegebenen Kräfte ist. Bezeichnen wir diese Resultierende mit $\mathfrak{J}_I$, so erhalten wir

$$\mathfrak{J}_I = \sum \mathfrak{J}_{Ii} = -\sum m_i \mathfrak{w} = -\mathfrak{w} \sum m_i$$

oder, wenn wir

$$\sum m_i = M$$

setzen, wobei M die Masse des ganzen Systems ist:

$$\mathfrak{F}_I = -M\mathfrak{w}.$$

Als Angriffspunkt der Resultierenden können wir das Zentrum der parallelen Kräfte $\mathfrak{F}_{I1}, \mathfrak{F}_{I2}, \ldots, \mathfrak{F}_{In}$ annehmen (s. Teil I, § 67). Wir werden zeigen, daß dieses Zentrum mit dem Schwerpunkt C unseres Systems zusammenfällt.

Wir bemerken in der Tat, daß sich die Lage des Zentrums der parallelen Kräfte bei der Drehung aller Kräfte um ihre Angriffspunkte unter Beibehaltung ihrer Parallelität nicht verändert und auch nicht bei der Veränderung der Größen aller gegebenen Kräfte in ein und demselben Verhältnis. Wir drehen nun die Kräfte $\mathfrak{F}_{I1}, \mathfrak{F}_{I2}, \ldots, \mathfrak{F}_{In}$ um die Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ so, daß sie vertikal nach unten gerichtet sind und multiplizieren die Größen dieser Kräfte mit dem Ausdruck $\frac{g}{w}$. Dann haben unsere Kräfte die Größen $m_1 g, m_2 g, \ldots, m_n g$ und sind vertikal nach unten gerichtet, d. h., sie fallen mit den Schwerkräften der Punkte des Systems zusammen. Für die Schwerkräfte ist jedoch der Schwerpunkt C des Systems das Kräftezentrum. Hieraus schließen wir, daß auch für die gegebenen Trägheitskräfte $\mathfrak{F}_{I1}, \mathfrak{F}_{I2}, \ldots, \mathfrak{F}_{In}$ das Kräftezentrum mit dem Schwerpunkt des Systems zusammenfällt.

Aus dem Gesagten folgt, daß wir bei der Anwendung der Methode der Kinetostatik bei einem sich fortschreitend bewegenden starren Körper die Trägheitskräfte aller Teilchen des Körpers nicht zu berücksichtigen brauchen. Es genügt, die resultierende Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I = -M\mathfrak{w}$ einzuführen, wenn man sie im Schwerpunkt des Körpers anlegt und entgegengesetzt der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ richtet.

Wenn die Bewegung des Körpers keine fortschreitende ist, ist das Resultat der Reduktion der Trägheitskräfte der Teilchen des Körpers bedeutend komplizierter. Auf die Frage nach der Reduktion der Trägheitskräfte im Fall eines starren Körpers, der sich um eine feste Achse dreht, werden wir im Kapitel XVIII zurückkommen.

§ 60. Der Apparat von Dedouis zur Beschleunigungsmessung eines Zuges

Im § 6 wurde das Wesen der Methode von Dedouis zur Messung der Beschleunigung eines Zuges aus den Abweichungen eines in einem Waggon aufgehängten Pendels erklärt. Ein einfaches Pendel ist jedoch kein genügend empfindlicher Apparat zur Messung jener verhältnismäßig kleinen Beschleunigung, mit der man es im gegebenen Fall zu tun hat. Wir wollen nun einen anderen Apparat betrachten, der eine etwas abgeänderte Form des dynamometrischen Pendels darstellt.

Der Apparat besteht aus einer runden Scheibe vom Radius a, die ohne zu gleiten auf der horizontalen Ebene rollen kann (Abb. 99); der Schwerpunkt C der Scheibe fällt nicht mit ihrem geometrischen Zentrum O zusammen. Der Apparat ist in einem Waggon des Zuges untergebracht. Wenn sich der Waggon in Ruhe befindet, oder

mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegt, nimmt die Scheibe ihre Gleichgewichtslage ein, wobei der Schwerpunkt C und das geometrische Zentrum O auf derselben Vertikalen liegen (diese Lage der Scheibe ist in der Abbildung durch eine dünne Linie gekennzeichnet). Stellen wir uns vor, daß der Waggon eine von links nach rechts gerichtete Beschleunigung $\mathfrak{w}$ erhält. In diesem Falle wird die Scheibe um einen bestimmten Weg s nach der entgegengesetzten Seite, d. h. nach links, rollen. Aus der Größe der Entfernung s kann man die Größe der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ des Waggons berechnen.

Wir wollen die Abhängigkeit zwischen w und s finden, wobei wir voraussetzen, daß diese beiden Größen konstant sind (der Waggon bewegt sich gleichförmig beschleunigt, und die Scheibe befindet sich in relativer Ruhe in bezug auf den sich bewegenden Waggon). Wir wollen bei unserer Scheibe die Methode der Kinetostatik anwenden. An der Scheibe greifen folgende Kräfte an: die Schwerkraft $\mathfrak{P}$, die normale Reaktion $\mathfrak{N}$ der Stützfläche und die Reibungskraft $\mathfrak{T}$ (die beiden letzten Kräfte greifen im Berührungspunkt A der Scheibe mit der Stützfläche an). Wir fügen zu diesen Kräften die Trägheitskräfte hinzu. Da die Scheibe sich fortschreitend bewegt (sie beteiligt sich an der Bewegung des Waggonkastens), genügt es, die resultierende Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I = - M\mathfrak{w}$ einzuführen, wobei M die Masse der Scheibe ist. Diese Kraft greift im Schwerpunkt C an, sie ist von rechts nach links gerichtet.

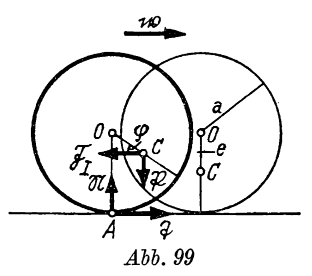


Abb. 99

Die Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{F}_I$ müssen sich gegenseitig aufheben. Um die Kräfte $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T}$ zu eliminieren, stellen wir die Momentengleichung in bezug auf den Punkt A auf. Bezeichnen wir $OC = e$ und $\sphericalangle\, COA = \varphi$, so erhalten wir:

$$P\, e \sin\varphi - F_I(a - e\cos\varphi) = 0\,,$$

woraus wir, wenn wir $F_I = Mw$ setzen,

$$w = g\,\frac{e\sin\varphi}{a - e\cos\varphi}$$

finden.

Im Fall eines kleinen Winkels φ können wir $\sin\varphi = \varphi$, $\cos\varphi = 1$ setzen; dann ist

$$w = g\,\frac{e\,\varphi}{a - e}\,.$$

Andererseits, da die Scheibe auf der Stützfläche ohne zu gleiten rollt, ist $s = a\varphi$. Folglich ist

$$w = g\,\frac{e}{a - e}\cdot\frac{s}{a}\,.$$

Wenn die Größe e verhältnismäßig klein und der Radius der Scheibe a genügend groß ist, wird der sehr kleinen Beschleunigung w eine bemerkbare Größe s entsprechen; der Apparat wird hinreichend empfindlich gegen kleine Beschleunigungen sein. Mit einem derartigen Apparat konnte DEDOUIS eine Beschleunigung des Zuges von der Größenordnung 0,0001 g messen.

§ 61. Der Satz von D'ALEMBERT

Die Anwendung der Methode der Kinetostatik in komplizierteren Fällen, und zwar dann, wenn es sich um ein mehr oder weniger kompliziertes System handelt, das aus einer bedeutenden Anzahl von miteinander verbundenen Massen besteht, wird dank einem sehr allgemeinen, zuerst von D'ALEMBERT (1743) ausgesprochenen Satz bedeutend vereinfacht. Dieser Satz, der den Namen *Satz von* D'ALEMBERT[1] trägt, hat eine ungeheure Bedeutung in der Geschichte der Mechanik: Er diente als Basis, auf der zuerst die Mechanik der Zwangsbedingungen unterworfenen Systeme aufgebaut wurde, oder kürzer — der Mechanik der verbundenen Systeme[2].

Wir stellen uns ein System vor, das aus den materiellen Punkten $M_1, M_2, \ldots, M_n$ besteht und irgendwelchen Zwangsbedingungen unterworfen ist, die wir als ideell und zweiseitig voraussetzen. Wir nehmen an, daß dieses System sich unter der Wirkung der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ *im Gleichgewicht befindet.* Wir wollen sagen, daß in solchem Falle die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ sich *durch Vermittlung der Zwangsbedingungen des Systems aufheben.*

Jeder materielle Punkt des Systems M_i befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Summe der vorgegebenen Kraft $\mathfrak{F}_i$ und der resultierenden Zwangskraft $\mathfrak{F}'_i$ gleich Null ist. Folglich ist

$$\mathfrak{F}_i + \mathfrak{F}'_i = 0,$$

d. h., die Resultierende der Reaktionen $\mathfrak{F}'_i$ ist der Größe nach gleich und der Richtung nach entgegengesetzt der vorgegebenen Kraft $\mathfrak{F}_i$.

Wir wollen folgende Operation vornehmen. Wir entfernen die vorgegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_i$ und legen an das System als neue vorgegebene Kräfte die früheren Reaktionen $\mathfrak{F}'_i$. Es liegt auf der Hand, daß das Gleichgewicht des Systems nicht gestört wird (dabei sind die neuen Reaktionen gleich den früheren vorgegebenen Kräften $\mathfrak{F}_\iota$). Wir kommen zu der Schlußfolgerung, daß die Reaktionen $\mathfrak{F}'_i$ ein System von Kräften bilden, die dich gegenseitig durch Zwangsbedingungen des gegebenen Systems ausgleichen, wenn das System sich im Gleichgewicht befindet.

Bleibt diese Eigenschaft der Zwangskräfte auch bei der Bewegung des Systems erhalten? Das ist die Frage, auf die der Satz von D'ALEMBERT eine Antwort gibt; die Antwort ist bejahend. Der Satz von D'ALEMBERT besteht also darin, daß *auch bei einer Bewegung des Systems die Reaktionen $\mathfrak{F}'_i$ ein System von Kräften bilden, die sich vermittels der Zwangsbedingungen des gegebenen Systems gegenseitig aufheben.*

---

[1] Deutsch meist: „d'Alembertsches Prinzip" (Anm. d. Red.).

[2] Siehe darüber unseren Artikel „Über den Satz von *d'Alembert* und die Trägheitskräfte" in den „Veröffentlichungen des Len. industriellen Institutes", Nr. 6, 1936.

Das bedeutet, daß das Gleichgewicht bestehen bleibt, wenn wir ein gegebenes sich bewegendes System durch ein ruhendes ersetzen, die an ihm angreifenden vorgegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_i'$ fortnehmen und (als neue vorgegebene Kräfte) die momentanen Reaktionen $\mathfrak{F}_i'$ anlegen.

In den einfachsten Fällen ist dieser Satz klar. Wir stellen uns einen Körper M vor (Abb. 100), der zwischen zwei absolut glatten, parallelen, geneigten Führungen unter der Wirkung der Schwerkraft $\mathfrak{P}$ gleitet. Die Reaktion $\mathfrak{N}$ der unteren Führung ist senkrecht zu den Führungen gerichtet. Wir halten den Körper M an, nehmen die Kraft $\mathfrak{P}$ fort und legen an unseren Körper eine Kraft an, die gleich der Reaktion $\mathfrak{N}$ ist. Es ist ganz klar, daß unter der Wirkung dieser Kraft der Körper M im Gleichgewicht bleibt.

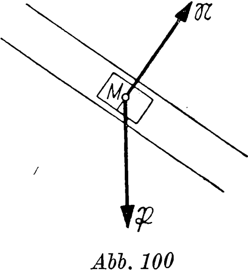


Abb. 100

Das Verdienst von D'ALEMBERT bestand darin, daß er die soeben vermerkte Eigenschaft der Reaktion $\mathfrak{N}$ verallgemeinerte und sie als allgemeine Eigenschaft jeder beliebigen Zwangskraft bezeichnete.

Nun ist es verständlich, wie die Anwendung der Methode der Kinetostatik dank dem Satz von D'ALEMBERT vereinfacht wird. Wenn einerseits die Trägheitskräfte sich mit den vorgegebenen Kräften und den Zwangskräften ausgleichen, andererseits die Reaktionen sich gegenseitig durch Vermittlung der Bindungen des Systems ausgleichen, dann müssen die vorgegebenen Kräfte zusammen mit den Trägheitskräften gleichfalls durch Vermittlung der Bindungen ausgeglichen werden.

Wir kommen zu folgender Formulierung: *Bei der Bewegung eines Systems gleichen sich die vorgegebenen Kräfte und die Trägheitskräfte durch die Zwangsbedingungen des Systems aus.* Bei einer solchen Formulierung der Methode der Kinetostatik schließt die Anwendung dieser Methode alle Zwangskräfte aus der Betrachtung aus.

KAPITEL XII

DAS PRINZIP DER VIRTUELLEN VERRÜCKUNGEN

§ 62. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen im Falle des Gleichgewichts eines Systems

Im vorhergehenden Kapitel haben wir gesehen, daß jede Aufgabe der Dynamik durch Einführung von Trägheitskräften, die an den Punkten des Systems angreifen, auf eine entsprechende Aufgabe der Statik zurückgeführt werden kann. Wir werden nun ein Theorem behandeln, welches das allgemeinste Verfahren zur Lösung von Problemen der Statik ergibt, ein Verfahren, das ebenso bei der Lösung von

Gleichgewichtsfragen beliebiger Systeme anwendbar ist. Dieses Theorem heißt *das Prinzip der virtuellen Verrückung*[1].

Wir wollen uns jetzt ein materielles System $M_1, M_2, \ldots, M_n$ vorstellen, das sich unter der Einwirkung angreifender Kräfte im Gleichgewicht befindet (Abb. 101). Alle auf die Punkte eines Systems wirkenden Kräfte unterteilen wir in vorgegebene Kräfte und Zwangskräfte. Die Resultierenden der an jedem Punkt des Systems angreifenden vorgegebenen Kräfte bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$; die Resultierenden der Zwangskräfte, die an den Punkten des Systems angreifen, bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}_1', \mathfrak{F}_2', \ldots, \mathfrak{F}_n'$. Da sich nach der Voraussetzung jeder der Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ im Gleichgewicht befindet, muß sich die Kraft $\mathfrak{F}_1$ mit der Kraft $\mathfrak{F}_1'$ ausgleichen, die Kraft $\mathfrak{F}_2$ gleicht sich mit der Kraft $\mathfrak{F}_2'$ aus usw. Hieraus folgt, daß die Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_1'$ der Größe nach gleich nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind. Dasselbe gilt für die Kräfte $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_2'$, $\mathfrak{F}_3$ und $\mathfrak{F}_3'$ usw.

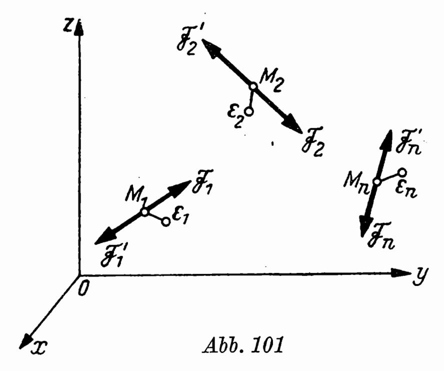


Abb. 101

Wir erteilen nun in Gedanken unserem System irgendeine virtuelle Verrückung aus der Gleichgewichtslage (wir erinnern daran, daß wir im § 53 jede geringfügig kleine Verrückung des Systems, die durch die im System vorhandenen Zwangsbedingungen zugelassen ist, eine virtuelle Verrückung genannt haben). Um Mißverständnisse zu vermeiden, wollen wir unterstreichen, daß die Verrückung des Systems, von der wir reden, keinesfalls durch die auf die Punkte des Systems einwirkenden Kräfte hervorgerufen wird; diese Kräfte heben sich ja nach der Voraussetzung auf und können keinerlei Verrückung des Systems hervorrufen; wir verrücken unser System nur in Gedanken aus der Gleichgewichtslage. Wir wollen die geringfügig kleinen Verrückungen der Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ mit $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$ bezeichnen und die Summe der Arbeiten aller Kräfte (sowohl der vorgegebenen, als auch der Zwangskräfte) längs der betrachteten Verrückung des Systems errechnen.

Da die Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_1'$ der Größe nach gleich sind und entgegengesetzte Richtungen haben, sind die Arbeiten dieser Kräfte längs der Verrückung $\vec{\varepsilon}_1$ der Größe nach gleich und unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen: Die Summe dieser Arbeiten ist also gleich Null. Dasselbe kann man von den Arbeiten der Kräfte $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_2'$ bei der Verrückung $\vec{\varepsilon}_2$ sagen usw. Auf diese Art kommen wir zu den Gleichungen:

$$F_1 \varepsilon_1 \cos(\mathfrak{F}_1, \vec{\varepsilon}_1) + F_1' \varepsilon_1 \cos(F_1', \vec{\varepsilon}_1) = 0,$$

$$F_2 \varepsilon_2 \cos(\mathfrak{F}_2, \vec{\varepsilon}_2) + F_2' \varepsilon_2 \cos(F_2', \vec{\varepsilon}_2) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_n \varepsilon_n \cos(\mathfrak{F}_n, \vec{\varepsilon}_n) + F_n' \vec{\varepsilon}_n \cos(F_n', \vec{\varepsilon}_n) = 0.$$

[1] Im Deutschen findet man statt dessen noch den Ausdruck: „Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten" (siehe § 69) oder „Prinzip der virtuellen Arbeit" (Anm. d. Red.).

Addieren wir diese Gleichungen gliedweise, so erhalten wir

$$\sum F_i\, \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i) + \sum F'_i \vec{\varepsilon}_i \cos(F'_i, \vec{\varepsilon}_i) = 0.$$

Wir wollen nun voraussetzen, daß alle Zwangsbedingungen in unserem System *zweiseitig* sind, außerdem werden wir sie auch *ideell* nennen, indem wir die Reibungskräfte, wenn solche vorhanden sind, zu der Zahl der vorgegebenen Kräfte hinzurechnen. In einem solchen Falle (siehe § 54) ist die Summe der Arbeiten der Zwangskräfte bei jeder virtuellen Verrückung des Systems, errechnet mit einer Genauigkeit bis zu den kleinen Größen erster Ordnung (einschließlich), gleich Null. Folglich verschwindet, wenn wir uns auf diesen Genauigkeitsgrad beschränken, das zweite Glied in der vorhergehenden Gleichung; wir kommen zu der Gleichung

$$\sum F_i\, \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i) = 0. \tag{1}$$

Wenn also alle Bindungen im System zweiseitig und ideell sind, kann die Gleichgewichtsbedingung des Systems auf folgende Art ausgedrückt werden: Die Summe der Arbeiten der vorgegebenen Kräfte ist bei jeder virtuellen Verrückung des Systems aus der Gleichgewichtslage, errechnet mit einer Genauigkeit bis zu den kleinen Größen der ersten Ordnung (einschließlich), gleich Null. Dieses Theorem heißt das Prinzip der virtuellen Verrückungen. Die Gl. (1), die dieses Theorem ausdrückt, werden wir der Kürze halber *die Arbeitsgleichung* nennen.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist eines der wichtigsten Grundtheoreme der Mechanik. Alle Theoreme der Statik, die von uns im Abschnitt 1 des Teiles I aufgestellt worden sind, können als Folgerungen aus diesem Theorem dargestellt werden; man kann sagen, daß die ganze Wissenschaft vom Gleichgewicht in diesem einen Theorem enthalten ist. Wenn man aber an den engen Zusammenhang der Statik mit der Dynamik denkt, der seinen Ausdruck in der Methode der Kinetostatik findet, dann wird die allumfassende Bedeutung klar, die das Prinzip der virtuellen Verrückungen nicht nur in der Lehre vom Gleichgewicht, sondern auch in der Wissenschaft von der Bewegung hat.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist in theoretischer Beziehung eines der wichtigsten Resultate der Mechanik und hat gleichzeitig auch eine große praktische Bedeutung. In vielen Fällen ergibt die Anwendung dieses Theorems die einfachste Lösung einer Frage. Es muß unterstrichen werden, daß aus der Arbeitsgleichung, die das Prinzip der virtuellen Verrückung ausdrückt, automatisch alle Zwangskräfte ausgeschlossen sind. Wir haben aber bereits gesehen, welche praktische Bedeutung solche Abhängigkeiten haben, aus denen Zwangskräfte ausgeschlossen sind. Gerade die Möglichkeit einer automatischen Eliminierung der Zwangskräfte mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückung macht dieses Theorem zu einem äußerst bequemen Werkzeug zur Lösung von Aufgaben der Mechanik.

Wir werden im weiteren die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückung an einzelnen Beispielen zeigen. Vorläufig wollen wir vermerken, daß man der Arbeitsgleichung (1) auch noch eine etwas andere Form geben kann, wenn man den bekannten dreigliedrigen Ausdruck der elementaren Arbeit benutzt. Wir wählen die rechtwinkligen Koordinatenachsen x, y, z und bezeichnen die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}_i$

auf diesen Achsen mit X_i, Y_i, Z_i und die Koordinaten des Punktes M_i mit x_i, y_i, z_i. Die Zunahmen dieser Koordinaten, wenn der Punkt M_i die Verrückung ε_i erfährt, bezeichnen wir mit δx_i, δy_i und δz_i. Dann gilt:

$$F_i \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i) = X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i,$$

und die Arbeitsgleichung nimmt die Form

$$\sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0$$

an.

§ 63. Eine andere Schlußfolgerung des Satzes der virtuellen Verrückungen

In Anbetracht der außerordentlichen Wichtigkeit des Prinzips der virtuellen Verrückungen werden wir hier noch eine Schlußfolgerung dieses Theorems darlegen, die diese Frage von einer anderen Seite beleuchtet. Zugleich wird uns die Schlußfolgerung, die wir hier darzulegen beabsichtigen und die von LAGRANGE in seiner „Analytischen Mechanik“[1] aufgezeichnet wurde, gestatten, das Prinzip der virtuellen Verrückungen auch für den Fall aufzustellen, daß unter den Bindungen des Systems auch einseitige Bindungen vorhanden sind.

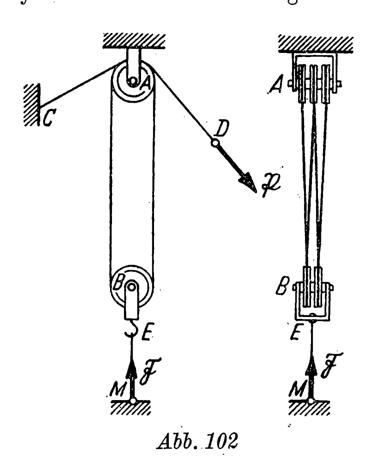


Abb. 102

In der Schlußfolgerung von LAGRANGE spielen die Systeme der Flaschenzüge, über welche wir vor allem einiges sagen müssen, eine wesentliche Rolle.

Stellen wir uns einen Flaschenzug vor, der zwei Achsen hat: eine feste Achse A und eine bewegliche Achse B (Abb. 102). Auf die bewegliche Achse B sind k Rollen von gleichem Radius aufgesetzt, die sich frei um diese Achse drehen. Auf die feste Achse A sind $k+1$ ebensolche Rollen aufgesetzt (in der Abb. $k = 2$). Der Flaschenzug ist mit einem Seil CD versehen, dessen eines Ende an dem festen Punkt C befestigt ist, während das andere frei bleibt. Dieses Seil geht nacheinander über alle Rollen hinweg, die auf die feste und die bewegliche Achse aufgesetzt sind. Die Anzahl der Stränge des Seiles, die zwischen den auf die Achsen A und B aufgesetzten Rollen eingeschlossen sind, ist gleich $2k$. Der Bügel BE, der die bewegliche Achse B trägt, ist durch ein anderes Seil EM an den festen Punkt M gebunden.

Wir legen nun an das freie Ende D des Seiles CD die Kraft $\mathfrak{P}$ an. Dann wird am festen Punkt M die Kraft $\mathfrak{F}$ angreifen, die gleich der Seilkraft im Seile EM ist. Wir wollen diese Seilkraft ermitteln. Die Seilkraft des Seiles EM ist die Resultierende der Seilkräfte der $2k$ Stränge des Seiles CD, die zwischen den Rollen des Flaschenzuges eingeschlossen sind. Da die Seilkraft jedes Stranges gleich $\mathfrak{P}$ ist, erhalten wir (wenn wir die unbedeutende Unparallelität der Stränge vernachlässigen):

$$F = 2kP.$$

[1] J. L. Lagrange, „Analytische Mechanik“, Band I, Deutsche Ausgabe 1897, Berlin.

Wir gehen nun zu der Schlußfolgerung von LAGRANGE über.

Wir wollen uns ein materielles System $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (Abb. 103) vorstellen, das sich unter Einwirkung der angreifenden Kräfte im Gleichgewicht befindet. Die Resultierenden der an jedem Punkte des Systems angreifenden vorgegebenen Kräfte bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$. Alle Bindungen des Systems nehmen wir als reibungsfrei an (indem wir die Reibungskräfte, wenn solche vorhanden sind, zu den vorgegebenen Kräften zählen). In der Zahl der Bindungen setzen wir sowohl zweiseitige als auch einseitige Bindungen voraus. Natürlich müssen sich die an jedem Punkt des Systems angreifenden vorgegebenen Kräfte mit den entsprechenden Zwangskräften ausgleichen. Wir haben aber bereits gesehen, daß in der Gleichung, die das Prinzip der virtuellen Verrückungen ausdrückt, die Zwangskräfte nicht enthalten sind. Im Beweis von LAGRANGE braucht man die Zwangskräfte überhaupt nicht zu erwähnen; sie sind bereits beim Aufstellen des Theorems eliminiert. Darum stellen wir diese Reaktionen in der Abbildung nicht dar. Wir stellen uns nun die Frage: Welche Bedingungen müssen die vorgegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ erfüllen, damit das System, wenn es sich unter der Wirkung dieser Kräfte befindet, im Gleichgewicht bleibt?

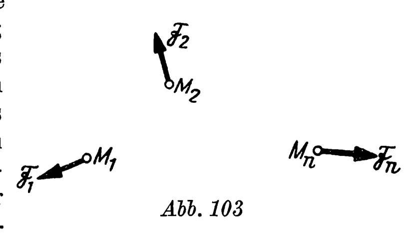


Abb. 103

Um diese Frage zu beantworten, vertauschen wir die Wirkung der am System angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ mit der Wirkung einer Last, die wir an das System mit Hilfe von Flaschenzügen der oben beschriebenen Konstruktion aufhängen.

Wir nehmen an, daß die Größen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ kommensurabel[1] sind, und daß ihr gemeinsames Vielfache Q ist, welche k_1 mal in F_1, k_2 mal in F_2 usw. enthalten ist, so daß

$$F_1 = k_1 Q, \qquad F_2 = k_2 Q, \qquad \ldots, \qquad F_n = k_n Q$$

ist, wobei $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ganze Zahlen sind.

Wir nehmen einen Flaschenzug der beschriebenen Konstruktion mit k_1 Rollen auf der beweglichen Flasche und $k_1 + 1$ Rollen auf der festen Flasche. Wir befestigen den die bewegliche Flasche des Flaschenzuges tragenden Bügel durch das Seil an dem Punkt M_1 unseres Systems und stellen den Flaschenzug so, daß dieses Seil sich längs der Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{F}_1$ legt (Abb. 104). Einen gleichen Flaschenzug mit k_2 Rollen auf der beweglichen Flasche und $k_2 + 1$ Rollen auf der festen Flasche befestigen wir durch ein Seil an dem Punkte M_2 usw.; am Punkte M_n befestigen wir einen Flaschenzug mit k_n Rollen auf der beweglichen Flasche und $k_n + 1$ Rollen auf der festen Flasche. Alle diese Flaschenzüge stellen wir so, daß die an den Punkten $M_2, \ldots, M_n$ befestigten Seile, mit deren Hilfe die Bügel, welche die beweglichen Flaschen tragen, sich längs der Wirkungslinien der Kräfte $\mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ legen.

Alle Flaschenzüge verbinden wir mit einem Seile. Ein Seilende befestigen wir an dem festen Punkt A und führen dieses Seil nacheinander um alle Rollen des ersten, zweiten, ... und n-ten Flaschenzuges, wie es weiter oben erwähnt war.

[1] kommensurabel (lat.) = meßbar. In der Physik bezeichnet man zwei Größen als kommensurabel, wenn sie zueinander im ganzzahligen Verhältnis stehen (Anm. d. deutschen Redaktion).

Nun hängen wir an das freie Seilende die Last $\frac{1}{2}Q$. Dann werden an den Punkten $M_1, M_2, \ldots, M_n$ unseres Systems Kräfte angreifen, die gleich den Seilkräften jener Seile sind, mit denen die entsprechenden Flaschenzüge an diesen Punkten befestigt sind. Da die Seilkraft des Seiles, mit dem die Flaschenzüge verbunden sind, gleich

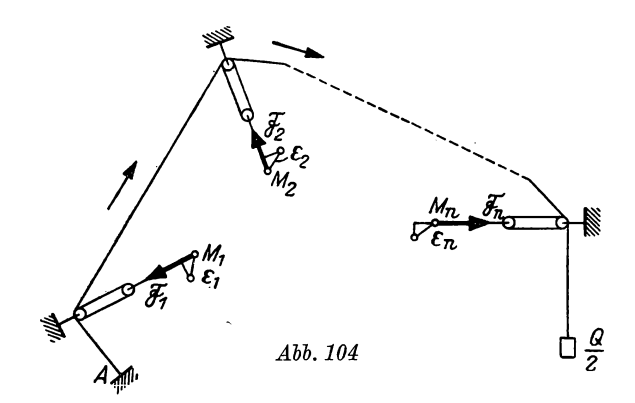


Abb. 104

$\frac{1}{2}Q$ ist, werden die Seilkräfte der an den Punkten $M_1, M_2, \ldots, M_n$ befestigten Seile, entsprechend dem oben Gesagten:

$$2k_1 \cdot \frac{1}{2}Q = k_1 Q = F_1,$$

$$2k_2 \cdot \frac{1}{2}Q = k_2 Q = F_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2k_n \cdot \frac{1}{2}Q = k_n Q = F_n$$

sein.

Also werden an den Punkten $M_1, M_2, \ldots, M_n$ Kräfte angreifen, die sowohl der Größe als auch der Richtung nach mit den vorgegebenen Kräften $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ zusammenfallen. Somit haben wir die Wirkung der am System angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ durch die Wirkung einer Last $\frac{1}{2}Q$ ersetzt, die auf die angegebene Art an dem System befestigt ist.

Wenn sich unser System unter der Wirkung der Last $\frac{1}{2}Q$ im Gleichgewicht befindet, wird es sich auch unter der Einwirkung der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ im Gleichgewicht befinden. Wir haben noch die Gleichgewichtsbedingung des Systems unter der Wirkung der angehängten Last $\frac{1}{2}Q$ zu untersuchen.

Um klarzustellen, in welchem Falle das System unter der Wirkung der Last $\frac{1}{2}Q$ im Gleichgewicht bleiben wird, wollen wir folgendermaßen vorgehen: Wir werden in Gedanken unserem System verschiedene virtuelle Verrückungen geben und die Last $\frac{1}{2}Q$ beobachten. Wenn das System irgendeine virtuelle Verrückung erhält, wird auch die Last $\frac{1}{2}Q$ sich um eine gewisse Größe nach unten oder nach oben verschieben. Wir wollen alle virtuellen Verrückungen des Systems durchprobieren. Wenn es auch nur eine virtuelle Verrückung gibt, bei der sich die Last senkt, dann kann man behaupten, daß das System unter der Wirkung der Last $\frac{1}{2}Q$ nicht im Gleichgewicht bleiben kann.

Denn wenn es eine solche virtuelle Verrückung des Systems gibt, die der Last gestattet, sich zu senken, dann wird die der Einwirkung der Schwerkraft überlassene Last tatsächlich anfangen, sich zu senken und wird zugleich das ganze System in Bewegung bringen.

Folglich muß, damit unser System unter der Wirkung der Last $\frac{1}{2}Q$ im Gleichgewicht bleibt, die Möglichkeit einer Senkung der Last beseitigt werden. Es ist notwendig, daß die Last bei allen *virtuellen Verrückungen* des Systems entweder *in Ruhe bleibt* oder *sich nach oben verschiebt.* Nun muß diese Gleichgewichtsbedingung noch analytisch ausgedrückt werden.

Zu diesem Zweck geben wir unserem System irgendeine virtuelle Verrückung und rechnen aus, um wieviel sich dabei die Last $\frac{1}{2}Q$ verschiebt. Wir bezeichnen die virtuellen Verrückungen der Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ mit $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$ (Abb. 104). Wir werden diese Verrückungen als kleine Größen erster Ordnung betrachten und bei den Berechnungen die kleinen Größen höherer Ordnungen vernachlässigen.

Die bewegliche Flasche des ersten Flaschenzuges hat sich der festen Flasche desselben Flaschenzuges um eine Größe genähert, die gleich der Projektion der Verrückung $\vec{\varepsilon}_1$ auf die Richtung des Seiles ist, das vom Punkt M_1 nach der beweglichen Flasche des Flaschenzuges geht, d. h. um die Größe $\varepsilon_1 \cos(\mathfrak{F}_1, \vec{\varepsilon}_1)$. Ebenso haben sich die beweglichen Flaschen der übrigen Flaschenzüge den festen Flaschen derselben Flaschenzüge um die Größen $\varepsilon_2 \cdot \cos(\mathfrak{F}_2, \vec{\varepsilon}_2), \ldots, \varepsilon_n \cdot \cos(\mathfrak{F}_n, \vec{\varepsilon}_n)$ genähert. (Einige dieser Größen können negativ sein; dann haben sich die beweglichen Flaschen der entsprechenden Flaschenzüge nicht genähert, sondern von den festen Flaschen entfernt.)

Jeder der $2k_1$ Stränge des Seiles, die zwischen den Rollen des ersten Flaschenzuges eingeschlossen sind, hat sich um die Größe $\varepsilon_1 \cos(\mathfrak{F}_1, \vec{\varepsilon}_1)$ verkürzt. Hieraus folgt, daß das zwischen dem ersten und dem zweiten Flaschenzug eingeschlossene Seil sich in der Richtung, die in der Abbildung durch einen Pfeil angezeigt ist, um die Größe $2k_1\, \varepsilon_1 \cos(\mathfrak{F}_1 \vec{\varepsilon}_{,1})$ verschoben hat.

Ebenso hat sich jeder der $2k_2$ Seilstränge, die zwischen den Rollen des zweiten Flaschenzuges eingeschlossen sind, um die Größe $\varepsilon_2 \cos(\mathfrak{F}_2, \vec{\varepsilon}_2)$ verkürzt. Folglich

hat sich der zwischen dem zweiten und dritten Flaschenzug eingeschlossene Seilteil in der in der Abbildung durch einen Pfeil angezeigten Richtung um die Größe

$$2\,k_1\,\varepsilon_1 \cdot \cos(\mathfrak{F}_1, \vec{\varepsilon}_1) + 2\,k_2\,\varepsilon_2 \cdot \cos(\mathfrak{F}_2, \vec{\varepsilon}_2)$$

verschoben.

Wenn wir diese Betrachtungen fortsetzen, kommen wir zu der Überzeugung, daß das freie Seilende und folglich auch die Last $\frac{1}{2}Q$ sich um die Größe

$$2\,k_1\,\varepsilon_1 \cdot \cos(\mathfrak{F}_1, \vec{\varepsilon}_1) + 2\,k_2\,\varepsilon_2 \cdot \cos(\mathfrak{F}_2, \vec{\varepsilon}_2) + \ldots + 2\,k_n\,\varepsilon_n \cdot \cos(\mathfrak{F}_n, \vec{\varepsilon}_n)$$
$$= \sum 2\,k_i\,\varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i)$$

senken wird.

Diese Größe kann negativ sein; dann wird sich tatsächlich bei einer gegebenen möglichen Verrückung des Systems die Last $\frac{1}{2}Q$ nicht senken, sondern heben.

Wir wissen bereits, daß es für das Gleichgewicht unseres Systems notwendig ist, daß die Last $\frac{1}{2}Q$ bei allen virtuellen Verrückungen des Systems entweder in Ruhe bleibt oder sich nach oben verschiebt. Folglich besteht die Gleichgewichtsbedingung des Systems unter der Wirkung der Last $\frac{1}{2}Q$ darin, daß bei allen virtuellen Verrükkungen die Ungleichung

$$\sum 2\,k_i\,\varepsilon_i \cdot \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i) \leqslant 0$$

eingehalten wird.

Bis jetzt haben wir vorausgesetzt, daß unter der Zahl der Bindungen unseres Systems sowohl zweiseitige als auch einseitige Bindungen vorhanden sind. Wir wollen nun voraussetzen, daß alle Bindungen unseres Systems zweiseitige sind. In diesem Falle zieht das Vorhandensein einer virtuellen Verrückung des Systems, bei der sich die Last $\frac{1}{2}Q$ nach oben verschiebt, die Existenz einer anderen virtuellen Verrückung (gerade entgegengesetzt der ersten) nach sich, bei der sich die Last $\frac{1}{2}Q$ nach unten verschiebt, was der Gleichgewichtsbedingung des Systems widerspricht. Folglich ist es für das Gleichgewicht des Systems in diesem Falle notwendig, daß die Last $\frac{1}{2}Q$ bei allen virtuellen Verrückungen des Systems in Ruhe bleibt, was durch die Gleichung

$$\sum 2\,k_i\,\varepsilon_i \cdot \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i) = 0$$

ausgedrückt wird, die bei allen virtuellen Verrückungen des Systems gelten muß.

Wenn wir diese Gleichung mit der Größe $\frac{1}{2}Q$ multiplizieren, erhalten wir:

$$\sum k_i\,Q\,\varepsilon_i \cdot \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i) = 0$$

oder, da $k_i Q = F_i$ ist,

$$\sum F_i \varepsilon_i \cdot \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i) = 0. \tag{1}$$

Für das Gleichgewicht des Systems unter der Wirkung der Last $\frac{1}{2}Q$ ist es notwendig, daß diese Gleichung bei allen virtuellen Verrückungen des Systems gilt. Da aber die Gleichgewichtsbedingungen des Systems unter der Wirkung der Last $\frac{1}{2}Q$ identisch mit der Gleichgewichtsbedingung unter der Wirkung der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ ist, so ist es auch für das Gleichgewicht des Systems unter der Wirkung dieser Kräfte notwendig, daß die Gl. (1) bei allen virtuellen Verrückungen des Systems gilt.

Damit sind wir aufs neue zu der Arbeitsgleichung gekommen, die das Prinzip der virtuellen Verrückungen für den Fall eines Systems ausdrückt, das zweiseitigen Bindungen unterworfen ist[1].

Wenn es unter den Bindungen des Systems auch einseitige Bindungen gibt, ist es für das Gleichgewicht des Systems notwendig, daß bei allen virtuellen Verrückungen des Systems die Ungleichung

$$\sum 2 k_i \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i) \leqslant 0$$

gilt, die nach der Multiplikation mit $\frac{1}{2}Q$ die Form

$$\sum F_i \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i) \leqslant 0$$

annimmt.

Wenn es also unter den Bindungen des Systems einseitige Bindungen gibt, besteht die Gleichgewichtsbedingung des Systems darin, daß die Summe der Arbeiten der vorgegebenen Kräfte bei jeder virtuellen Verrückung des Systems aus der Gleichgewichtslage entweder gleich Null oder kleiner als Null ist. Dabei muß die Summe der Arbeiten der vorgegebenen Kräfte mit einer Genauigkeit bis zu den kleinen Größen erster Ordnung (einschließlich) errechnet werden. Die Reibungskräfte, wenn solche vorhanden sind, müssen den vorgegebenen Kräften zugezählt werden. Auf diese Art wird das Prinzip der virtuellen Verrückungen ausgedrückt, wenn es in der Zahl der Bindungen des Systems einseitige Bindungen gibt.

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir gesehen, daß die Gleichung

$$\sum F_i \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i) + \sum \mathfrak{F}'_i \vec{\varepsilon}_i \cos(F'_i, \vec{\varepsilon}_i) = 0$$

gelten muß (wobei $\mathfrak{F}'_i$ die Resultierende der Zwangskräfte ist, die an dem Punkte M_i angreifen), wenn sich das System im Gleichgewicht befindet, ganz gleich, wie auch die Bindungen des Systems sein mögen. Wenn wir die Bindungen als einseitige voraussetzen und diese Gleichung mit der soeben aufgestellten Ungleichung

$$\sum F_i \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i) \leqslant 0$$

---

[1] In der Schlußfolgerung von Lagrange werden die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ als kommensurabel vorausgesetzt. Das gewonnene Resultat bleibt jedoch auch im Fall von inkommensurablen Kräften bestehen, da man die inkommensurablen Kräfte als Grenzgrößen der kommensurablen Kräfte betrachten kann.

vergleichen, kommen wir zum Schluß, daß die einseitigen, ohne Reibung behafteten Bindungen die Bedingung

$$\sum F'_i \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}'_i, \vec{\varepsilon}_i) \geqslant 0$$

für alle virtuellen Verrückungen des Systems erfüllen.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für den Fall eines Systems, das zweiseitigen Bindungen unterworfen ist, wurde als eines der allgemeinen Theoreme der Mechanik von BERNOULLI (1717) aufgestellt; einzelne Spezialfälle dieses Theorems waren schon bedeutend früher bekannt. LAGRANGE hat (1788) das Prinzip der virtuellen Verrückungen seiner Mechanik zugrunde gelegt. Für den Fall eines Systems mit einseitigen Bindungen wurde das Prinzip der möglichen Verrückungen durch FOURIER (1798) aufgestellt.

§ 64. Das Gleichgewicht eines Hebels. Die goldene Regel der Mechanik

Wir wollen nun die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen bei der Lösung von Aufgaben der Statik erklären. Bei der Anwendung hat man es gewöhnlich mit Systemen zu tun, die nur zweiseitigen Bindungen unterworfen sind. In diesen Fällen wird die Frage mit Hilfe der Arbeitsgleichung gelöst, die im § 62 aufgestellt wurde.

Wir wollen uns einen horizontalen Hebel AB vorstellen, der sich reibungsfrei um die feste Achse O dreht (Abb. 105). An den Hebelenden A und B greifen die vertikalen Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ an. Wir wollen die Gleichgewichtsbedingung des Hebels nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ermitteln.

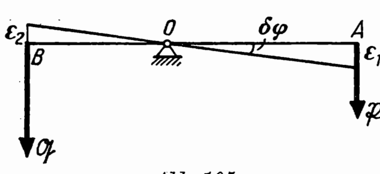


Abb. 105

Wir bezeichnen $AO = a$, $BO = b$. Wir erteilen dem Hebel eine virtuelle Verrückung und schreiben die Arbeitsgleichung auf. Als virtuelle Verrückung des Hebels kommt die Drehung um die Achse O um den winzig kleinen Winkel $\delta\varphi$ in Frage. Bezeichnen wir die virtuellen Verrückungen der Punkte A und B mit $\vec{\varepsilon}$ und $\vec{\varepsilon}_2$ (Abb. 105), so gewinnen wir die Arbeitsgleichung

$$P\,\varepsilon_1 - Q\,\varepsilon_2 = 0. \tag{1}$$

Andererseits gilt

$$\varepsilon_1 = a\,\delta\varphi, \qquad \varepsilon_2 = b\,\delta\varphi$$

und folglich

$$P a\,\delta\varphi - Q b\,\delta\varphi = 0$$

oder, nach Kürzung durch $\delta\varphi$,

$$P a - Q b = 0.$$

Dies ist die Gleichgewichtsbedingung des Hebels. Augenscheinlich ist die von uns gewonnene Gleichung nichts anderes als die Momentengleichung in bezug auf den Punkt O.

Wir schreiben nun die Arbeitsgleichung (1) auf folgende Art um:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{P}{Q}.$$

Hieraus ist zu ersehen, daß, wenn der Hebel sich unter der Wirkung der zwei Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ im Gleichgewicht befindet, die virtuellen Verrückungen der Angriffspunkte dieser Kräfte den Kräften selbst umgekehrt proportional sein müssen. Wenn die große Kraft $\mathfrak{Q}$ durch die kleine Kraft $\mathfrak{P}$ ausgeglichen wird, muß die virtuelle Verrückung der Kraft $\mathfrak{Q}$ zur virtuellen Verrückung der Kraft $\mathfrak{P}$ in demselben Verhältnis stehen wie $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{Q}$. Gewöhnlich wird dies so formuliert: *Was an Kraft gewonnen wird, geht an Weg verloren.*

Die Arbeitsgleichung (1) gilt nicht nur für den Hebel; sie ist in allen den Fällen richtig, wo das System sich unter der Wirkung von zwei Kräften im Gleichgewicht befindet[1]. Folglich gilt auch der von uns soeben formulierte Satz in allen den Fällen, in denen ein beliebiges System sich unter der Wirkung von zwei Kräften im Gleichgewicht befindet. Dies ist die sogenannte *goldene Regel der Mechanik.* Wie wir sehen, ist diese Regel eine unmittelbare Folge des Prinzips der virtuellen Verrückungen.

§ 65. Die Dezimalwaage

Bei der Lösung derartig einfacher Aufgaben der Statik, wie die im vorhergehenden Paragraphen behandelte Gleichgewichtsaufgabe eines Hebels, ist es natürlich nicht notwendig, zum Prinzip der virtuellen Verrückungen zu greifen; die Frage wird einfacher mit Hilfe elementarer Verfahren gelöst. Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen ist besonders in den Fällen am Platze, in denen die Gleichgewichtsbedingungen eines mehr oder weniger komplizierten Systems erforscht werden sollen, das einer großen Anzahl von Zwangsbedingungen unterworfen ist. In solchen Fällen vereinfachen wir die Lösung der Aufgabe wesentlich, wenn wir das Prinzip der virtuellen Verrückungen anwenden, weil dabei alle Zwangskräfte aus der Betrachtung ausgeschlossen werden: In der Arbeitsgleichung sind, wie wir wissen, nur die im gegebenen System angreifenden Kräfte vorhanden.

Als Beispiel für das Gleichgewicht eines aus mehreren starren Körpern bestehenden Systems wollen wir die Gleichgewichtsbedingung der Dezimalwaage (oder der Waage von Quintenz) betrachten. Der zu wägende Körper (sein Gewicht sei gleich Q) wird auf die Plattform MN gelegt, die sich im Punkte E auf den horizontalen Hebel DEO_1 stützt, welcher sich um die feste Achse O_1 dreht, im Punkt M aber mit Hilfe der Stange CM an den horizontalen Hebel AOB gehängt ist, der sich seinerseits um die feste Achse O dreht (Abb. 106). Der Hebel DEO_1 ist im Punkte D gleichfalls mit Hilfe der Stange BD an den Hebel AOB gehängt. Im Punkte A ist eine Schale mit Gewichten aufgehängt, die ein Gesamtgewicht P besitzen. Wir führen die Bezeichnungen $AO = a$, $BO = b$, $CO = c$, $DO_1 = d$, $EO_1 = e$ ein.

[1] Wenn die Richtungen der angreifenden Kräfte nicht mit den Richtungen der virtuellen Verrückungen hrer Angriffspunkte zusammenfallen, muß man unter $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ die Komponenten der angreifenden Kräfte in Richtung dieser virtuellen Verrückungen verstehen.

Wir wollen die Gleichgewichtsbedingung dieser Waage ermitteln und klarstellen, in welchem Falle das Resultat des Wägens (d. h. das Ermitteln des Gewichtes P, welches der Last Q das Gleichgewicht hält) nicht von der Lage der Last auf der Plattform abhängt.

Wir wollen dem System eine virtuelle Verrückung geben und die Arbeitsgleichung aufschreiben. Die virtuelle Verrückung des Systems ist in der Abbildung dargestellt. Wir bezeichnen die virtuellen Verrückungen der Angriffspunkte der Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$

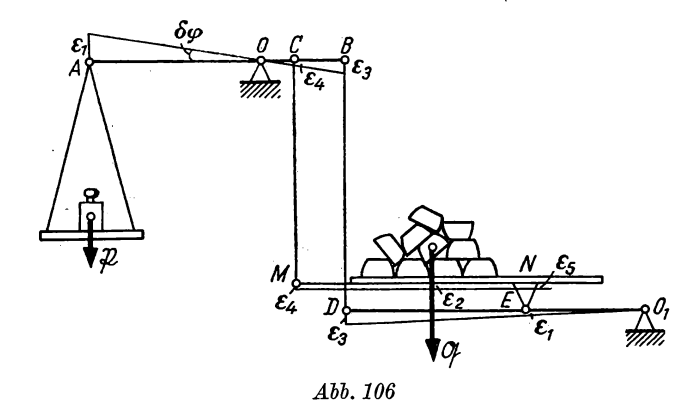


Abb. 106

mit $\vec{\varepsilon}_1$ und $\vec{\varepsilon}_2$; die Verrückungen der Punkte B und D bezeichnen wir mit $\vec{\varepsilon}_3$, die Verrückungen der Punkte C und M mit $\vec{\varepsilon}_4$, die Verrückungen der Punkte N und E mit $\vec{\varepsilon}_5$ (Abb. 106). Es gilt die Arbeitsgleichung

$$Q\varepsilon_2 - P\varepsilon_1 = 0,$$

woraus wir die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{P}{Q} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

erhalten.

Damit diese Gleichgewichtsbedingung nicht von der Lage der Last auf der Plattform abhängt, müssen die Verrückungen $\vec{\varepsilon}_i$ aller Punkte der Plattform gleich sein, d. h., die Plattform muß horizontal bleiben. Dazu ist es aber notwendig, daß die Verrückungen der Punkte M und N gleich sind, d. h., daß

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_5$$

ist.

Bezeichnen wir den Drehwinkel des Hebels AOB um die Achse O mit $\delta\varphi$, so erhalten wir $\varepsilon_1 = a\delta\varphi$, $\varepsilon_3 = b\delta\varphi$, $\varepsilon_4 = c\delta\varphi$. Ferner ist

$$\frac{\varepsilon_5}{\varepsilon_3} = \frac{e}{d}$$

oder

$$\varepsilon_5 = \frac{e}{d}\,\varepsilon_3 = \frac{e}{d}\,b\,\delta\varphi.$$

Also muß, damit das Ergebnis des Wägens nicht von der Lage der Last auf der Plattform abhängt, folgende Bedingung

$$c\,\delta\varphi = \frac{e}{d}\,b\,\delta\varphi$$

erfüllt werden, oder

$$\frac{c}{b} = \frac{e}{d}.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, gilt auch

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = c\,\delta\varphi.$$

Setzen wir die Ausdrücke ε_1 und ε_2 in die Gleichung

$$\frac{P}{Q} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

ein, so erhalten wir die Gleichgewichtsbedingung der Waage:

$$\frac{P}{Q} = \frac{c}{a}.$$

Bei Dezimalwaagen ist $\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{10}$.

§ 66. Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen bei der Bestimmung der Zwangskräfte

Wir haben gesehen, daß die wesentliche Vereinfachung, welche die Lösung der Aufgabe durch die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen ergibt, in der automatischen Eliminierung aller Zwangskräfte besteht. Man kann jedoch das Prinzip der virtuellen Verrückungen auch in den Fällen anwenden, in denen die Aufgabe gerade in der Bestimmung der Zwangskräfte besteht. Insbesondere kann man sich dieses Verfahrens mit Erfolg zur Bestimmung der Auflagerreaktionen für verschiedene Konstruktionen bedienen. Dabei muß man folgendermaßen verfahren.

Wenn man die Reaktionen irgendeiner Bindung zu bestimmen wünscht, muß man in Gedanken diese Bindung durch entsprechende Kräfte ersetzen, d. h. durch die Zwangskräfte. Auf diesem Wege sind die gesuchten Reaktionen zur Kategorie der vorgegebenen Kräfte gehörig. Darauf wird die Aufgabe, wie oben beschrieben, gelöst. Wenn wir im einzelnen die Reaktion irgendeines Auflagers bestimmen wollen, lassen

wir in Gedanken dieses fort und ersetzen es durch die entsprechende Auflagerreaktion[1]. Wenn wir danach dem System eine virtuelle Verrückung geben, stellen wir die Arbeitsgleichung auf, aus der wir die gesuchte Auflagerreaktion bestimmen.

Wir wollen das Gesagte an einem einfachen Beispiel erläutern.

An dem horizontalen, auf zwei Stützen A und B liegenden Träger AB greifen in den Punkten C und D vertikale Belastungen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ an (Abb. 107); $AC = 3\,\text{m}$, $CD = 2\,\text{m}$, $DB = 2\,\text{m}$. Die Auflagerreaktion der Stütze B soll bestimmt werden.

In Gedanken lassen wir die Stütze B fort und ersetzen sie durch die Auflagerreaktion $\mathfrak{R}$ (Abb. 108). Darauf erteilen wir dem Träger eine virtuelle Verrückung und stellen die Arbeitsgleichung auf.

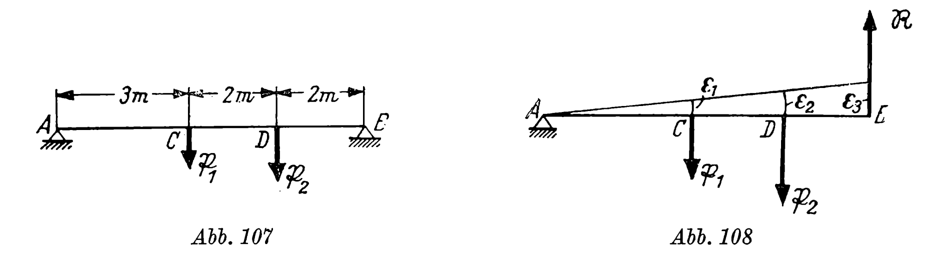


Abb. 107 Abb. 108

Die virtuelle Verrückung des Trägers ist die Drehung um einen winzig kleinen Winkel um den Punkt A. Wir bezeichnen die virtuellen Verrückungen der Punkte C, D und B mit $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$ und $\vec{\varepsilon}_3$. Die Arbeitsgleichung lautet:

$$R\,\varepsilon_3 - P_1\,\varepsilon_1 - P_2\,\varepsilon_2 = 0.$$

Daraus folgt

$$R = P_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} + P_2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}.$$

Ferner haben wir

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} = \frac{3}{7}, \qquad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = \frac{5}{7}.$$

Folglich ist

$$R = \frac{3}{7} P_1 + \frac{5}{7} P_2.$$

§ 67. Der zusammengesetzte Träger

Natürlich ist die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen bei der Bestimmung von Auflagerreaktionen in den Fällen angebracht, in denen man es mit mehr oder weniger komplizierten Systemen zu tun hat. Je komplizierter das System ist, desto wesentlicher ist die Vereinfachung, die die Lösung durch das automatische Eliminieren aller Reaktionen, außer der uns interessierenden, erhält.

[1] Deutsch auch: „Auflagerkraft“ oder „Auflagerdruck“ (Anm. d. deutschen Redaktion).

Als komplizierteres Beispiel wollen wir die Bestimmung der Auflagerreaktionen für einen zusammengesetzten, mehrfach gestützten Träger betrachten.

Wir stellen uns einen zusammengesetzten Träger vor, der auf den vier Stützen A, B, C und D liegt (Abb. 109) und aus den drei Trägern AM, MN und ND besteht, die an den Punkten M und N gelenkig verbunden sind.

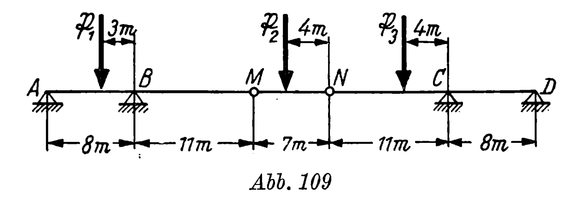


Abb. 109

Die vertikalen Belastungen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ sind gegeben, desgleichen sind die Maße in der Abbildung angegeben. Die Auflagerreaktion der Stütze A soll bestimmt werden.

Wir denken uns die Stütze A fortgelassen und ersetzen sie wieder durch die Auflagerreaktion $\mathfrak{R}$. Die virtuelle Verrückung des Systems ist in der Abb. 110 dargestellt.

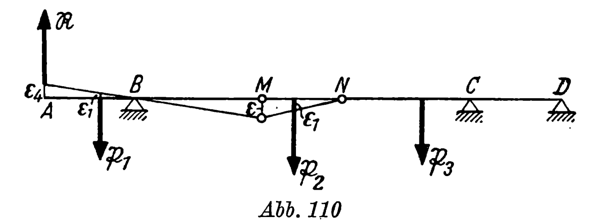


Abb. 110

Wir bezeichnen die Verrückungen der Angriffspunkte der Kräfte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ und $\mathfrak{R}$ mit $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$ und $\vec{\varepsilon}_4$; es ist klar, daß $\vec{\varepsilon}_3 = 0$ ist. Wir vermerken auch die Verrückung $\vec{\varepsilon}$ des Gelenkes M.

Die Arbeitengleichung lautet:

$$R\,\varepsilon_4 - P_1\,\varepsilon_1 + P_2\,\varepsilon_2 = 0,$$

daraus erhält man

$$R = P_1\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_4} - P_2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4}.$$

Ferner gilt:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_4} = \frac{3}{8},$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon_4} = \frac{4}{7}\cdot\frac{11}{8} = \frac{11}{14}.$$

Folglich ist

$$R = \frac{3}{8}P_1 - \frac{11}{14}P_2.$$

Ebenso können die Auflagerreaktionen der übrigen Stützen ermittelt werden.

§ 68. Der ungeteilte Dreigelenkbogen

Wir wollen uns noch mit der Bestimmung der Auflagerreaktionen für ungeteilte Dreigelenkbogen beschäftigen.

Stellen wir uns einen dreispannigen Träger vor, der sich auf die vier Auflager A, B, C und D stützt (Abb. 111): Die äußeren Auflager A und D sind unverschiebbar, die mittleren Auflager B und C verschiebbar. Die Spannweiten setzen wir als gleich voraus; die Länge jeder Spannweite bezeichnen wir mit $2a$. Die Gelenke K, L und M befinden sich in der Mitte des jeweiligen Bogens in der Höhe h über dem Niveau der Auflagergelenke. Durch Zählen der unbekannten Reaktionen der Gelenke kann man

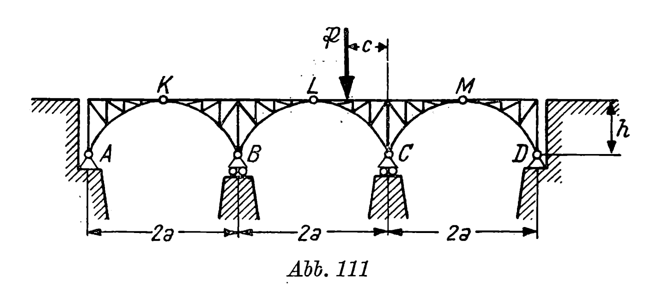


Abb. 111

leicht nachprüfen, daß in bezug auf die Bestimmung der Auflagerreaktionen das gegebene System statisch bestimmt ist. Wir wollen annehmen, daß auf den mittleren Bogen die vertikale Belastung $\mathfrak{P}$ im Abstand c von der Vertikalen wirkt, die durch das Auflager C hindurchgeht. Es soll die horizontale Komponente der Reaktion des festen Auflagers D bestimmt werden.

In Gedanken lassen wir das feste Auflager D fort, d. h., wir stellen uns vor, daß das Auflager D verschiebbar ist; zur Erhaltung des Gleichgewichts des Systems wird es notwendig sein, am Punkte D die entsprechende Kraft anzulegen, nämlich die gesuchte horizontale Auflagerreaktion $\mathfrak{R}$ (Abb. 112). Nun befindet sich das System im Gleichgewicht unter der Wirkung der Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$. Wir geben dem System eine virtuelle Verrückung und stellen die Arbeitsgleichung auf.

Der zusammengesetzte Träger besteht aus vier unveränderlichen Teilen I, II, III und IV (Abb. 112). Die virtuelle Verrückung des Teiles I ist die Drehung um einen kleinen Winkel um den unbeweglichen Punkt A; die Richtung der Drehung ist in der Abbildung durch einen Pfeil gekennzeichnet. Wir vermerken die Verrückung $\vec{\varepsilon}$ des Gelenkes K; sie ist senkrecht zur Geraden AK gerichtet.

Wir wollen untersuchen, wie die virtuelle Verrückung des Teiles II verläuft. Wir haben es hier mit einer kleinen Verrückung der ebenen Figur in ihrer Ebene zu tun. Aus der Kinematik ist bekannt, daß man eine solche Verrückung als Drehung um einen kleinen Winkel um das entsprechende momentane Geschwindigkeitszentrum betrachten kann. Wir konstruieren das momentane Geschwindigkeitszentrum für den Teil II. Uns sind die Richtungen der Verrückungen zweier Punkte des Teiles II bekannt, und zwar der Punkte K und B (die Verrückung $\vec{\varepsilon}$ des Punktes K wurde soeben erklärt, die Verrückung des Punktes B aber muß horizontal sein). Das momen-

tane Zentrum für den Teil *II* befindet sich im Schnittpunkt der in den Punkten K und B auf den Verrückungen dieser Punkte errichteten Senkrechten; folglich finden wir, wenn wir eine Vertikale durch den Punkt B ziehen, das gesuchte momentane Zentrum im Schnittpunkt E dieser Vertikalen mit der Geraden AK.

Die virtuelle Verrückung des Teiles *II* ist also die Drehung um einen winzig kleinen Winkel um den Punkt E. Die Richtung der Drehung wird durch die Richtung der Verrückung des Punktes K bestimmt; sie ist in der Abbildung durch einen Pfeil gekennzeichnet. Wir bestimmen die Verrückung des Gelenkes L; seine Richtung ist senkrecht zu der Geraden EL. Da $EL = EK$ ist, so ist die Größe dieser Verrückung gleich der Größe ε der Verrückung des Gelenkes K.

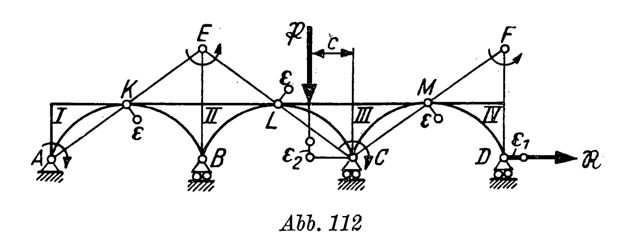


Abb. 112

Wir gehen nun zum Teil III über. Durch Erwägungen, ähnlich der oben dargelegten, überzeugen wir uns, daß die virtuelle Verrückung dieses Trägerteiles die Drehung um den kleinen Winkel um das momentane Zentrum ist, das mit dem Gelenk C zusammenfällt. Die Richtung der durch die Richtung der Verrückung des Punktes L bestimmten Drehung ist in der Abbildung durch einen Pfeil angedeutet. Hieraus schließen wir, daß die Verrückung des Gelenkes M senkrecht zu der Geraden CM gerichtet ist, und da $CM = CL$ ist, so ist die Größe dieser Verrückung gleich der Größe ε der Verrückungen der Gelenke K und L.

Schließlich sehen wir, wenn wir zum Teil *IV* übergehen und die Richtungen der Verrückungen der Punkte M und D im Auge haben (die Verrückung des Punktes D muß horizontal sein), daß die virtuelle Verrückung des Teiles *IV* die Drehung um den kleinen Winkel um den Schnittpunkt F der Geraden CM mit der durch den Punkt D gezogenen Vertikalen ist. Die Richtung dieser Drehung wird durch die Richtung der Verrückung des Punktes M bestimmt und ist in der Abbildung durch einen Pfeil gekennzeichnet.

Wir bestimmen nun die virtuellen Verrückungen der Angriffspunkte der Kräfte $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}$. Die Verrückung des Angriffspunktes der Kraft $\mathfrak{R}$ (d. h. des Punktes D) ist horizontal von links nach rechts gerichtet; wir bezeichnen sie mit $\vec{\varepsilon}_1$. Die Kraft $\mathfrak{P}$ verschiebt man zweckmäßig längs ihrer Wirkungslinie in den Schnittpunkt dieser Wirkungslinie mit der durch C gezogenen Horizontalen; bei einer derartigen Wahl des Angriffspunktes der Kraft $\mathfrak{P}$ ist die Verrückung dieses Punktes vertikal nach oben gerichtet; wir bezeichnen sie mit $\vec{\varepsilon}_2$.

Wir erhalten die Arbeitsgleichung

$$R\,\varepsilon_1 - P\,\varepsilon_2 = 0,$$

woraus

$$R = P\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

folgt.

Es bleibt uns noch übrig, das Verhältnis $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ zu errechnen.

Es ist

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{FD}{FM} = \frac{2h}{\sqrt{a^2+h^2}},$$

ebenso ist

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} = \frac{c}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Folglich ist $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{c}{2h}$. Wir erhalten endgültig

$$R = P\frac{c}{2h}.$$

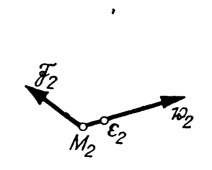
Wir stellen dem Leser anheim, auf die gleiche Art die übrigen Auflagerreaktionen zu ermitteln.

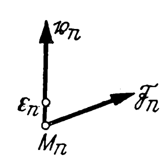
§ 69. Eine andere Form der Arbeitsgleichung. Die virtuellen Geschwindigkeiten

Wir wollen uns nun mit einer kleinen Umbildung der Arbeitsgleichung beschäftigen, die in einigen Fällen sehr nützlich ist.

Wir stellen uns ein materielles System $M_1, M_2, \ldots, M_n$ vor, das sich unter der Wirkung der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ im Gleichgewicht befindet (Abb. 113); die Zwangskräfte sind in der Abbildung nicht dargestellt. Wir erteilen den Punkten des Systems die möglichen Verrückungen $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2$ und $\vec{\varepsilon}_n$ und stellen die Arbeitsgleichung auf:

$$\sum F_i\,\varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i) = 0. \qquad (1)$$





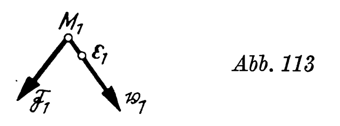


Abb. 113

Wir wollen uns nun vorstellen, daß die Verrückung des Systems aus der Gleichgewichtslage im Laufe eines winzig kleinen Zeitraumes τ vor sich geht. Die Punkte des Systems werden sich beim Durchlaufen der Strecken $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ in der Zeit τ mit gewissen Geschwindigkeiten bewegen; wir bezeichnen diese Geschwindigkeiten mit $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_n$ und nennen sie die *virtuellen Geschwindigkeiten* der Punkte des Systems. Es gilt

$$v_1 = \frac{\varepsilon_1}{\tau}, \qquad v_2 = \frac{\varepsilon_2}{\tau}, \quad \ldots, \qquad v_n = \frac{\varepsilon_n}{\tau};$$

die Richtungen der virtuellen Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_n$ fallen mit den Richtungen der virtuellen Verrückungen $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$ zusammen.

Wir dividieren die Arbeitsgleichung (1) durch die Größe τ und erhalten dann:

$$\sum F_i \frac{\varepsilon_i}{\tau} \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i) = 0.$$

Nehmen wir $\frac{\varepsilon_i}{\tau} = v_i$ an und beachten, daß die Richtung $\vec{\varepsilon}_i$ mit der Richtung $\mathfrak{v}_i$ zusammenfällt, so erhalten wir

$$\sum F_i v_i \cos(\mathfrak{F}_i, \mathfrak{v}_i) = 0.$$

Das ist die umgebildete Form der Arbeitsgleichung; sie unterscheidet sich von der ursprünglichen Form dieser Gleichung nur dadurch, daß an Stelle der virtuellen Verrückungen virtuelle Geschwindigkeiten stehen.

Wir bemerken dazu, daß die Größe der virtuellen Geschwindigkeit eines der Punkte des Systems willkürlich vorgegeben werden kann; durch diese Größe wird der Zeitraum τ bestimmt, in dem wir uns den Vorgang der Verrückung des Systems denken. Zum Beispiel müssen wir, nachdem wir willkürlich die Größe der virtuellen Geschwindigkeit v_1 vorgegeben haben, $\tau = \frac{\varepsilon_1}{v_1}$ setzen.

§ 70. Das Gleichgewicht ebener Mechanismen. Das Theorem von Shukowski

Die umgebildete Arbeitsgleichung kann man bequem bei der Untersuchung der Frage vom Gleichgewicht eines ebenen Mechanismus anwenden, der sich unter der Wirkung angreifender Kräfte befindet. Zur Ermittlung der Gleichgewichtsbedingung der Kräfte, die an einem ebenen Mechanismus angreifen, müssen wir die Arbeitsgleichung für diese Kräfte aufstellen. In dieser Gleichung sind die virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte der gegebenen Kräfte enthalten. Eine der virtuellen Geschwindigkeiten geben wir willkürlich vor; die übrigen virtuellen Geschwindigkeiten aber finden wir durch das Aufstellen eines Geschwindigkeitsplanes für den gegebenen Mechanismus.

N. E. Shukowski[1] hat festgestellt, daß man durch Aufstellen eines Geschwindigkeitsplanes die Aufgabe vom Gleichgewicht eines ebenen Mechanismus auf die elementare Frage vom Gleichgewicht eines Hebels zurückführen kann. Wir wollen uns mit diesem Theorem von N. E. Shukowski befassen.

Wir stellen uns einen ebenen Mechanismus vor, der sich unter der Einwirkung der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ (Abb. 114) befindet; die Angriffspunkte der Kräfte bezeichnen wir mit $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Die Gleichgewichtsbedingung der an dem Mechanismus angreifenden Kräfte soll ermittelt werden.

[1] N. E. Shukowski, „Die Rückführung der dynamischen Aufgaben von der kinematischen Kette auf die Aufgaben vom Hebel“ (Н. Е. Жуковский, Сведение динамических задач о кинематической цепи к задачам о рычаге. Математический сборник, т. 28 (1912), стр. 71. Собрание сочинений, т. III. Гостехиздат, М.—Л., 1949, стр. 334).

Wir erteilen dem Mechanismus eine virtuelle Verrückung und benennen die virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mit $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_n$. Es gilt die Arbeitsgleichung:

$$\sum F_i v_i \cos(\mathfrak{F}_i, \mathfrak{v}_i) = 0$$

oder, wenn wir den Winkel zwischen den Richtungen der Kraft $\mathfrak{F}_i$ und der virtuellen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_i$ mit α_i bezeichnen,

$$\sum F_i v_i \cos\alpha_i = 0. \tag{1}$$

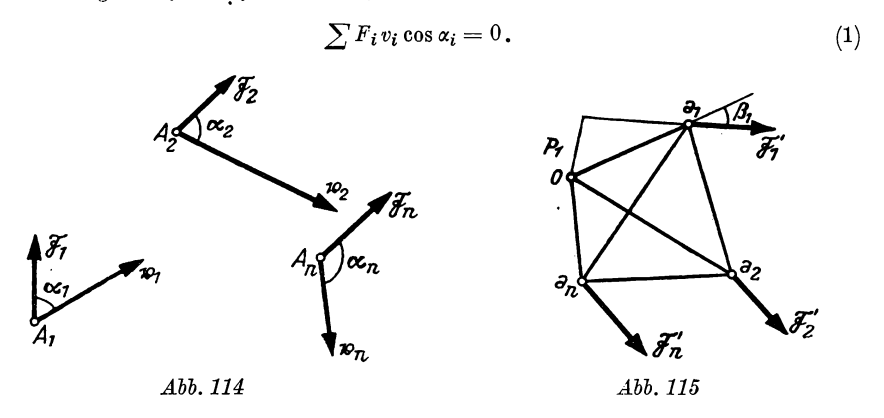


Abb. 114 *Abb. 115*

Wir wollen uns nun vorstellen, daß wir den Geschwindigkeitsplan des gegebenen Mechanismus aufgestellt haben (Abb. 115). In ihm werden die virtuellen Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_n$ als Abschnitte $Oa_1, Oa_2, \ldots, Oa_n$ dargestellt, die vom Anfangspunkt O abgetragen wurden. Wir stellen uns vor, daß die Figur, welche die Form des Geschwindigkeitsplanes besitzt, aus starren Balken zusammengesetzt ist, die in den Punkten $O, a_1, a_2, \ldots, a_n$ gelenkig miteinander verbunden sind. Wir befestigen den Punkt O und geben der Figur die Möglichkeit, sich frei um diesen Punkt zu drehen. Damit haben wir einen Hebel mit dem Stützpunkt O erhalten, den wir Hilfshebel des gegebenen Mechanismus nennen wollen. An den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lassen wir an dem Hilfshebel die Kräfte $\mathfrak{F}_1', \mathfrak{F}_2', \ldots, \mathfrak{F}_n'$ angreifen, die sich aus der Drehung der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ um ihre Angriffspunkte um 90° nach ein und derselben Seite ergeben, z. B. im Uhrzeigersinn. Wir werden zeigen, daß die Gleichgewichtsbedingung unseres Hebels unter der Wirkung dieser Kräfte mit der Gleichgewichtsbedingung des gegebenen Mechanismus identisch ist.

Tatsächlich werden wir die Gleichgewichtsbedingung des Hilfshebels erhalten, wenn wir die Momentengleichung in bezug auf den Stützpunkt O aufgestellt haben. Es gilt

$$\sum m(\mathfrak{F}_i') = 0, \tag{2}$$

wobei $m(\mathfrak{F}_i')$ das Moment der am Punkte a_i angreifenden Kraft $\mathfrak{F}_i'$ in bezug auf den Punkt O ist.

Wir errechnen das Moment der im Punkte a_1 angreifenden Kraft $\mathfrak{F}_1'$, bezeichnen den Kraftarm von $\mathfrak{F}_1'$ in bezug auf den Punkt O mit p_1 (Abb. 115) und erhalten

$$m(\mathfrak{F}_1') = -F_1 p_1.$$

Bezeichnen wir den Winkel zwischen der Richtung der im Punkte a_1 angreifenden Kraft $\mathfrak{F}_1'$ und der Richtung des Abschnittes Oa_1 mit β_1, so finden wir ferner:

$$p_1 = O\,a_1 \sin\beta_1 = v_1 \sin\beta_1$$

oder, da $\beta_1 = 90° - \alpha_1$ ist,

$$p_1 = v_1 \cos\alpha_1 .$$

Folglich ist

$$m(\mathfrak{F}_1') = -F_1 v_1 \cos\alpha_1 .$$

Ebenso finden wir, daß

$$m(\mathfrak{F}_i') = -F_i v_i \cos\alpha_i$$

ist.

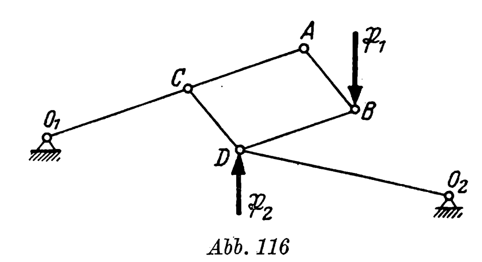


Abb. 116

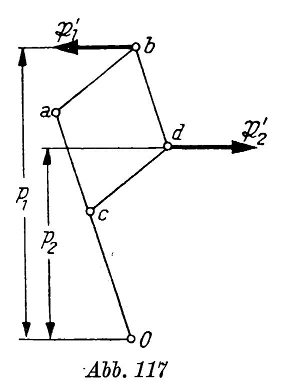


Abb. 117

Somit erhält die Gleichgewichtsbedingung (2) des Hilfshebels die Form

$$\sum F_i v_i \cos\alpha_i = 0,$$

d. h., sie stimmt mit der Gleichgewichtsbedingung (1) des gegebenen Mechanismus überein.

Das dargelegte Theorem von N. E. Shukowski stellt ein einfaches Verfahren für die Lösung von Gleichgewichtsaufgaben eines ebenen Mechanismus dar. Wir wollen die Anwendung dieses Verfahrens an einem einfachen Beispiel zeigen.

Beispiel 14. Das Parallelogramm von Watt. Der Mechanismus, der „Parallelogramm von Watt" genannt wird, besteht aus den gelenkig in den Punkten A, B, C und D verbundenen fünf Stäben O_1A, AB, CD, DB und DO_2. Die Stäbe O_1A und DO_2 drehen sich um die festen Punkte O_1 und O_2 (Abb. 116). Wir nehmen an, daß in den Punkten B und D die vertikalen Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ an dem Mechanismus angreifen. Es soll die Gleichgewichtsbedingung des Mechanismus unter der Wirkung dieser Kräfte ermittelt werden.

Wir stellen den Geschwindigkeitsplan auf, indem wir willkürlich die Größe der möglichen Geschwindigkeit des Punktes A vorgeben (Abb. 117); an den Punkten b und d des Geschwindigkeitsplanes, die den Punkten B und D unseres Mechanismus entsprechen, setzen wir die Kräfte $\mathfrak{P}_1'$ und $\mathfrak{P}_2'$ an, die aus den Kräften $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ durch die Drehung um 90° im Uhrzeigersinn gewonnen wurden. Schließlich stellen wir die Momentengleichung der Kräfte $\mathfrak{P}_1'$ und $\mathfrak{P}_2'$ in bezug auf den Punkt O auf,

$$P_1 p_1 - P_2 p_2 = 0,$$

wobei p_1 und p_2 die Hebelarme der Kräfte $\mathfrak{P}_1'$ und $\mathfrak{P}_2'$ in bezug auf den Punkt O sind Das ist die Gleichgewichtsbedingung des gegebenen Mechanismus.

§ 71. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen im Falle der Bewegung eines Systems

Wir wissen bereits, daß durch die Methode der Kinetostatik jede Aufgabe der Dynamik auf die entsprechende Aufgabe der Statik zurückgeführt werden kann. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen haben wir als eines der Grundtheoreme der Statik erkannt. Es ist verständlich, daß die Methode der Kinetostatik uns die Möglichkeit eröffnet, dieses Theorem auch bei der Lösung von Aufgaben der Dynamik anzuwenden.

Wir stellen uns das materielle System $M_1, M_2, \ldots, M_n$ vor, das sich unter der Wirkung der angreifenden Kräfte in Bewegung befindet. Die Resultierenden der vorgegebenen Kräfte und Zwangskräfte, die an jedem Punkt des Systems angreifen, bezeichnen wir wie früher mit $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ und $\mathfrak{F}'_1, \mathfrak{F}'_2, \ldots, \mathfrak{F}'_n$ (Abb. 118); die Bindungen des Systems setzen wir als zweiseitig und ideell voraus. Wir fügen zu den vorhandenen Kräften noch die Trägheitskräfte $\mathfrak{F}_{I_1}, \mathfrak{F}_{I_2}, \ldots, \mathfrak{F}_{I n}$ der Punkte des Systems hinzu. Nach der Methode der Kinetostatik müssen sich alle Kräfte einschließlich der Trägheitskräfte gegenseitig aufheben.

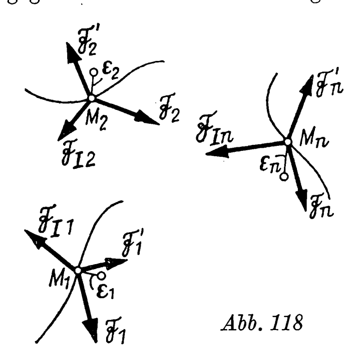


Abb. 118

Wenn wir so die Frage auf eine Aufgabe der Statik zurückführen, können wir das Prinzip der virtuellen Verrückungen anwenden. Wir erteilen dem System die virtuellen Verrückungen $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$. Dabei wollen wir nochmals unterstreichen, daß die Verrückung des Systems, von der die Rede ist, eine gedachte ist; man darf sie in keinem Fall mit derjenigen Verrückung verwechseln, die das System tatsächlich in seiner wirklichen Bewegung unter der Wirkung der angreifenden Kräfte erhält. Wenn das zweiseitigen und ideellen Bindungen unterworfene System sich im Gleichgewicht befindet, muß die Summe der Arbeiten der vorgegebenen Kräfte bei jeder virtuellen Verrückung aus der Gleichgewichtslage nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen gleich Null sein. Im vorliegenden Falle müssen in der Zahl der vorgegebenen Kräfte natürlich auch die Trägheitskräfte mit eingeschlossen sein; somit erhalten wir die Arbeitsgleichung

$$\sum F_i \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i) + \sum F_{I i} \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_{I i}, \vec{\varepsilon}_i) = 0 .$$

Also ist bei der Bewegung eines zweiseitigen und ideellen Bindungen unterworfenen Systems *die Summe der Arbeiten der vorgegebenen Kräfte und der Trägheitskräfte bei jeder virtuellen Verrückung des Systems gleich Null*; dabei muß die erwähnte Arbeitssumme mit einer Genauigkeit bis zu den kleinen Größen erster Ordnung (einschließlich) errechnet werden. Auf diese Weise wird das Prinzip der virtuellen Verrückungen im Fall der Bewegung eines Systems formuliert.

Wenn es unter den Bedingungen des Systems einseitige Bindungen gibt, ist die Summe der Arbeiten der vorgegebenen Kräfte und der Trägheitskräfte bei jeder virtuellen Verrückung des Systems gleich Null oder kleiner als Null.

§ 72. Der Regulator von Porter

Wir werden das Prinzip der virtuellen Verrückungen zur Bestimmung der Gleichgewichtslage des rotierenden Regulators von Porter anwenden.

Beim Regulator von Porter (Abb. 119) befinden sich die Kugeln A und B in den Scheitelpunkten des Rombus $OACB$. Das Gewicht jeder Kugel bezeichnen wir mit P_1; die Länge der Seiten des Rombus bezeichnen wir mit c; die Kupplung des Regulators hat das Gewicht P_2. Wir bezeichnen den Winkel, den jede Seite des Rombus mit der Vertikalen bildet, mit α. Ferner nehmen wir an, daß der Regulator gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert und bestimmen den dieser Winkelgeschwindigkeit entsprechenden Winkel α, indem wir voraussetzen, daß der Regulator sich in der Gleichgewichtslage befindet, d. h., daß der Winkel α konstant bleibt. Wir lösen die Aufgabe, wobei wir die Massen aller Teile des Regulators außer den Massen der Kugeln und der Kupplung vernachlässigen; die Kugeln aber werden wir als materielle Punkte betrachten. Zu den vorgegebenen Kräften, die auf unser sich bewegendes System wirken, und zwar zu den Gewichten $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ fügen wir die Trägheitskräfte der Kugeln und der Kupplung hinzu. Die Trägheitskräfte $\mathfrak{F}_I$ und $\mathfrak{F}_I'$ der Kugeln haben als Zentrifugalkräfte die Größe $F_I = \frac{P_1}{g} r\omega^2$ (wobei r die Länge des von dem Zentrum der Kugel auf die Drehachse des Regulators gefällten Lotes ist) und sind längs des Lotes r von der Drehachse fort gerichtet; mit $r = c \sin \alpha$ ist $F_I = \frac{P_1}{g} c\, \omega^2 \cdot \sin \alpha$, die Trägheitskräfte der Kupplung aber heben sich gegenseitig auf.

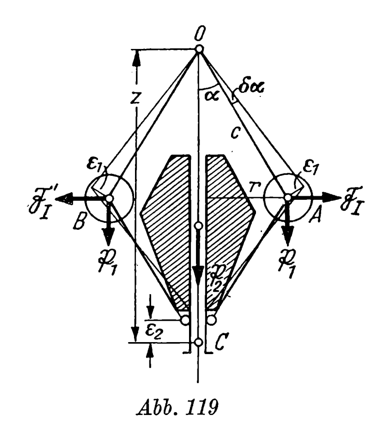


Abb. 119

Wenn wir die Trägheitskräfte $\mathfrak{F}_I$ und $\mathfrak{F}_I'$ einführen, haben wir das Recht, den rotierenden Regulator als in Ruhe befindlich zu betrachten. Wir geben unserem System eine virtuelle Verrückung und stellen die Arbeitsgleichung auf. Die virtuelle Verrückung des Systems erhalten wir, wenn wir dem Winkel α den winzig kleinen Zuwachs $\delta\alpha$ geben (die verschobene Lage des Rombus $OACB$ ist in der Abb. 190 durch eine dünne Linie gekennzeichnet). Bezeichnen wir die Verrückungen der Kugelzentren mit $\vec{\varepsilon}_1$ und die Verrückung der Kupplung mit $\vec{\varepsilon}_2$, so erhalten wir die Arbeitsgleichung

$$2 F_I \varepsilon_1 \cos \alpha - 2 P_1 \varepsilon_1 \sin \alpha - P_2 \varepsilon_2 = 0 .$$

Hier ist $\varepsilon_1 = c\delta\alpha$. Zur Berechnung von ε_2 bemerken wir, daß die Verrückung der Kupplung gleich der Verkürzung der Diagonale OC unseres Rombus ist, die der Vergrößerung des Winkels α um die Größe $\delta\alpha$ entspricht. Bezeichnen wir OC mit z, so erhalten wir:

$$z = 2\, c \cos \alpha .$$

Wir differenzieren und gewinnen damit den Ausdruck für die kleine Veränderung δz der Diagonale z:

$$\delta z = - 2c \sin\alpha\, \delta\alpha .$$

Folglich ist

$$\varepsilon_2 = - \delta z = 2c \sin\alpha\, \delta\alpha .$$

Setzen wir in die Arbeitsgleichung die Werte ε_1 sowie ε_2 und auch die Beziehung für die Trägheitskraft F_I ein, so erhalten wir

$$2 \frac{P_1}{g} c^2 \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha\, \delta\alpha - 2 P_1 c \sin\alpha\, \delta\alpha - 2 P_2 c \sin\alpha\, \delta\alpha = 0$$

oder, nach Kürzung durch $2c\ \delta\alpha$,

$$\sin\alpha \left(\frac{P_1}{g} c\, \omega^2 \cos\alpha - P_1 - P_2 \right) = 0 .$$

Hieraus ersieht man, daß die Aufgabe zwei Lösungen hat. Die erste Lösung $\alpha = 0$ hat nur eine theoretische Bedeutung, da die Konstruktion des Mechanismus keine Verwandlung des Winkels α in Null zuläßt. Eine praktische Bedeutung hat die zweite Lösung, die durch die Gleichung

$$\cos\alpha = \frac{g(P_1 + P_2)}{P_1 c\, \omega^2}$$

gegeben ist.

Da $z = 2c \cos\alpha$ ist, erhalten wir hieraus für z die Gleichung

$$z = \frac{2g(P_1 + P_2)}{P_1 \omega^2}.$$

Nach dieser Gleichung wird die Größe z errechnet (d. h. die Lage der Kupplung), die der gegebenen Winkelgeschwindigkeit ω entspricht. Umgekehrt wird die Winkelgeschwindigkeit ω im Gleichgewichtszustand, die der gegebenen Lage der Kupplung, d. h. dem gegebenen z entspricht, nach der Gleichung

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(P_1 + P_2)}{P_1 z}} \tag{1}$$

gefunden.

Wir wollen dieses Resultat auf ein Zahlenbeispiel anwenden. Wir nehmen an, daß $P_1 = 10$ kg, $P_2 = 60$ kg, $z = 36$ cm ist. Nach der Gl. (1) finden wir

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 981 \cdot 70}{10 \cdot 36}} = 19{,}5 \frac{1}{\mathrm{s}},$$

was einer Drehzahl von $n = 186$ U/min entspricht.

KAPITEL XIII

DIE KINETISCHE ENERGIE

§ 73. Die kinetische Energie

Im Kapitel IV wurden die Gesetzmäßigkeiten der kinetischen Energie dargelegt, die bei einem materiellen Punkt gelten. Wir wollen nun diese Gesetzmäßigkeiten auf die Bewegung eines materiellen Systems ausdehnen.

Wir stellen uns das materielle System $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (Abb. 120) vor, das sich unter der Wirkung der angreifenden Kräfte bewegt. Alle auf das System einwirkenden Kräfte unterteilen wir in zwei Gruppen: in vorgegebene Kräfte und in Zwangskräfte. Die Resultierenden der an jedem Punkte des Systems angreifenden vorgegebenen Kräfte bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$; die Resultierenden der Zwangskräfte bezeichnen wir entsprechend mit $\mathfrak{F}_1', \mathfrak{F}_2', \ldots, \mathfrak{F}_n'$. Die Bindungen des Systems werden wir als zweiseitig und ideell voraussetzen; außerdem werden wir annehmen, daß es unter den Zwangsbedingungen des Systems keine von der Zeit abhängigen Zwangsbedingungen gibt.

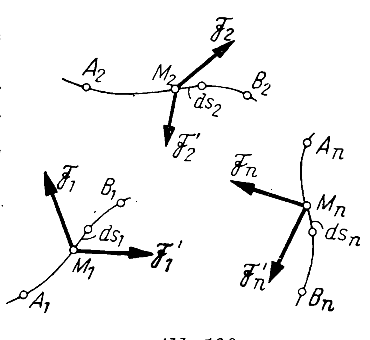


Abb. 120

Wir wollen die Gesetzmäßigkeiten der kinetischen Energie bei der Bewegung eines jeden Systempunktes anwenden. Wir wählen den unendlich kleinen Zeitraum $\mathrm{d}t$ und bezeichnen die elementaren Verrückungen, welche die Systempunkte in diesem Zeitraum erhalten, mit $\mathrm{d}s_1, \mathrm{d}s_2, \ldots, \mathrm{d}s_n$. Nach den Gesetzmäßigkeiten der kinetischen Energie ist der unendlich kleine Zuwachs der kinetischen Energie eines materiellen Punktes M_i in der Zeit $\mathrm{d}t$ bei der elementaren Verrückung $\mathrm{d}s_i$ gleich der Summe der elementaren Arbeiten der an diesem Punkte angreifenden Kräfte. Wenn wir dies bei allen Systempunkten anwenden und die Massen der Systempunkte mit $m_1, m_2, \ldots, m_n$ bezeichnen, ihre Geschwindigkeiten aber mit $v_1, v_2, \ldots, v_n$, dann erhalten wir

$$\mathrm{d}\,\frac{m_1 v_1^2}{2} = F_1\,\mathrm{d}s_1 \cos(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{v}_1) + F_1'\,\mathrm{d}s_1 \cos \mathfrak{F}_1', \mathfrak{v}_1),$$

$$\mathrm{d}\,\frac{m_2 v_2^2}{2} = F_2\,\mathrm{d}s_2 \cos(\mathfrak{F}_2, \mathfrak{v}_2) + F_2'\,\mathrm{d}s_2 \cos \mathfrak{F}_2', \mathfrak{v}_2),$$

$$\mathrm{d}\,\frac{m_n v_n^2}{2} = F_n\,\mathrm{d}s_n \cos(\mathfrak{F}_n, \mathfrak{v}_n) + F_n'\,\mathrm{d}s_n \cos(\mathfrak{F}_n', \mathfrak{v}_n).$$

Wir addieren die Gleichungen gliedweise:

$$\sum d\,\frac{m_i v_i^2}{2} = \sum F_i\, d s_i \cos(\mathfrak{F}_i, \mathfrak{v}_i) + \sum F_i'\, d s_i \cos(\mathfrak{F}_i', \mathfrak{v}_i).$$

Ferner ist

$$\sum d\,\frac{m_i v_i^2}{2} = d \sum \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Die Summe der kinetischen Energien der Systempunkte werden wir *die kinetische Energie des Systems* nennen und mit dem Buchstaben T bezeichnen, d. h., wir werden

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$$

setzen.

Folglich erhalten wir

$$d\,T = \sum F_i\, d s_i \cos(\mathfrak{F}_i, \mathfrak{v}_i) + \sum F_i'\, d s_i \cos(\mathfrak{F}_i', \mathfrak{v}_i),$$

wobei dT der unendlich kleine Zuwachs der kinetischen Energie des Systems in der Zeit dt ist.

Wir bemerken nun, daß die Bewegung unseres Systems natürlich ohne Zerstörung der Zwangsbedingungen erfolgt, d. h., die von den Systempunkten bei der Bewegung des Systems erhaltenen Verrückungen werden durch die Zwangsbedingungen zugelassen. Daraus folgt, daß die Verrückungen $ds_1, ds_2, \ldots, ds_n$, die das System in der Zeit dt erhält, mögliche virtuelle Verrückungen des Systems sind[1]. Da die Bindungen des Systems als zweiseitig und ideell vorausgesetzt wurden, schließen wir, daß die Summe der Arbeiten der Zwangskräfte bei den Verrückungen $ds_1, ds_2, \ldots, ds_n$ gleich Null ist. Streichen wir das zweite Glied in der letzten Gleichung, so erhalten wir:

$$d\,T = \sum F_i\, d s_i \cos(\mathfrak{F}_i, \mathfrak{v}_i).$$

Dieses Resultat sagt uns, daß die unendlich kleine Veränderung der kinetischen Energie des Systems im unendlich kleinen Zeitraum dt gleich der Summe der elementaren Arbeiten der vorgegebenen Kräfte bei den entsprechenden unendlich kleinen Verrückungen der Systempunkte ist.

Wir wollen nun den endlichen Zeitraum wählen, der zwischen den Augenblicken t_1 und t_2 eingeschlossen ist. Wir nehmen an, daß das System im Augenblick t_1 die durch die Buchstaben $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bezeichnete Lage einnimmt (Abb. 120); wir werden diese Lage des Systems die Lage I nennen. Im Augenblick t_2 nimmt das System die Lage $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ein; diese Lage ist die Lage II. In der Zeit $t_2 - t_1$ geht das System aus der Lage I in die Lage II über.

---

[1] Eine solche Schlußfolgerung wäre falsch, wenn es unter den Zwangsbedingungen des Systems von der Zeit abhängige Zwangsbedingungen gäbe. In diesem Falle wäre die tatsächliche, vom System in der Zeit dt erhaltene Verrückung keine virtuelle Verrückung in dem Sinne, der diesem Ausdruck auf Seite 149 gegeben ist.

Um wieviel verändert sich dabei nun die kinetische Energie des Systems?

Um diese Frage zu beantworten, wollen wir uns vorstellen, daß der Zeitraum $t_2 - t_1$ in eine Reihe elementarer Zeiträume dt unterteilt ist. Wir haben soeben gesehen, daß der Zuwachs der kinetischen Energie des Systems im elementaren Zeitraum gleich der Summe der Arbeiten der vorgegebenen Kräfte bei der entsprechenden elementaren Verrückung des Systems ist. Wenn wir aber die Zunahmen, die die kinetische Energie des Systems während jedes elementaren Zeitraumes dt erhält, addieren, dann erhalten wir den vollen Zuwachs der kinetischen Energie während der Zeit $t_2 - t_1$, der gleich der Differenz von $T_2 - T_1$ ist, wobei T_1 und T_2 die Werte der kinetischen Energie in den Lagen I und II sind. Wenn wir im Auge behalten, daß die Summe der elementaren Arbeiten der Kraft $\mathfrak{F}_i$, die allen elementaren Zeiträumen dt entsprechen, in welche wir den Zeitraum $t_2 - t_1$ unterteilt haben, gleich der endlichen Arbeit

$$R_i = \int_{A_i}^{B_i} F_i \cos(\mathfrak{F}_i, \mathfrak{v}_i)\, d s_i$$

dieser Kraft bei der Verrückung des Punktes M_i aus der Lage A_i in die Lage B_i ist, erhalten wir

$$T_2 - T_1 = \sum \int_{A_i}^{B_i} F_i \cos(\mathfrak{F}_i, \mathfrak{v}_i)\, d s_i$$

oder kürzer

$$T_2 - T_1 = \sum R_i .$$

Also ist beim Übergang des Systems aus der Lage I in die Lage II die *Änderung der kinetischen Energie des Systems gleich der Summe der Arbeiten der an den Punkten des Systems angreifenden vorgegebenen Kräfte.* Das ist die Formulierung der Gesetzmäßigkeiten der kinetischen Energie bei der Anwendung auf die Bewegung eines materiellen Systems.

Wir haben hier eine Wechselbeziehung gewonnen, aus der alle Zwangskräfte ausgeschlossen sind. Darin besteht der praktische Wert des gewonnenen Resultates. Wenn wir die Gesetzmäßigkeiten der kinetischen Energie anwenden, erhalten wir die Möglichkeit, die Zwangskräfte automatisch zu eliminieren; deshalb erscheint deren Anwendung als ein sehr bequemes Verfahren zur Lösung von Aufgaben der Dynamik.

Es muß unterstrichen werden, daß die Eliminierung der Zwangskräfte aus einer diese Gesetzmäßigkeit ausdrückenden Gleichung nur dann am Platze ist, wenn alle Bindungen des Systems als zweiseitig, ideell und *unabhängig von der Zeit* vorausgesetzt werden. Bei der Anwendung hat man es gewöhnlich gerade mit solchen Fällen zu tun. Natürlich müssen Reibungskräfte, sofern sie vorhanden sind, zu den vorgegebenen Kräften hinzugezählt werden.

Der Begriff der kinetischen Energie wurde durch LEIBNIZ in die Wissenschaft unter dem Namen „*lebendige Kraft*" eingeführt. Das Wesen des Theorems der lebendigen Kraft oder der kinetischen Energie (ebenso wie das der Mehrzahl der Grundtheoreme der Mechanik) wurde erst allmählich durch die Leistungen einer ganzen Reihe von Forschern aufgedeckt. Die endgültige Formulierung der Gesetzmäßigkeiten der lebendigen Kraft wurde von DANIEL BERNOULLI (1748) gegeben.

§ 74. Das Theorem von KÖNIG

Bei der Berechnung der kinetischen Energie eines Systems ist das von KÖNIG (1751) aufgestellte Theorem in vielen Fällen sehr nützlich.

Wir wollen uns ein materielles System $M_1, M_2, \ldots, M_n$ vorstellen (Abb. 121) und die Koordinaten des Punktes M_i, bezogen auf die Koordinatenachsen x, y und z, mit x_i, y_i und z_i bezeichnen. Der geometrische, durch die Koordinaten

$$x_c = \frac{\Sigma m_i x_i}{M}, \qquad y_c = \frac{\Sigma m_i y_i}{M}, \qquad z_c = \frac{\Sigma m_i z_i}{M} \tag{1}$$

bestimmte Punkt C ($M = \Sigma m_i$ ist die Masse des ganzen Systems) heißt *Trägheitszentrum des Systems.*

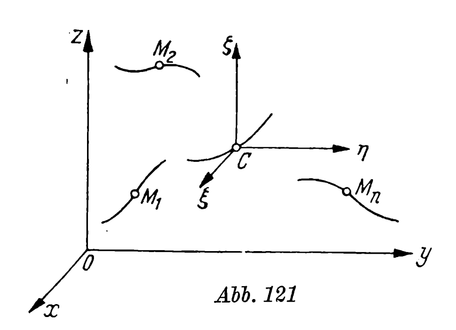


Abb. 121

Die soeben aufgeschriebenen Gleichungen für die Koordinaten des Trägheitszentrums können auch ein wenig anders dargestellt werden. Multiplizieren wir den Zähler und den Nenner in diesen Gleichungen mit g, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\Sigma p_i x}{P}, \qquad y_c = \frac{\Sigma p_i y_i}{P}, \\ z_c &= \frac{\Sigma p_i z_i}{P}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wobei p_i das Gewicht des Punktes M_i ist und P das Gewicht des ganzen Systems.

Durch die Gl. (2) werden aber, wie bekannt (s. Teil I, § 68), die Koordinaten des Schwerpunktes bestimmt. Hieraus folgt, daß der von uns das Trägheitszentrum des Systems genannte Punkt mit dem Schwerpunkt des Systems zusammenfällt. Man muß jedoch bemerken, daß der Begriff des Trägheitszentrums bedeutend weiter ist als der Begriff des von uns in der Statik festgestellten Schwerpunktes. Vom Schwerpunkt eines Systems kann man nur dann sprechen, wenn das System sich unter der Wirkung von Schwerkräften befindet. Der Begriff des Trägheitszentrums aber als eines Punktes, der durch die Gl. (1) bestimmt wird, hängt ganz und gar nicht davon ab, welche Kräfte auf das System einwirken.

Wir bemerken, daß die Lage des Trägheitszentrums C des Systems auch durch den Radius-Vektor (wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{r}_c$) bestimmt werden kann, der von dem Koordinatenursprung aus nach dem Trägheitszentrum gezogen ist. Bezeichnen wir die Radius-Vektoren, die von dem Koordinatenursprung aus nach den Punkten M_1, $M_2, \ldots, M_n$ gezogen sind, mit $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_n$, so gilt

$$\mathfrak{r}_c = \frac{\Sigma m_i \mathfrak{r}_i}{M}. \tag{3}$$

Diese Vektorengleichung ist gleichwertig den drei Gleichungen (1); denn wenn wir beide Teile der Gl. (3) auf die Achsen x, y und z projizieren und feststellen, daß die

Projektionen der Vektoren $\mathfrak{r}_c$ und $\mathfrak{r}_i$ gleich den entsprechenden Koordinaten x_c, y_c, z_c und x_i, y_i, z_i sind, erhalten wir die Gl. (1).

Wir stellen uns nun vor, daß das System $M_1, M_2, \ldots, M_n$ irgendeine Bewegung ausführt. Natürlich wird sich dabei auch das Trägheitszentrum C im Raume verschieben. Wir ziehen durch den Punkt C die zueinander senkrechten Achsen ξ, η und ζ, die den Achsen x, y, z parallel sind, und stellen uns vor, daß sich die Achsen ξ, η und ζ zusammen mit dem Trägheitszentrum C bewegen und dabei untereinander parallel bleiben, d. h., daß sie eine fortschreitende Bewegung ausführen. In einem solchen Falle bleiben die Achsen ξ, η und ζ während der ganzen Zeit der Bewegung parallel den Achsen x, y und z. Es ist klar, daß unser System bei einer absoluten Bewegung im Raum gleichzeitig eine relative Bewegung in bezug auf die sich bewegenden Achsen ξ, η und ζ ausführt. Wir können die absolute Bewegung des Systems als eine aus der translativen Bewegung zusammen mit den Achsen ξ, η, ζ und der relativen Bewegung in bezug auf diese Achsen zusammengesetzte betrachten. Wir vereinbaren, diese beiden Komponenten der Bewegung die translative Bewegung des Systems „zusammen mit dem Trägheitszentrum" und die relative Bewegung des Systems „in bezug auf das Trägheitszentrum" zu nennen. Wir wollen nochmals unterstreichen, daß wir unter der relativen Bewegung des Systems „in bezug auf das Trägheitszentrum" die relative Bewegung des Systems in bezug auf die Achsen verstehen, die sich zusammen mit dem Trägheitszentrum *fortschreitend* bewegen.

Bei der Berechnung der kinetischen Energie eines Systems ist es in vielen Fällen nützlich, sich die absolute Bewegung des Systems als in jene zwei Bewegungskomponenten zerlegt vorzustellen, von denen soeben die Rede war. Wir werden zeigen, daß die kinetische Energie eines Systems in seiner absoluten Bewegung gleich der Summe der kinetischen Energien des Systems ist, die jeder dieser Bewegungskomponenten entsprechen. Das ist das Theorem von König.

Die kinetische Energie des Systems in seiner absoluten Bewegung ist gleich

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}. \tag{4}$$

Wenn wir die absolute Bewegung des Punktes M_i als aus der translativen Bewegung zusammen mit den Achsen ξ, η, ζ und aus der relativen Bewegung in bezug auf diese Achsen zusammengesetzt betrachten und bemerken, daß die translative Geschwindigkeit des Punktes M_i nichts anderes ist als die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_c$ des Trägheitszentrums C, erhalten wir nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten

$$\mathfrak{v}_i = \mathfrak{v}_c + \mathfrak{u}_i,$$

wobei $\mathfrak{u}_i$ die relative Geschwindigkeit des Punktes M_i in seiner relativen Bewegung in bezug auf die Achsen ξ, η, ζ, d. h. in seiner relativen Bewegung in bezug auf das Trägheitszentrum, ist.

Wir bemerken, daß wir das Quadrat der Geschwindigkeit v_i^2 als skalares Produkt $\mathfrak{v}_i \cdot \mathfrak{v}_i$ darstellen können. Folglich ist

$$v_i^2 = \mathfrak{v}_i \cdot \mathfrak{v}_i = (\mathfrak{v}_c + \mathfrak{u}_i) \cdot (\mathfrak{v}_c + \mathfrak{u}_i) = \mathfrak{v}_c \cdot \mathfrak{v}_c + \mathfrak{u}_i \cdot \mathfrak{u}_i + 2\,\mathfrak{v}_c \cdot \mathfrak{u}_i = v_c^2 + u_i^2 + 2\,\mathfrak{v}_c \cdot \mathfrak{u}_i.$$

Wir setzen diesen Ausdruck für v_i^2 in die Gl. (4) ein. Multiplizieren wir jedes Glied im Ausdruck v_i^2 mit $\frac{m_i}{2}$ und führen die Summation gliedweise durch, so erhalten wir

$$T = \sum \frac{m_i v_c^2}{2} + \sum \frac{m_i u_i^2}{2} + \sum m_i (\mathfrak{v}_c \cdot \mathfrak{u}_i). \tag{5}$$

Ferner gilt, wenn wir uns die Eigenschaften des skalaren Produktes (s. § 19) ins Gedächtnis rufen:

$$\sum m_i (\mathfrak{v}_c \cdot \mathfrak{u}_i) = \sum (\mathfrak{v}_c \cdot m_i \mathfrak{u}_i) = \mathfrak{v}_c \cdot \sum m_i \mathfrak{u}_i .$$

Andererseits haben wir aus der Gl. (3):

$$\sum m_i \mathfrak{r}_i = M \mathfrak{r}_c .$$

Genauso erhalten wir, wenn wir die Radius-Vektoren, die von dem Ursprung der Achsen ξ, η, ζ aus (d. h. von dem Trägheitszentrum aus) nach den Punkten C und M_i gezogen sind, mit $\vec{\varrho}_c$ und $\vec{\varrho}_i$ bezeichnen,

$$\sum m_i \vec{\varrho}_i = M \vec{\varrho}_c ;$$

weil aber $\vec{\varrho}_c = 0$ ist, gilt

$$\sum m_i \vec{\varrho}_i = 0 .$$

Nun differenzieren wir diese Vektorgleichung nach der Zeit t. Beachten wir, daß

$$\frac{d \vec{\varrho}_i}{d t} = \mathfrak{u}_i$$

ist, so erhalten wir

$$\sum m_i \mathfrak{u}_i = 0 .$$

Wir schließen, daß das letzte Glied im rechten Teil der Gl. (5) zu Null wird. Folglich ist

$$T = \sum \frac{m_i v_c^2}{2} + \sum \frac{m_i u_i^2}{2} .$$

Das ist die Gleichung, die das Theorem von König ausdrückt: *Die kinetische Energie eines Systems ist gleich der Summe der kinetischen Energie des Systems in seiner translativen (fortschreitenden) Bewegung zusammen mit dem Trägheitszentrum und der kinetischen Energie des Systems in seiner relativen Bewegung in bezug auf das Trägheitszentrum.*

Die erste Summe in der letzten Gleichung, die gleich der kinetischen Energie des Systems in seiner translativen Bewegung zusammen mit dem Trägheitszentrum ist, kann ein wenig anders dargestellt werden. Bemerken wir, daß $\frac{v_c^2}{2}$ der gemeinsame Faktor in allen Summanden dieser Summe ist, so haben wir:

$$\sum \frac{m_i v_c^2}{2} = \frac{v_c^2}{2} \sum m_i = \frac{1}{2} M v_c^2 ,$$

wobei M die Masse des ganzen Systems ist. Folglich erhalten wir endgültig

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \sum \frac{m_i u_i^2}{2}.$$

Das Glied $\frac{1}{2} M v_c^2$ ist nichts anderes als die kinetische Energie, die das Trägheitszentrum C haben würde, wenn wir uns die ganze Masse des Systems in demselben konzentriert vorstellten. Somit erhalten wir folgende endgültige Formulierung des Theorems von König: *Die kinetische Energie eines Systems ist gleich der Summe der kinetischen Energie des Trägheitszentrums, in dem die ganze Masse des Systems als konzentriert betrachtet wird, und der kinetischen Energie des Systems in seiner relativen Bewegung in bezug auf das Trägheitszentrum.* Wir wollen nochmals daran erinnern, daß man unter der relativen Bewegung des Systems in bezug auf das Trägheitszentrum die relative Bewegung in bezug auf die sich fortschreitend zusammen mit dem Trägheitszentrum bewegenden Achsen verstehen muß.

§ 75. Die kinetische Energie eines starren Körpers

Wir wollen uns nun mit der Berechnung der kinetischen Energie eines sich bewegenden starren Körpers beschäftigen. Wir werden nacheinander verschiedene Fälle der Bewegung eines starren Körpers untersuchen.

1. *Die fortschreitende Bewegung eines starren Körpers.* Wir stellen uns einen starren Körper vor, der sich fortschreitend bewegt, und wenden das Theorem von König an. Wenn sich der starre Körper fortschreitend bewegt, sind die Geschwindigkeiten aller seiner Punkte gleich der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_c$ seines Trägheitszentrums. In bezug auf die sich zusammen mit dem Trägheitszentrum fortschreitend bewegenden Achsen führt der Körper keinerlei Bewegung aus; die relativen Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}_i$ seiner Punkte in bezug auf diese Achsen sind gleich Null. Im gegebenen Fall verwandelt sich das zweite Glied in der Gleichung von König zu Null, und wir erhalten für die kinetische Energie eines starren Körpers den Ausdruck

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2.$$

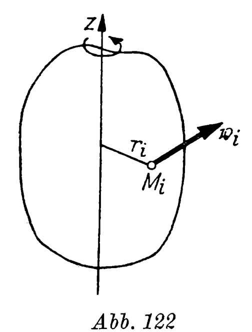


Abb. 122

Hieraus sieht man, daß man bei der Berechnung der kinetischen Energie eines starren Körpers, der sich fortschreitend bewegt, diesen als einen materiellen Punkt betrachten kann, wenn man seine ganze Masse als in seinem Trägheitszentrum konzentriert voraussetzt.

2. *Die Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse.* Wir nehmen an, daß ein starrer Körper um die feste Achse z rotiert (Abb. 122); die Größe der Winkelgeschwin-

digkeit der Rotation bezeichnen wir mit ω. Wir berechnen die kinetische Energie des rotierenden Körpers, indem wir von der Grundgleichung

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$$

ausgehen.

Hier ist m_i die Masse eines beliebigen Teilchens M_i des Körpers und v_i die Geschwindigkeit dieses Teilchens. Im gegebenen Falle gilt

$$v_i = r_i \omega ,$$

wobei r_i der Abstand des Teilchens M_i von der Drehachse z ist. Folglich ist

$$T = \sum \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 .$$

Die Summe $\sum m_i r_i^2$ spielt eine große Rolle in der Dynamik der rotierenden Bewegung eines starren Körpers; diese Größe heißt das *Trägheitsmoment des starren Körpers in bezug auf die z-Achse.* Bezeichnen wir $\sum m_i r_i^2$ mit J, so ist

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 .$$

Die kinetische Energie eines rotierenden starren Körpers ist also gleich dem halben Produkt seines Trägheitsmomentes (in bezug auf die Rotationsachse) und dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit. Das ist eine der wichtigsten Beziehungen der Dynamik eines starren Körpers. Natürlich muß in dieser Gleichung die Winkelgeschwindigkeit ω in absoluten Einheiten ausgedrückt sein.

Da das Trägheitsmoment eines starren Körpers die Dimension der Masse, multipliziert mit dem Quadrat der Länge hat, muß die Dimension des Trägheitsmomentes im technischen Maßsystem

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \text{m}^2 = \text{kg m s}^2$$

sein.

Wir bemerken, daß das Trägheitsmoment J häufig in Form des Produktes

$$J = M r_I^2$$

dargestellt wird, wobei M die Masse des Körpers und r_I eine durch die Gleichung

$$r_I = \sqrt{\frac{J}{M}}$$

bestimmte Länge ist.

Diese Länge r_I heißt *Trägheitsradius* des Körpers in bezug auf die gegebene Achse; die Größe $2r_I = D_I$ heißt *Trägheitsdurchmesser* des Körpers in bezug auf dieselbe Achse.

Bei technischen Anwendungen wird zuweilen an Stelle des Trägheitsmomentes der Begriff des Schwungmomentes des Körpers in bezug auf die gegebene Achse

eingeführt. Mit diesem Ausdruck wird das Produkt aus dem Körpergewicht und dem Quadrat seines Trägheitsdurchmessers PD_I^2 bezeichnet. Das Trägheitsmoment und das Schwungmoment befinden sich in einer einfachen Abhängigkeit.

Es gilt

$$P D_I^2 = M g (2 r_I)^2 = 4 g M r_I^2 = 4 g J .$$

Die Dimension des Schwungmomentes im technischen Maßsystem ist kg m².

3. *Die eben-parallele Bewegung eines starren Körpers.* Stellen wir uns nun einen starren Körper vor, der eine eben-parallele Bewegung ausführt. Wir wollen als Abbildungsebene die Ebene wählen, die durch das Trägheitszentrum des Körpers geht, und zu der die Bewegung des Körpers parallel verläuft. Im Schnitt des Körpers mit dieser Ebene erhalten wir eine ebene Figur, die das Trägheitszentrum C enthält (Abb. 123); durch die Bewegung dieser Figur in ihrer Ebene wird die Bewegung des Körpers kinematisch eindeutig bestimmt.

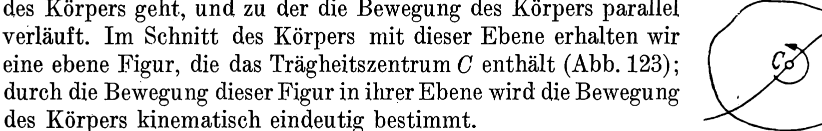


Abb. 123

Wir wollen das Theorem von König zur Berechnung der kinetischen Energie des Körpers benutzen und stellen uns die Bewegung des Körpers als in die translative Bewegung zusammen mit dem Trägheitszentrum C und die relative Bewegung in bezug auf das Trägheitszentrum zerlegt vor. Im gegebenen Fall ist die relative Bewegung des Körpers in bezug auf das Trägheitszentrum die Drehung um die Achse, die durch das Trägheitszentrum C geht und senkrecht zu der Abbildungsebene steht. Folglich gilt nach dem Theorem von König:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2 ,$$

wobei J_c das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die erwähnte Achse ist, die durch das Trägheitszentrum hindurchgeht und senkrecht auf der Ebene steht, in der sich der Körper parallel bewegt; ω ist seine Winkelgeschwindigkeit[1].

Auch diese Gleichung ist sehr wichtig. Nach dieser Gleichung muß die kinetische Energie der Maschinenteile errechnet werden, die eine eben-parallele Bewegung ausführen.

4. *Die Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt.* Aus der Kinematik ist bekannt (s. Teil I, § 115), daß in diesem Falle die Geschwindigkeiten der Punkte eines starren Körpers in jedem Augenblick so sind, als ob der Körper in diesem Augenblick um eine gewisse momentane Achse Ω rotieren würde, die durch den festen Punkt hindurchgeht. Die Berechnung der kinetischen Energie eines starren Körpers kann genauso durchgeführt werden wie im Falle der Rotation um eine feste Achse; wir erhalten die Gleichung

$$T = \frac{1}{2} J_\Omega \cdot \omega^2 ,$$

wobei J_Ω das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die momentane Achse und ω die Größe seiner Winkelgeschwindigkeit ist.

---

[1] In Deutschland ist dieser Ausdruck als der STEINERsche Satz bekannt (Anm. d. deutschen Redaktion).

Es muß vermerkt werden, daß das Trägheitsmoment J_Ω eine variable Größe ist, da die momentane Achse ununterbrochen ihre Lage innerhalb des Körpers verändert.

5. *Der allgemeine Fall der Bewegung eines starren Körpers.* Wir wollen uns wieder des Theorems von König bedienen und zerlegen die Bewegung des Körpers in die translative Bewegung zusammen mit dem Trägheitszentrum und die relative Bewegung in bezug auf das Trägheitszentrum. Im gegebenen Falle ist die relative Bewegung des Körpers in bezug auf das Trägheitszentrum eine Rotation um das Trägheitszentrum, die man in jedem gegebenen Augenblick als Rotation um irgendeine momentane Achse ansehen kann, die durch das Trägheitszentrum geht. Folglich gilt nach dem Theorem von König:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c^\Omega \omega^2,$$

wobei J_c^Ω das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die momentane, durch das Trägheitszentrum gehende Achse und ω die Größe der Winkelgeschwindigkeit des Körpers ist.

Auch hier ist das Trägheitsmoment J_c^Ω eine variable Größe.

Wir beenden diesen Paragraphen mit der Anwendung der gewonnenen Gleichungen auf mehrere Beispiele.

Wir wollen die kinetische Energie eines Schwungrades berechnen, dessen Gewicht $P = 3600$ kg beträgt; der Trägheitsradius (in bezug auf die Drehachse) ist $r_I = 1{,}4$ m und die Drehzahl 100 U/min.

Wir ermitteln das Trägheitsmoment des Schwungrades:

$$J = \frac{P}{g} r_I^2 = \frac{3600}{9{,}81} (1{,}4)^2 = 719 \text{ kgm s}^2.$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades ist gleich

$$\omega = (100 \text{ U/min} =) \frac{10\pi}{3} \frac{1}{\text{s}}.$$

Hieraus ergibt sich

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 719 \cdot \left(\frac{10\pi}{3}\right)^2 = 39\,400 \text{ kgm}.$$

Wir errechnen auch noch die kinetische Energie der Kurbelstange einer Dampfmaschine nach folgenden Angaben: Das Gewicht der Kurbelstange beträgt $P = 150$ kg, ihr Trägheitsradius (in bezug auf die durch den Schwerpunkt der Kurbelstange hindurchgehende Achse) ist $r_I = 0{,}7$ m, die Geschwindigkeit des Schwerpunktes $v_c = 6$ m/s, die Winkelgeschwindigkeit der Kurbelstange $\omega = 3 \frac{1}{\text{s}}$.

Wir ermitteln das Trägheitsmoment der Kurbelstange (in bezug auf die durch den Schwerpunkt hindurchgehende Achse):

$$J_c = \frac{P}{g} r_I^2 = \frac{150}{9{,}81} \cdot 0{,}49 = 7{,}50 \text{ kgm s}^2.$$

Danach errechnen wir die kinetische Energie der Kurbelstange:

$$T = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{150}{9{,}81}\cdot 36 + \frac{1}{2}\cdot 7{,}50\cdot 9 = 275 + 34 = 309\,\text{kgm}.$$

Auf die Frage nach der Berechnung der kinetischen Energie der Maschinenteile werden wir ausführlicher im § 81 zurückkommen.

§ 76. Die Arbeit der an einem starren Körper angreifenden Kräfte

Bei der Anwendung der Gesetzmäßigkeiten der kinetischen Energie auf Systeme, die aus starren Körpern bestehen, muß man auch die Arbeit der an einem starren Körper angreifenden Kräfte berechnen. Wir werden uns jetzt mit der Berechnung der elementaren Arbeiten der an einem starren Körper angreifenden Kräfte beschäftigen. Zuerst sollen die einfachsten Fälle der fortschreitenden Bewegung eines starren Körpers und der Rotation um eine feste Achse betrachtet werden; danach werden wir zu dem allgemeinen Fall einer beliebigen Bewegung des Körpers übergehen.

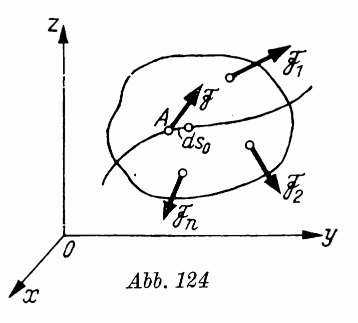


Abb. 124

1. *Die fortschreitende Bewegung eines starren Körpers.* An einem starren Körper, der sich fortschreitend bewegt, greifen die (vorgegebenen) Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ an (Abb. 124). Wir wollen die Summe der elementaren Arbeiten $\sum \mathrm{d} R_i$ dieser Kräfte bei der elementaren Verrückung des Körpers errechnen.

Wählen wir die zueinander senkrechten Koordinatenachsen x, y und z und bezeichnen wir die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}_i$ auf diesen Achsen mit X_i, Y_i, Z_i und die Koordinaten des Angriffspunktes dieser Kraft mit x_i, y_i, z_i, so erhalten wir:

$$\sum \mathrm{d} R_i = \sum (X_i \,\mathrm{d} x_i + Y_i \,\mathrm{d} y_i + Z_i \,\mathrm{d} z_i),$$

wobei $\mathrm{d}x_i$, $\mathrm{d}y_i$ und $\mathrm{d}z_i$ die Zuwüchse der Koordinaten x_i, y_i und z_i bei der Verrückung des Körpers sind.

Bei einer fortschreitenden Verrückung des Körpers verschieben sich jedoch alle Punkte auf identische Art. Wir wählen jetzt einen beliebigen Punkt des Körpers A und bezeichnen seine Koordinaten mit x_0, y_0 und z_0. Dann ist $\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}x_0$, $\mathrm{d}y_i = \mathrm{d}y_0$, $\mathrm{d}z_i = \mathrm{d}z_0$ und folglich

$$\sum \mathrm{d} R_i = \sum (X_i \,\mathrm{d} x_o + Y_i \,\mathrm{d} y_o + Z_i \,\mathrm{d} z_o).$$

Hieraus folgt, daß

$$\sum \mathrm{d} R_i = \sum X_i \,\mathrm{d} x_o + \sum Y_i \,\mathrm{d} y_o + \sum Z_i \,\mathrm{d} z_o = \mathrm{d} x_o \sum X_i + \mathrm{d} y_o \sum Y_i + \mathrm{d} z_o \sum Z_i$$

ist. Wir bezeichnen

$$\sum X_i = X, \qquad \sum Y_i = Y, \qquad \sum Z_i = Z.$$

Die Größen X, Y und Z sind die Komponenten der Summe der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auf den Achsen x, y, z. Wir bezeichnen die Summe der Kräfte mit $\mathfrak{F}$ und nennen sie, wie in der Statik eines starren Körpers, den Hauptvektor der gegebenen Kräfte.

Es gilt:

$$\sum \mathrm{d}\, R_i = X \,\mathrm{d}\, x_o + Y \,\mathrm{d}\, y_o + Z \,\mathrm{d}\, z_o .$$

Diese Gleichung bedeutet, daß die Summe der elementaren Arbeiten der gegebenen Kräfte gleich der elementaren Arbeit ihres Hauptvektors $\mathfrak{F}$ ist, der im Punkte A angreift. Dasselbe Resultat kann man auch in folgender Form darstellen:

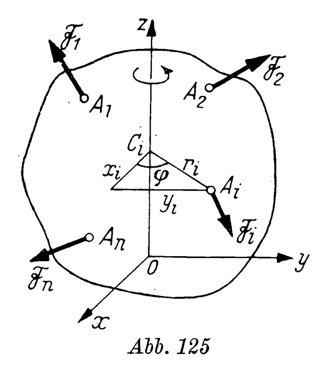


Abb. 125

$$\sum \mathrm{d}\, R_i = F \,\mathrm{d}\, s_o \cos (\mathfrak{F}, \mathrm{d}\, s_o),$$

wobei $\mathrm{d}s_0$ die elementare Verrückung des Punktes A ist.

Bei Berechnung der Summe der elementaren Arbeiten der an einem starren, sich fortschreitend bewegenden Körper angreifenden Kräfte kann man also diese durch ihren Hauptvektor ersetzen, der in einem beliebigen Punkte des Körpers angreift.

Hieraus folgt u. a., daß die Arbeit eines an einem starren, sich fortschreitend bewegenden Körper angreifenden Kräftepaares gleich Null ist.

2. *Die Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse.* An einem starren, um eine feste Achse rotierenden Körper greifen an den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ an (Abb. 125). Wir errechnen jetzt die Summe der elementaren Arbeiten $\sum \mathrm{d}\, R_i$ dieser Kräfte.

Zuerst wollen wir die elementare Arbeit $\mathrm{d}R_i$ der an dem Punkte A_i angreifenden Kraft $\mathfrak{F}_i$ berechnen. Wir wählen die rechtwinkligen Koordinatenachsen x, y und z und richten die z-Achse längs der Drehachse. Bezeichnen wir die Projektionen der Kraft $\mathfrak{F}_i$ auf diese Achsen mit X_i, Y_i, Z_i und die Koordinaten des Punktes A_i mit x_i, y_i, z_i, so erhalten wir

$$\mathrm{d}\, R_i = X_i \,\mathrm{d}\, x_i + Y_i \,\mathrm{d}\, y_i + Z_i \,\mathrm{d}\, z_i ,$$

wobei $\mathrm{d}x_i$, $\mathrm{d}y_i$ und $\mathrm{d}z_i$ die Zunahmen sind, welche die Koordinaten x_i, y_i und z_i bei einer elementaren Verrückung des Körpers erhalten haben.

Es liegt auf der Hand, daß im gegebenen Falle $\mathrm{d}z_i = 0$ ist. Ferner bezeichnen wir den Abstand $C_i A_i$ des Angriffspunktes der Kraft $\mathfrak{F}_i$ von der Drehachse mit r_i und den durch den Abschnitt C_iA_i mit der x-Achse gebildeten Winkel mit φ (der Winkel φ ist nichts anderes als der Drehwinkel des Körpers). Es gilt dann:

$$x_i = r_i \cos \varphi , \qquad y_i = r_i \sin \varphi .$$

Bei einer elementaren Verrückung des Körpers erhält der Drehwinkel φ den Zuwachs $\mathrm{d}\varphi$; die entsprechenden Zunahmen der Koordinaten x_i und y_i erhalten wir, wenn wir die vorhergehenden Gleichungen differenzieren:

$$\mathrm{d}\, x_i = - r_i \sin \varphi \,\mathrm{d}\, \varphi = - y_i \,\mathrm{d}\, \varphi , \qquad \mathrm{d}\, y_i = r_i \cos \varphi \,\mathrm{d}\, \varphi = x_i \,\mathrm{d}\, \varphi .$$

Auf diese Art ergibt sich:

$$\mathrm{d}\,R_i = -\,y_i X_i\,\mathrm{d}\,\varphi + x_i Y_i\,\mathrm{d}\,\varphi = (x_i Y_i - y_i X_i)\,\mathrm{d}\,\varphi\,.$$

Der Ausdruck $x_i Y_i - y_i X_i$ ist das Moment der Kraft $\mathfrak{F}_i$ in bezug auf die z-Achse; bezeichnen wir dieses Moment mit M_{iz}, so finden wir

$$\mathrm{d}\,R_i = M_{iz}\,\mathrm{d}\,\varphi\,.$$

Folglich ist die elementare Arbeit der am rotierenden Körper angreifenden Kraft gleich dem Moment dieser Kraft in bezug auf die Drehachse, multipliziert mit dem Zuwachs des Drehwinkels.

Hieraus finden wir für die Summe der elementaren Arbeiten unserer Kräfte den Ausdruck

$$\sum \mathrm{d}\,R_i = \sum M_{iz}\,\mathrm{d}\,\varphi = \mathrm{d}\,\varphi \sum M_{iz}\,.$$

Bezeichnen wir $\sum M_{iz} = M_z$ und nennen diese Summe, wie in der Statik des starren Körpers, das Hauptmoment der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ in bezug auf die z-Achse, so erhalten wir endgültig:

$$\sum \mathrm{d}\,R_i = M_z\,\mathrm{d}\,\varphi\,.$$

Die Summe der elementaren Arbeiten der an einem rotierenden starren Körper angreifenden Kräfte ist also gleich dem Hauptmoment dieser Kräfte in bezug auf die Drehachse, multipliziert mit dem Zuwachs des Drehwinkels.

Es versteht sich, daß es, wenn man dieses Resultat hat, leicht ist, die Summe der Arbeiten der an einem rotierenden Körper angreifenden Kräfte bei der Endverrückung dieses Körpers zu errechnen.

Wir nehmen an, daß sich der Drehwinkel φ bei der Rotation des Körpers von dem Wert φ_1 bis zum Wert φ_2 verändert. Dann wird die Summe der Arbeiten der gegebenen Kräfte bei der entsprechenden Verrückung des Körpers

$$\sum R_i = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z\,\mathrm{d}\,\varphi$$

sein.

Wenn am rotierenden Körper ein Kräftepaar in der Ebene angreift, die senkrecht zur Drehachse ist, dann ist die elementare Arbeit dieses Paares gleich $M\mathrm{d}\,\varphi$, wobei M das Moment des Paares ist; die Endarbeit des Paares wird durch das Integral

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\,\mathrm{d}\,\varphi$$

ausgedrückt.

3. *Der allgemeine Fall der Bewegung eines starren Körpers.* Wir stellen uns nun vor, daß die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ an einem starren Körper angreifen, der sich beliebig im Raume bewegt, und bilden die Summe der elementaren Arbeiten dieser Kräfte:

$$\sum \mathrm{d}\,R_i = \sum (X_i\,\mathrm{d}\,x_i + Y_i\,\mathrm{d}\,y_i + Z_i\,\mathrm{d}\,z_i)\,,$$

wobei X_i, Y_i und Z_i die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}_i$ auf den Achsen x, y, z und $\mathrm{d}x_i$, $\mathrm{d}y_i$, $\mathrm{d}z_i$ die Zunahmen der Koordinaten x_i, y_i, z_i des Angriffspunktes dieser Kraft bei einer elementaren Verrückung des Körpers sind (Abb. 126).

Aus der Kinematik ist bekannt, daß die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers in eine zusammen mit einem beliebigen Punkt des Körpers fortschreitende Bewegung und in die Rotation um diesen Punkt zerlegt werden kann. Wir wählen einen beliebigen Punkt A des Körpers und legen durch diesen Punkt die Achsen ξ, η, ζ, die parallel zu x, y, z sind und sich zusammen mit dem Punkte A fortschreitend bewegen. Bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes A in bezug auf die Achsen x, y, z mit x_0, y_0, z_0 und die Koordinaten des Angriffspunktes der Kraft $\mathfrak{F}_i$ in bezug auf die Achsen ξ, η, ζ mit ξ_i, η_i, ζ_i, so gilt

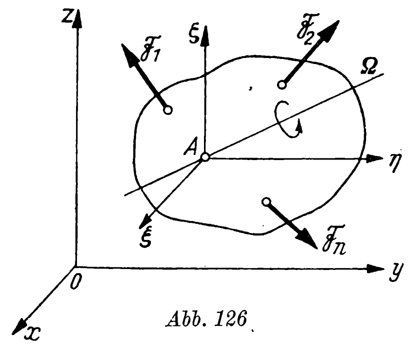


Abb. 126

$$x_i = x_o + \xi_i, \qquad y_i = y_o + \eta_i,$$
$$z_i = z_o + \zeta_i.$$

Hieraus folgt, daß

$$\mathrm{d}\,x_i = \mathrm{d}\,x_o + \mathrm{d}\,\xi_i, \qquad \mathrm{d}\,y_i = \mathrm{d}\,y_o + \mathrm{d}\,\eta_i,$$
$$\mathrm{d}\,z_i = \mathrm{d}\,z_o + \mathrm{d}\,\zeta_i$$

ist.

Die Zunahmen $\mathrm{d}x_0$, $\mathrm{d}y_0$ und $\mathrm{d}z_0$ entsprechen der fortschreitenden Verrückung des Körpers zusammen mit dem Punkte A, die Zunahmen $\mathrm{d}\xi_i$, $\mathrm{d}\eta_i$ und $\mathrm{d}\zeta_i$ aber entsprechen der Rotation des Körpers um den Punkt A. Setzen wir die soeben eingetragenen Größen $\mathrm{d}x_i$, $\mathrm{d}y_i$ und $\mathrm{d}z_i$ in den Ausdruck $\sum \mathrm{d}R_i$ ein, so erhalten wir

$$\sum \mathrm{d}\,R_i = \sum \left\{X_i(\mathrm{d}\,x_o + \mathrm{d}\,\xi_i) + Y_i(\mathrm{d}\,y_o + \mathrm{d}\,\eta_i) + Z_i(\mathrm{d}\,z_o + \mathrm{d}\,\zeta_i)\right\}$$

oder

$$\sum \mathrm{d}\,R_i = \sum (X_i\,\mathrm{d}\,x_o + Y_i\,\mathrm{d}\,y_o + Z_i\,\mathrm{d}\,z_o) + \sum (X_i\,\mathrm{d}\,\xi_i + Y_i\,\mathrm{d}\,\eta_i + Z_i\,\mathrm{d}\,\zeta_i).$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Summe der elementaren Arbeiten der an einem starren Körper angreifenden Kräfte in zwei Teile zerlegt werden kann, die der fortschreitenden Verrückung des Körpers zusammen mit einem beliebigen seiner Punkte und der Rotation des Körpers um diesen Punkt entsprechen. Wenn wir im Auge behalten, daß die Rotation des Körpers um den Punkt A im gegebenen Augenblick als Rotation um irgendeine momentane Achse Ω, die durch diesen Punkt hindurchgeht, angesehen werden kann, und wenn wir uns an die unter den Punkten 1 und 2 gewonnenen Resultate erinnern, finden wir

$$\sum \mathrm{d}\,R_i = F\,\mathrm{d}\,s_o \cos(\mathfrak{F}, \mathrm{d}\,s_o) + M_\Omega\,\mathrm{d}\,\alpha,$$

wobei $\mathfrak{F}$ der Hauptvektor der gegebenen Kräfte, M_Ω deren Hauptmoment in bezug auf die momentane Achse Ω, $\mathrm{d}s_0$ die elementare Verrückung des Punktes A und $\mathrm{d}\alpha$ der elementare Winkel der Drehung um die momentane Achse Ω ist.

Dieses Resultat gestattet die Folgerung, daß man bei der Berechnung der Arbeiten der an einem starren Körper angreifenden Kräfte die Kräfte nach den Regeln der Statik addieren kann, wenn man sie auf den an einem beliebigen Punkt des Körpers angreifenden Hauptvektor und auf das Hauptmoment zurückführt. Der Hauptvektor führt die Arbeit bei der Verrückung seines Angriffspunktes aus; das Kräftepaar aber, das dem Hauptmoment entspricht, arbeitet bei der drehenden Verrückung des Körpers.

§ 77. Das Pendelschlagwerk

Wir wollen nun die Gesetzmäßigkeiten der kinetischen Energie anwenden.

Zur Prüfung der Stoffe auf Kerbzähigkeit wird (außer Fallwerken anderer Systeme) das Pendelschlagwerk von CHARPY verwendet. Ein wesentlicher Bestandteil dieses Apparates besteht in einem massiven Pendel, das mit einem Stahlmesser m versehen ist und um die feste Achse O rotiert (Abb. 127). Der Versuch wird folgendermaßen ausgeführt. Man hebt das Pendel, indem man es von der Gleichgewichtslage um einen gewissen Winkel α ablenkt und setzt den zu prüfenden Versuchskörper n so ein, daß das Messer m ihn beim Durchgang des Pendels durch die senkrechte Lage berührt. Darauf läßt man das Pendel fallen. Im Fallen bekommt das Pendel eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit. Beim Durchgang durch die vertikale Lage zerbricht das Messer m den Versuchskörper n, wobei das Pendel einen Teil seiner Winkelgeschwindigkeit einbüßt. Danach setzt das Pendel seine Bewegung fort, bis es bei einem gewissen Abweichungswinkel β von der Vertikalen seine Bewegungsrichtung umkehrt. Wenn man den Winkel α kennt und durch Beobachtung den Winkel β bestimmt hat, kann man die Arbeit ermitteln, die für die Zerstörung des gegebenen Versuchskörpers verwendet wurde.

Abb. 127

Wir wollen die Gesetzmäßigkeiten der kinetischen Energie auf der soeben beschriebenen Bewegung des Pendels anwenden. In der Anfangslage des Pendels ist seine Winkelgeschwindigkeit gleich Null; in der Endstellung (wenn das Pendel von der Vertikalen um den Winkel β abgelenkt ist), ist seine Winkelgeschwindigkeit ebenfalls gleich Null. Folglich ist die kinetische Energie des Pendels in seiner Anfangs- und Endstellung gleich Null. Nach den Gesetzmäßigkeiten der kinetischen Energie folgt, daß die Summe der Arbeiten der vorgegebenen, am Pendel angreifenden Kräfte für den betrachteten Zeitraum auch gleich Null sein muß. Als vorgegebene Kräfte erscheinen das Gewicht $\mathfrak{P}$ des Pendels, das in seinem Schwerpunkt C angreift, und der Widerstand des Versuchskörpers, der auf das Pendel während der Zerstörung des Versuchskörpers wirkt. Die Arbeit der Schwerkraft ist gleich PH, wobei H die vertikale Verrückung des Schwerpunktes C ist; der Widerstand des Versuchskörpers aber führt die negative Arbeit $-R$ aus, wobei R die gesuchte Arbeit ist, die zum Bruch des Versuchskörpers verwendet wurde.

Also erhalten wir:

$$PH - R = 0 \qquad \text{oder} \qquad R = PH.$$

Wir bezeichnen CO mit a; in diesem Falle gilt:

$$H = a(\cos\beta - \cos\alpha).$$

Folglich erhalten wir endgültig:

$$R = P a (\cos \beta - \cos \alpha).$$

Wir wollen noch die Winkelgeschwindigkeit berechnen, die das Pendel im Augenblick der Berührung mit dem Versuchskörper besitzt.

Wir betrachten wieder die kinetische Energie des Pendels, und zwar vom Anfangsaugenblick der Bewegung an bis zum Augenblick des Zusammenstoßes mit dem Versuchskörper. Die kinetische Energie des Pendels ist im Anfangsaugenblick gleich Null; am Ende des betrachteten Zeitraumes ist sie gleich $\frac{1}{2} J \omega^2$, wobei J das Trägheitsmoment des Pendels in bezug auf die Drehachse O und ω die gesuchte Größe der Winkelgeschwindigkeit des Pendels im Augenblick des Zusammenstoßes mit dem Versuchskörper ist. Als wirkende Kraft erscheint jetzt die Schwerkraft $\mathfrak{P}$; ihre Arbeit ist gleich Ph, wobei h die vertikale Verrückung des Schwerpunktes C ist. Wir erhalten

$$\frac{1}{2} J \omega^2 = P h.$$

Es ist aber $h = a (1 - \cos \alpha)$. Folglich gilt

$$\frac{1}{2} J \omega^2 = P a (1 - \cos \alpha) = 2 P a \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

woraus

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{P a}{J}} \sin \frac{\alpha}{2}$$

folgt.

Wenn man $J = M r^2 = \frac{P}{g} r_I^2$ setzt, wobei r_I der Trägheitsradius des Pendels in bezug auf die Drehachse O ist, ergibt sich:

$$\omega = 2 \frac{\sqrt{g a}}{r_I} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

§ 78. Die Bewegung eines Radsatzes. Die rollende Reibung

Wir stellen uns einen Radsatz auf einem horizontalen Gleis vor. An der Achse des Radsatzes greift die der Größe nach konstante horizontale Kraft $\mathfrak{F}$ an (Abb. 128). Wir nehmen an, daß sich der Radsatz im Anfangsaugenblick in Ruhe befand. Wir wollen ermitteln, welche Geschwindigkeit das Radzentrum erhält, wenn es die Strecke s durchläuft.

Wir werden voraussetzen, daß unter der Wirkung der Kraft $\mathfrak{F}$ der Radsatz auf den Schienen ohne zu gleiten rollt. Im folgenden (im § 100) werden wir sehen, daß ein Gleiten der Räder auf den Schienen unvermeidlich ist, wenn die Größe der Kraft $\mathfrak{F}$ einen gewissen Grenzwert übersteigt. Wir werden daher voraussetzen, daß die Größe der Kraft $\mathfrak{F}$ kleiner als dieser Grenzwert ist.

Wir wollen die kinetische Energie bei der betrachteten Verrückung des Radsatzes ermitteln, bei der das Radzentrum die Strecke s durchläuft. In der Anfangsstellung (sie ist in Abb. 128 durch eine dünne Linie gekennzeichnet) ist die kinetische Energie des Satzes gleich Null. In der Endstellung hat der Schwerpunkt C des Radsatzes die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ (das ist die gesuchte Geschwindigkeit) und die Winkelgeschwindigkeit ω; die kinetische Energie des Radsatzes ist gleich

$$\frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} M (v^2 + r_I^2 \omega^2),$$

wobei M die Masse des Satzes, J und r_I das Trägheitsmoment und der Trägheitsradius des Satzes in bezug auf seine Achsen sind.

Vorgegebene Kräfte sind die Kraft $\mathfrak{F}$ und das Gewicht $\mathfrak{P}$ des Satzes. Zu den vorgegebenen Kräften muß auch die Reibungskraft $\mathfrak{T}$ zwischen dem Radsatz und den Schienen gezählt werden, die ein Gleiten der Räder auf den Schienen verhindert. Die Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}$ ist gleich Fs; die Arbeit der Schwerkraft ist gleich Null; die Arbeit der Reibungskraft $\mathfrak{T}$ ist ebenfalls gleich Null, da der Berührungspunkt des Rades mit der Schiene, in dem die Kraft $\mathfrak{T}$ angreift, das momentane Geschwindigkeitszentrum in der Bewegung des Rades ist.

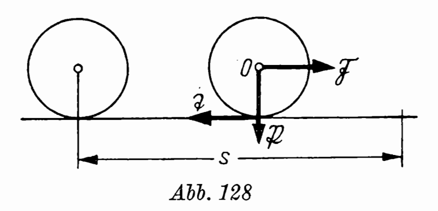


Abb. 128

Somit haben wir nach den Gesetzmäßigkeiten der kinetischen Energie

$$\frac{1}{2} M (v^2 + r_I^2 \omega^2) = F s .$$

Wir wollen nun erwähnen, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Radzentrums die Drehgeschwindigkeit um das momentane Geschwindigkeitszentrum ist, d. h. um den Berührungspunkt mit der Schiene. Folglich gilt, wenn wir den Radius mit a bezeichnen:

$$v = a\omega \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{v}{a}.$$

Wenn wir diesen Ausdruck für ω in die Gleichung einsetzen, erhalten wir:

$$\frac{1}{2} M \left(1 + \frac{r_I^2}{a^2}\right) v^2 = F s,$$

woraus

$$v = \sqrt{\frac{2 F s}{M\left(1 + \frac{r_I^2}{a^2}\right)}} = \sqrt{\frac{2 F g s}{P\left(1 + \frac{r_I^2}{a^2}\right)}}$$

folgt.

Wir wollen bemerken, daß man für einen Radsatz $r_I^2 = 0{,}55\, a^2$ setzen kann; in diesem Fall beträgt die kinetische Energie der rotierenden Bewegung des Radsatzes 0,55 der kinetischen Energie seiner fortschreitenden Bewegung zusammen mit dem Schwerpunkt.

Aus der soeben dargelegten Untersuchung könnte man die Schlußfolgerung ziehen, daß die kleinste Kraft $\mathfrak{F}$ genügt, um einem Radsatz, der sich ursprünglich in Ruhe befand, eine Bewegung mitzuteilen. Natürlich wird eine solche Schlußfolgerung von der Beobachtung nicht bestätigt. Der Grund dieses Fehlschlusses besteht darin, daß in der dargelegten Theorie ein Faktor außer acht gelassen ist, und zwar die „*rollende Reibung*", die auf das auf der Schiene rollende Rad wirkt.

Wenn ein Körper auf der Oberfläche eines anderen rollt, dann stellt sich die rollende Reibung in Form irgendeines Kräftepaares dar, das der Drehung des rollenden Körpers entgegenwirkt. Wir bezeichnen das Moment dieses Paares mit m und die normale Reaktion, die an dem rollenden Körper in seinem Berührungspunkt mit dem Körper, auf dessen Oberfläche er rollt, angreift, mit $\mathfrak{N}$. Führen wir die Bezeichnungen

$$\frac{m}{N} = k$$

ein, so ist

$$m = kN.$$

Die Größe k heißt *Koeffizient der rollenden Reibung* (bisweilen nennt man diese Größe auch den Koeffizienten der Wälzreibung). Es muß erwähnt werden, daß der Koeffizient k eine bestimmte Länge ist (k ist der Arm, den das Kräftepaar der rollenden Reibung hat, wenn die Kräfte dieses Paares gleich N sind). Wie Prüfungsforschungen zeigen, hängt der Koeffizient k nicht von der Größe der Reaktion N ab; er hat verschiedene Werte für verschiedene Stoffe. Für Stahlräder auf Stahlschienen kann man $k = 0{,}05$ cm annehmen.

Wir wollen aufs neue die Gleichung aufstellen, welche die Gesetzmäßigkeiten der kinetischen Energie bei der betrachteten Bewegung eines Radsatzes ausdrückt, wenn wir die rollende Reibung beachten. Da im gegebenen Falle $N = P$ ist, so ist das Moment dieses Kräftepaares gleich

$$m = kP.$$

Dieses Moment führt eine negative Arbeit aus, die gleich $-m\varphi$ ist, wobei φ der Winkel ist, um den sich das Rad in der Zeit dreht, während sein Zentrum die Strecke s durchläuft. Da $\varphi = \frac{s}{a}$ ist, erhalten wir für die Arbeit unseres Kräftepaares den Ausdruck

$$-m\frac{s}{a} = -\frac{kP}{a}s.$$

Es gilt:

$$\frac{1}{2}M\left(1 + \frac{r_I^2}{a^2}\right)v^2 = Fs - \frac{kP}{a}s.$$

Hieraus ist zu ersehen, daß der Radsatz sich nur in dem Falle zu bewegen beginnt wenn

$$F > \frac{kP}{a}$$

ist.

§ 79. Kräfte, die ein Potential besitzen. Die potentielle Energie eines Systems

Wir wollen uns ein materielles System $M_1, M_2, \ldots, M_n$ vorstellen (Abb. 129) und die an den Punkten dieses Systems angreifenden vorgegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ nennen. In Gedanken vernachlässigen wir alle im gegebenen System vorhandenen Zwangsbedingungen (natürlich wird sich eine solche Vernachlässigung der Zwangsbedingungen in keiner Weise auf die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auswirken). Die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ heißen dann *Kräfte, die ein Potential* (und zwar ein eindeutiges) *besitzen*, wenn sie folgende zwei Eigenschaften erfüllen:

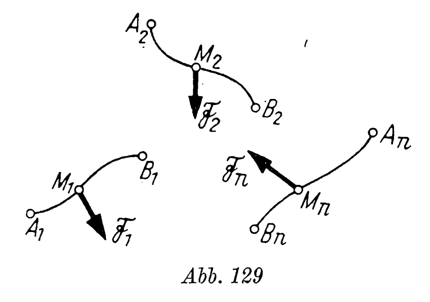


Abb. 129

1. Die Größe und Richtung jeder dieser Kräfte hängt nur von der *Lage* der Punkte des Systems ab. Dabei können die Größe und die Richtung irgendeiner Kraft $\mathfrak{F}_i$ nicht nur von der Lage ihrer Angriffspunkte M_i abhängen, sondern auch von der Lage aller übrigen Punkte des Systems.

2. Die Summe der Arbeiten der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bei irgendeiner Verrückung des Systems aus der Lage $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in die Lage $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *hängt nicht von den Kurven ab*, auf denen die Verrückung der einzelnen Systempunkte erfolgt.

Als Beispiel der Kräfte, die ein Potential besitzen, können die Schwerkräfte dienen, die auf die Punkte eines Systems einwirken. Ein anderes Beispiel für die ein Potential besitzenden Kräfte bilden die elastischen Kräfte, die auf die Punkte eines elastisch deformierten Körpers einwirken. Eine der Grundvoraussetzungen der Elastizitätstheorie besteht darin, daß (in den Elastizitätsgrenzen) diese Kräfte die zwei oben erwähnten Eigenschaften besitzen.

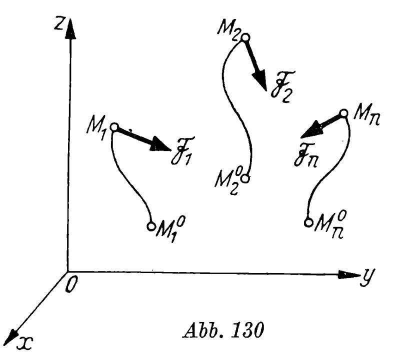


Abb. 130

Wenn sich ein System unter der Einwirkung von Kräften befindet, die ein Potential besitzen, kann man von der *potentiellen Energie* des Systems sprechen. Dieser Begriff wird folgendermaßen bestimmt:

Wir wollen uns ein materielles System $M_1, M_2, \ldots, M_n$ vorstellen (Abb. 130), das sich unter der Einwirkung der (ein Potential besitzenden) Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ befindet. Wir wählen irgendeine willkürliche Lage des Systems, die wir mit $M_1^0, M_2^0, \ldots, M_n^0$ bezeichnen und die Null-Lage des Systems nennen. Die potentielle Energie des Systems ist in jeder gegebenen Lage gleich der Summe der Arbeiten, die durch die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bei der Verrückung des Systems aus der gegebenen Lage in die Null-Lage geleistet wird.

Wenn wir von einer bestimmten Wahl der Null-Lage ausgehen, wird die potentielle Energie des Systems (wir bezeichnen sie mit V) nur von der Lage des Systems abhängen; in jeder Lage des Systems wird die potentielle Energie V einen ganz bestimmten Wert haben. Wir bestimmen die Lage der Systempunkte durch ihre Koordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n$ in bezug auf irgendwelche rechtwinkligen Koordinatenachsen x, y, z. In diesem Falle ist die potentielle Energie V eine Funktion, und zwar eine eindeutige dieser Koordinaten:

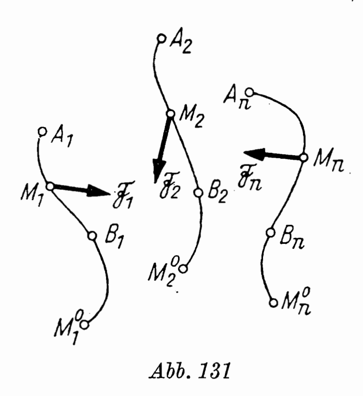


Abb. 131

$$V = V(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n).$$

Natürlich ist die potentielle Energie V in der Null-Lage gleich Null.

Wir haben gesehen, daß die Summe der Arbeiten der (ein Potential besitzenden) Kräfte nicht von den Kurven abhängt, längs denen die Verrückung der Systempunkte vor sich geht. Diese Summe der Arbeiten kann leicht durch die Werte der potentiellen Energie ausgedrückt werden, die den Lagen entsprechen, zwischen denen die Verrückung des Systems vor sich geht.

Wir nehmen an, daß das System $M_1, M_2, \ldots, M_n$, an dem die Potentialkräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ angreifen, sich aus der Lage $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in die Lage $B_1, B_2, \ldots, B_n$ verschiebt (Abb. 131). Der Kürze halber werden wir diese Lagen des Systems die Lage I und die Lage II nennen; wir wollen auch die Null-Lage $M_1^0, M_2^0, \ldots, M_n^0$ benennen. Wir ermitteln die Summe der Arbeiten der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ bei der Verrückung des Systems aus der Lage I in die Lage II (wir bezeichnen diese Summe der Arbeiten mit $\sum R_i$), indem wir die Summe der Arbeiten unserer Kräfte bei der Verrückung des Systems aus der Lage I in die Null-Lage und die Summe der Arbeiten derselben Kräfte bei der Verrückung des Systems aus der Lage II in die Null-Lage bestimmen. Die letzten zwei Summen der Arbeiten sind aber entsprechend gleich den Werten der potentiellen Energie in den Lagen I und II. Folglich erhalten wir, wenn wir die Werte der potentiellen Energie in den Lagen I und II mit V_1 und V_2 bezeichnen:

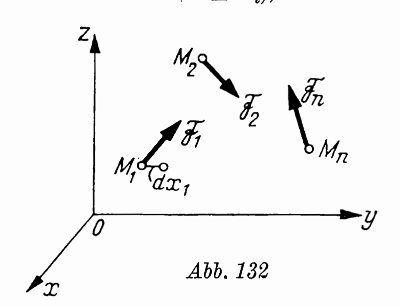


Abb. 132

$$\sum R_i = V_1 - V_2. \tag{1}$$

Wir wollen diese Beziehung bei der Berechnung der *Komponenten der ein Potential besitzenden Kräfte auf den Koordinatenachsen* anwenden.

Wir bezeichnen die Koordinaten des Punktes M_i in bezug auf die Koordinatenachsen x, y, z mit x_i, y_i, z_i und die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}_i$ auf denselben Achsen mit X_i, Y_i, Z_i (Abb. 132). Wir geben nun dem Punkte M_1 die elementare Verrückung dx_1 parallel der x-Achse, indem wir die Lage der übrigen Punkte des Systems unverändert lassen (wir erinnern daran, daß wir in Gedanken alle Zwangsbedingungen

zwischen den Systempunkten unberücksichtigt gelassen haben) und drücken die elementare Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}_1$ bei der Verrückung dx_1 einerseits nach der Gleichung

$$\mathrm{d}\,R_1 = X_1\,\mathrm{d}\,x_1 + Y_1\,\mathrm{d}\,y_1 + Z_1\,\mathrm{d}\,z_1$$

und andererseits nach der Gl. (1) aus.

Wenn wir beachten, daß im gegebenen Falle $\mathrm{d}y_1 = 0$ und $\mathrm{d}z_1 = 0$ ist, werden wir

$$X_1\,\mathrm{d}\,x_1 = V(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n) - V(x_1 + \mathrm{d}\,x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n)$$

erhalten.

Ferner gilt:

$$V(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n) - V(x_1 + \mathrm{d}\,x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n =$$
$$= -\left[V(x_1 + \mathrm{d}\,x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n) - V(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n)\right] = -\frac{\partial V}{\partial x_1}\,\mathrm{d}\,x_1 .$$

Folglich erhalten wir:

$$X_1\,\mathrm{d}\,x_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}\,\mathrm{d}\,x_1 ,$$

woraus sich

$$X_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}$$

ergibt. Ganz ebenso ergeben sich folgende Gleichungen:

$$X_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \qquad Y_i = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \qquad Z_i = -\frac{\partial V}{\partial z_i}.$$

Also sind die Projektionen der ein Potential besitzenden Kräfte auf die Koordinatenachsen gleich den negativen partiellen Ableitungen der potentiellen Energie nach den entsprechenden Koordinaten.

Die Funktion $V(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n)$ heißt die *Potentialfunktion* oder das *Potential.*

Die negative Potentialfunktion heißt die *Kraftfunktion.* Bezeichnen wir die Kraftfunktion mit $U(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n)$, so gilt

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n) = -V(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n).$$

Wenn wir in die Gleichungen für die Projektionen X_i, Y_i, Z_i anstatt der Potential- die Kraftfunktion einführen, erhalten wir:

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

d. h., die Komponenten X_i, Y_i, Z_i sind gleich den partiellen Ableitungen der Kraftfunktion nach den entsprechenden Koordinaten.

Die Summe der elementaren Arbeiten der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ kann in folgender Form dargestellt werden:

$$\sum \mathrm{d}\,R_i = \sum (X_i\,\mathrm{d}\,x_i + Y_i\,\mathrm{d}\,y_i + Z_i\,\mathrm{d}\,z_i)$$
$$= \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\,x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}\,\mathrm{d}\,y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i}\,\mathrm{d}\,z_i\right) = \mathrm{d}\,U .$$

Die Summe der elementaren Arbeiten der ein Potential besitzenden Kräfte ist also gleich dem totalen Differential der Kraftfunktion. Das ist ein analytisches Kennzeichen, das die ein Potential besitzenden Kräfte auszeichnet.

In der dargelegten Theorie ist die Kraftfunktion U eine eindeutige Funktion. Es sind aber Fälle möglich, in denen die Summe der elementaren Arbeiten der Kräfte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ ein totales Differential einer gewissen vieldeutigen Funktion ist. Dann sagt man, daß die gegebenen Kräfte ein vieldeutiges Potential besitzen. Mit solchen Fällen werden wir uns nicht befassen.

Zum Schluß wollen wir uns noch mit der Berechnung der potentiellen Energie eines Systems beschäftigen, das sich unter der Wirkung der Schwerkräfte befindet.

Abb. 133

Wir nehmen an, daß auf das System M_1, M_2, $\ldots$, M_n die Schwerkräfte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ einwirken (Abb. 133) und wählen die Koordinatenachsen x, y, z so, daß wir die Achsen x und y horizontal, die Achse z dagegen vertikal nach oben richten. Als Null-Lage wählen wir eine solche Lage des Systems, bei der sich alle Punkte des Systems in der xy-Ebene befinden. In diesem Fall ist die Arbeit der Kraft $\mathfrak{p}_i$ bei der Verrückung des Punktes M_i aus der gegebenen Lage in die Null-Lage gleich $p_i z_i$. Hieraus folgt, daß die potentielle Energie des Systems V in der gegebenen Lage gleich

$$V = p_1 z_1 + p_2 z_2 + \cdots + p_n z_n = \sum p_i z_i$$

ist.

Wir wissen aber, daß

$$\sum p_i z_i = P z_c.$$

ist, wobei P das Gewicht des ganzen Systems und z_c die vertikale Koordinate seines Schwerpunktes C ist. Folglich ist

$$V = P z_c$$

Also ist die potentielle Energie eines unter der Einwirkung der Schwerkräfte befindlichen Systems gleich dem Produkt aus dem Gewicht des Systems und der Höhe seines Schwerpunktes über dem Niveau der Null-Ebene.

§ 80. Der Energieerhaltungssatz

Wir wollen uns der Betrachtung einer Bewegung zuwenden, die ein materielles System unter der Einwirkung von Kräften, die ein (eindeutiges) Potential besitzen, ausführt.

Wir setzen voraus, daß alle vorgegebenen am System angreifenden Kräfte ein (eindeutiges) Potential besitzen; die potentielle Energie des Systems bezeichnen wir mit V. Alle Bindungen des Systems setzen wir als zweiseitig und ideell (und nicht von der Zeit abhängig) voraus. Wir nehmen an, daß das System im Laufe eines ge-

wissen Zeitraumes aus der einen Lage (wir nennen sie die Lage I) in die andere Lage (Lage II) übergeht. Bezeichnen wir die Werte der kinetischen Energie des Systems in den Lagen I und II mit T_1 und T_2, die Summe der Arbeiten der vorgegebenen Kräfte bei der Verrückung des Systems aus der Lage I in die Lage II aber mit $\sum R_i$, so gilt nach den Gesetzmäßigkeiten der kinetischen Energie

$$T_2 - T_1 = \sum R_i .$$

Andererseits kann, da die vorgegebenen Kräfte ein Potential besitzen, die Summe ihrer Arbeiten in der Form

$$\sum R_i = V_1 - V_2$$

dargestellt werden, wobei V_1 und V_2 die Werte der potentiellen Energie des Systems in den Lagen I und II sind. Folglich ist

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2 .$$

Hieraus folgt, daß

$$T_2 + V_2 = T_1 + V_1$$

ist, d. h., in den Lagen I und II hat die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie des Systems ein und denselben Wert.

Die Lagen I und II waren aber von uns vollständig willkürlich gewählt worden. Folglich ist

$$T + V = \text{const} .$$

Diese Gleichung drückt das *Gesetz der Energieerhaltung* oder den *Energieerhaltungssatz* aus, den wir folgendermaßen formulieren können: Bei der Bewegung eines Systems, das sich unter der Wirkung von Kräften befindet, die ein (eindeutiges) Potential besitzen, und das zweiseitigen und ideellen (nicht von der Zeit abhängigen) Bindungen unterworfen ist, ist *die Summe seiner kinetischen und potentiellen Energie eine konstante Größe.*

Hieraus folgt, daß jede Vergrößerung der potentiellen Energie eines Systems von einer entsprechenden Verringerung seiner kinetischen Energie begleitet sein muß und umgekehrt. Wenn die Bewegung eines Systems eine solche ist, daß das System nach Ablauf eines gewissen Zeitraumes in seine Ausgangslage zurückkehrt, nachdem es einen gewissen Bewegungskreislauf ausgeführt hat, dann kehrt die potentielle Energie des Systems am Schluß dieses Kreislaufes gleichfalls zu ihrem ursprünglichen Werte zurück. Auf Grund des Gesetzes der Energieerhaltung müssen wir schließen, daß in einem solchen Falle auch die kinetische Energie, die das System besitzt, nachdem sie in ihre Ausgangslage zurückgekehrt ist, gleich jener kinetischen Energie ist, mit der das System aus dieser Lage herausgegangen war. Für die Zeit eines vollen Kreislaufes kann es weder einen Gewinn noch einen Verlust an kinetischer Energie geben.

Das Gesetz der Energieerhaltung ist hier in seiner Anwendung auf mechanische Erscheinungen dargestellt. Wir erwähnen, daß die Summe der kinetischen und potentiellen Energie eines Systems die *volle mechanische Energie* des Systems genannt wird. Die Ausdehnung des Gesetzes der Energieerhaltung auf beliebige physikalische Erscheinungen gehört nicht in den Rahmen dieses Lehrbuches.

§ 81. Die kinetische Energie einer Maschine. Das reduzierte Trägheitsmoment und die reduzierte Masse

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir uns mit der Anwendung der Gesetze der kinetischen Energie bei der Erforschung der Bewegung einer Maschine befassen. Wenn die Maschine ein System mit einem Freiheitsgrade darstellt (und das ist bei der Mehrzahl der vorhandenen Maschinen der Fall), dann genügt zur Bestimmung der Bewegung der Maschine eine Gleichung; diese Gleichung erhält man aus den Gesetzmäßigkeiten der kinetischen Energie.

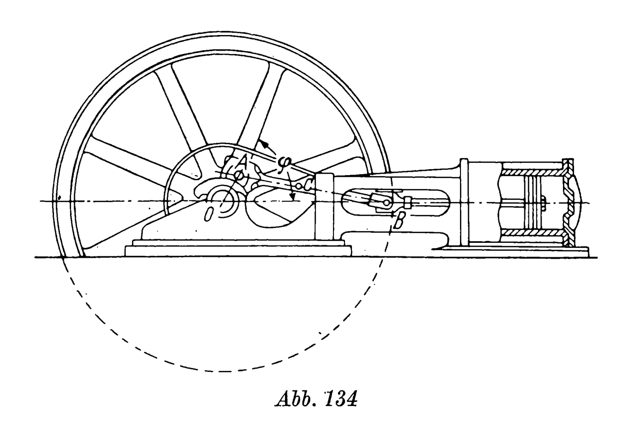


Abb. 134

Wir wollen uns zuerst der Berechnung der kinetischen Energie einer Maschine zuwenden. Die kinetische Energie einer Maschine setzt sich aus den kinetischen Energien ihrer einzelnen Teile zusammen. In der Mehrzahl der Fälle führen die einzelnen Teile oder Glieder einer Maschine Bewegungen von dreierlei Art aus; entweder sie bewegen sich fortschreitend, oder sie rotieren um eine feste Achse, oder sie führen eine eben-parallele Bewegung aus. Die kinetische Energie eines jeden Gliedes muß nach den im § 75 aufgestellten Gleichungen errechnet werden.

Wir untersuchen z. B. den Kurbelmechanismus einer Dampfmaschine (Abb. 134). Die kinetische Energie dieser Maschine setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie T_1 der Hauptwelle mit dem Schwungrad und der Kurbelwelle, der kinetischen Energie T_2 des Kolbensystems, der Kolbenstange und des Kreuzkopfes und der kinetischen Energie T_3 der Kurbelstange. Diese drei Glieder der Maschine führen eine rotierende bzw. fortschreitende und eben-parallele Bewegung aus. Wir wollen die Größen T_1, T_2 und T_3 berechnen.

Wir bezeichnen das Trägheitsmoment der Hauptwelle mit dem Schwungrade und der Kurbel (in bezug auf ihre Drehachse) mit J_1, die Größe der Winkelgeschwindigkeit der Hauptwelle mit ω. Dann ist

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega^2 .$$

Ferner bezeichnen wir die Masse des Kolbens, der Kolbenstange und des Kreuzkopfes mit M_2 und die Größe der Geschwindigkeit des Kolbens mit v_2. Damit ergibt sich

$$T_2 = \frac{1}{2} M_2 v_2^2.$$

Schließlich bezeichnen wir die Masse der Kurbelstange mit M_3, ihr Trägheitsmoment in bezug auf die Achse, die durch ihren Schwerpunkt C hindurchgeht (und senkrecht auf der Abbildungsebene steht), mit J_3, die Größe der Geschwindigkeit des Punktes C mit v_3, die Größe der Winkelgeschwindigkeit der Kurbelstange mit ω_3. Wir erhalten dann

$$T_3 = \frac{1}{2} M_3 v_3^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2.$$

Wenn wir alles addieren, erhalten wir die kinetische Energie T der ganzen Maschine:

$$T = \frac{1}{2} J_1 \omega^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 + \frac{1}{2} M_3 v_3^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2.$$

Wir wollen diesen Ausdruck in folgender Form darstellen:

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \left[J_1 + M_2 \left(\frac{v_2}{\omega} \right)^2 + M_3 \left(\frac{v_3}{\omega} \right)^2 + J_3 \left(\frac{\omega_3}{\omega} \right)^2 \right]$$

und die Bezeichnung

$$\Theta = J_1 + M_2 \left(\frac{v_2}{\omega} \right)^2 + M_3 \left(\frac{v_3}{\omega} \right)^2 + J_3 \left(\frac{\omega_3}{\omega} \right)^2$$

einführen.

Dann gewinnen wir für die kinetische Energie der ganzen Maschine den einfachen Ausdruck

$$T = \frac{1}{2} \Theta \omega^2.$$

Hieraus ersieht man, daß die kinetische Energie einer ganzen Maschine stets in Form der kinetischen Energie irgendeiner fiktiven Masse dargestellt werden kann, die um die Hauptwelle rotiert, deren Trägheitsmoment gleich Θ ist. Diese Größe heißt das *reduzierte Trägheitsmoment* der Maschine.

Wir wollen erwähnen, daß die Verhältnisse $\frac{v_2}{\omega}$, $\frac{v_3}{\omega}$ und $\frac{\omega_3}{\omega}$, die im Ausdruck Θ enthalten sind, einen ganz bestimmten Wert in jeder gegebenen Stellung des Mechanismus haben; dabei ist der Wert dieser Größen verschieden in den verschiedenen Stellungen des Mechanismus. Mit anderen Worten, die erwähnten Verhältnisse werden als Funktionen des Drehwinkels φ der Hauptwelle dargestellt. Hieraus folgt, daß auch das reduzierte Trägheitsmoment Θ eine Funktion des Drehwinkels φ ist:

$$\Theta = \Theta(\varphi).$$

Da nach einer vollen Umdrehung der Hauptwelle alle Teile des Mechanismus in ihre ursprüngliche Lage zurückkehren, nimmt auch das reduzierte Trägheitsmoment Θ seinen ursprünglichen Wert nach Ablauf einer vollen Umdrehung der Hauptwelle an, d. h.

$$\Theta(\varphi + 2\pi) = \Theta(\varphi).$$

Das bedeutet, daß Θ (φ) eine periodische Funktion des Winkels φ mit der Periode 2π ist.

Wir haben die kinetische Energie der ganzen Maschine in Form der kinetischen Energie einer fiktiven rotierenden Masse dargestellt. Man kann noch weiter gehen und die kinetische Energie der ganzen Maschine auf die kinetische Energie eines materiellen Punktes zurückführen.

Wir führen die Bezeichnungen

$$\mu = \frac{\Theta}{r^2}$$

ein, wobei r die Länge der Kurbel OA ist. Setzen wir $\Theta = \mu r^2$, so gilt:

$$T = \frac{1}{2} \mu r^2 \omega^2.$$

Andererseits ist $r\omega = v$, wobei v die Geschwindigkeit des Punktes A ist. Folglich ist

$$T = \frac{1}{2} \mu v^2.$$

Hieraus folgt, daß die kinetische Energie der ganzen Maschine gleich der kinetischen Energie der im Kurbelzapfen A konzentrierten fiktiven Masse μ ist. Diese fiktive Masse μ heißt die *reduzierte Masse* der Maschine. Natürlich ist die reduzierte Masse keine konstante Größe. Ebenso wie das reduzierte Trägheitsmoment ist die reduzierte Masse eine Funktion (und zwar eine periodische mit der Periode 2π) des Winkels φ.

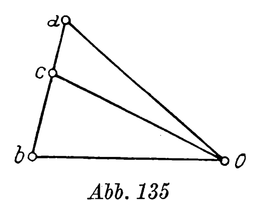


Abb. 135

Zur Ermittlung des reduzierten Trägheitsmomentes Θ kann man mit Erfolg die Konstruktion eines Geschwindigkeitsplanes benutzen.

Wir wollen den Geschwindigkeitsplan für unseren Kurbelmechanismus konstruieren (Abb. 135). Wenn man diesen Geschwindigkeitsplan hat, ist es leicht, die Größen $\frac{v_2}{\omega}$, $\frac{v_3}{\omega}$ und $\frac{\omega_3}{\omega}$ zu ermitteln. Wir bezeichnen, wie oben, die Größe der Geschwindigkeit des Punktes A mit v und setzen $OA = r$, $AB = l$. Im Geschwindigkeitsplan haben wir

$$v_2 = ob, \qquad v_3 = oc.$$

Ferner sind die Abschnitte oa und ab im Geschwindigkeitsplan gleich den Größen der Geschwindigkeit v des Punktes A bzw. der Rotationsgeschwindigkeit v_{ab} des Punktes B um den Punkt A; da $v = r\omega$ und $v_{ab} = l\omega_3$ ist, so ist

$$\omega = \frac{oa}{r}, \qquad \omega_3 = \frac{ab}{l}.$$

Hieraus folgern wir:

$$\frac{v_2}{\omega} = r\frac{ob}{oa}, \qquad \frac{v_3}{\omega} = r\frac{oc}{oa}, \qquad \frac{\omega_3}{\omega} = \frac{r}{l}\cdot\frac{ab}{oa}.$$

Konstruieren wir den Geschwindigkeitsplan für verschiedene Stellungen des Mechanismus (d. h. für verschiedene Werte des Drehwinkels φ), so finden wir die Werte der Verhältnisse $\frac{v_2}{\omega}$, $\frac{v_3}{\omega}$ und $\frac{\omega_3}{\omega}$ und folglich auch die Werte des reduzierten Trägheitsmomentes Θ für verschiedene Werte von φ. Danach können wir punktweise die Kurve ermitteln, welche die Abhängigkeit Θ von φ angibt.

Da sich die reduzierte Masse μ von dem reduzierten Trägheitsmoment Θ nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet, wird auf die angegebene Weise auch die reduzierte Masse der Maschine ermittelt.

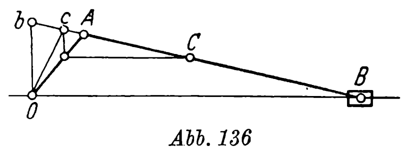


Abb. 136

Durch dieses Verfahren kann das reduzierte Trägheitsmoment jeder Maschine ermittelt werden, deren einzelne Glieder eine eben-parallele Bewegung ausführen. Im speziellen Fall eines Kurbelmechanismus kann der Aufbau noch bedeutend vereinfacht werden.

Wir wollen den Maßstab des Geschwindigkeitsplanes so wählen, daß der Abschnitt oa in Abb. 135 gleich dem Abschnitt OA in Abb. 136 ist, und den Geschwindigkeitsplan in dieselbe Zeichnung eintragen, in der der Mechanismus selbst dargestellt ist. Wir legen den Abschnitt OA mit dem Abschnitt oa so übereinander, daß die Punkte o und a entsprechend mit den Punkten O und A zusammenfallen (Abb. 136); dann ist die Seite ob des Dreiecks oab senkrecht zu der Geraden OB; die Seite ab aber liegt auf einer Geraden mit dem Abschnitt AB. Hieraus folgt, daß es zum Aufbau eines Geschwindigkeitsplanes genügt, den Abschnitt AB bis zum Schnitt mit der Senkrechten zu verlängern, die im Punkte O zu der Geraden OB errichtet ist. Das Dreieck OAB ist dann der Geschwindigkeitsplan. Um den Punkt c zu erhalten, genügt es, von C aus eine Gerade zu ziehen, die parallel der Geraden OB ist, bis zum Schnitt mit OA und von dem Schnittpunkt aus eine Gerade zu ziehen, die senkrecht zu OB ist, bis zum Schnitt mit der Geraden Ab. Der auf diese Art gefundene Punkt ist der Punkt c.

Wenn wir die in Abb. 136 angegebene Konstruktion ausgeführt haben, erhalten wir

$$\frac{v_2}{\omega} = Ob, \qquad \frac{v_3}{\omega} = Oc, \qquad \frac{\omega_3}{\omega} = \frac{Ab}{l}.$$

Die Längen Ob, Oc und Ab müssen im gleichen Maßstab gemessen werden, in dem die Zeichnung des Mechanismus konstruiert ist.

§ 82. Die Arbeit der Kräfte in Maschinen. Das Drehmoment und das Reibungsmoment

Die in Maschinen wirkenden vorgegebenen Kräfte kann man in folgende drei Gruppen einteilen:

1. Kräfte, die eine positive Arbeit ausführen (z. B. der Dampfdruck auf einen Kolben im Zylinder einer Dampfmaschine); diese Kräfte heißen *Treibkräfte.*

2. Kräfte, die eine negative Arbeit ausführen und *Widerstände* genannt werden. Die Widerstände werden ihrerseits in *Nutzwiderstände*, zu deren Überwindung die Maschine bestimmt ist (z. B. der Widerstand einer durch die Maschine zu hebenden Last, der Widerstand einer durch die Maschine in Bewegung gesetzten Werkbank), und Nebenwiderstände, die *schädliche Widerstände* genannt werden (Reibungskräfte, Luftwiderstand), eingeteilt.

3. Schwerkräfte der einzelnen Maschinenteile, die abwechselnd bald eine positive, bald eine negative Arbeit ausführen.

Wir wollen uns mit der Berechnung der Arbeit der Treibkräfte beschäftigen. Wir stellen die Summe der elementaren Arbeiten der Treibkräfte während des unendlich kleinen Zeitraumes $\mathrm{d}t$ auf. Bezeichnen wir die Treibkräfte mit $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte mit $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_n$ und die Verrückungen dieser Punkte während der Zeit $\mathrm{d}t$ mit $\mathrm{d}s_1, \mathrm{d}s_2, \ldots, \mathrm{d}s_n$, so ergibt sich für die Arbeit der Ausdruck:

$$\sum F_i \,\mathrm{d}s_i \cos(\mathfrak{F}_i \mathfrak{v}_i).$$

Da $\mathrm{d}s_i = v_i \,\mathrm{d}t$ ist, kann diese Arbeit in der Form

$$\sum F_i v_i \cos(\mathfrak{F}_i \mathfrak{r}_i)\,\mathrm{d}t$$

dargestellt werden.

Wir vertauschen diese Summe der Arbeiten der Treibkräfte mit der Arbeit eines fiktiven Kräftepaares, das an der Hauptwelle der Maschine angreift. Es ist leicht, das Moment dieses Paares zu berechnen. Bezeichnen wir dieses Moment mit M (und setzen voraus, daß das Paar in der zu der Achse der Hauptwelle senkrechten Ebene liegt), so erhalten wir für die elementare Arbeit des Paares den Ausdruck

$$M\,\mathrm{d}\varphi = M\omega\,\mathrm{d}t,$$

wobei $\mathrm{d}\varphi$ der Zuwachs des Drehwinkels der Hauptwelle während der Zeit $\mathrm{d}t$ und ω die Größe der Winkelgeschwindigkeit der Hauptwelle ist. Setzen wir die Arbeit des Paares gleich der Summe der Arbeiten der Treibkräfte, so erhalten wir:

$$M\omega\,\mathrm{d}t = \sum F_i v_i \cos(\mathfrak{F}_i, \mathfrak{r}_i)\,\mathrm{d}t,$$

woraus

$$M = \sum F_i \frac{v_i}{\omega} \cos(\mathfrak{F}_i, \mathfrak{r}_i)$$

folgt.

Diese Größe M heißt das *Drehmoment.* Also ist die Summe der Arbeiten der Treibkräfte gleich der Arbeit des Drehmoments. In den meisten Fällen haben die Größen $F_i \cos(\mathfrak{F}_i, \mathfrak{v}_i)$ in jeder gegebenen Stellung der Maschine vollständig bestimmte Werte,

d. h., sie sind Funktionen des Drehwinkels φ der Hauptwelle (wir erinnern uns an das Indikator-Diagramm, das die Abhängigkeit des Dampfdruckes im Zylinder einer Dampfmaschine von der Lage des Kolbens oder, was dasselbe ist, vom Drehwinkel der Hauptwelle liefert). Im vorhergehenden Paragraphen haben wir gesehen, daß die Verhältnisse $\frac{v_i}{\omega}$ gleichfalls Funktionen des Drehwinkels φ sind. Hieraus folgt, daß auch das Drehmoment M als Funktion des Winkels φ dargestellt werden kann:

$$M = M(\varphi).$$

Die Summe der Arbeiten der Treibkräfte bei der Endbewegung der Maschine, bei welcher der Winkel φ sich in den Grenzen von $\varphi = \varphi_1$ bis $\varphi = \varphi_2$ verändert, wird durch das Integral

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \, d\varphi$$

ausgedrückt.

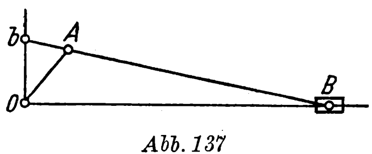


Abb. 137

Die Größen der Verhältnisse $\frac{v_i}{\omega}$ können mit Hilfe eines Geschwindigkeitsplanes gewonnen werden, wie das im vorhergehenden Paragraphen gezeigt worden ist. In der Abb. 137 ist die Ermittlung des Drehmomentes gezeigt, das durch den Dampfdruck F auf den Kolben im Zylinder der Dampfmaschine hervorgerufen ist. Bezeichnen wir die Größe der Geschwindigkeit des Kolbens (wie im vorhergehenden Paragraphen) mit v_2, so gilt

$$M = F \frac{v_2}{\omega}.$$

Andererseits haben wir gesehen, daß

$$\frac{v_2}{\omega} = Ob$$

ist, wobei die Länge Ob in gleichem Maßstabe gemessen werden muß, in dem die Zeichnung der Maschine konstruiert ist. Folglich ist

$$M = F \cdot Ob.$$

Alle dargelegten Erwägungen können auch zur Berechnung der Arbeit der Widerstände verwendet werden. Die Summe der Arbeiten der Widerstände kann auch durch die Arbeit irgendeines fiktiven Kräftepaares (mit negativem Moment), das an der Hauptwelle der Maschine angreift, ersetzt werden. Das Moment dieses Paares bezeichnen wir mit W und nennen es das *Reibungsmoment*. Die Summe der Arbeiten der Widerstände bei der Bewegung der Maschine, die der Veränderung des Drehwinkels φ der Hauptwelle von φ_1 bis φ_2 entspricht, wird durch das Integral

$$-\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W \, d\varphi$$

ausgedrückt.

Was die Schwerkräfte anbetrifft, so ist, wenn wir die ihnen entsprechende potentielle Energie mit V bezeichnen:

$$V = P z,$$

wobei P das Gewicht der ganzen Maschine und z die vertikale Koordinate ihres Schwerpunktes ist (die z-Achse rechnen wir als vertikal nach oben gerichtet). Wenn bei der Bewegung der Maschine die Koordinate z sich in den Grenzen von z_1 bis z_2 verändert, ist die Summe der Arbeiten gleich

$$P(z_1 - z_2).$$

§ 83. Die Bewegungsgleichung einer Maschine. Die stationäre Bewegung einer Maschine. Die Unmöglichkeit eines perpetuum mobile

Wir wollen nun das Gesetz der kinetischen Energie auf die Bewegung einer Maschine anwenden.

Wir wählen zwei Stellungen der sich bewegenden Maschine. Die diesen Stellungen entsprechenden Werte des Drehwinkels φ der Hauptwelle werden wir φ_0 und φ nennen, die Winkelgeschwindigkeiten der Hauptwelle in diesen Stellungen bezeichnen wir mit ω_0 und ω und die Werte der vertikalen Koordinate z des Schwerpunktes der Maschine mit z_0 und z. Wenn wir die Gesetzmäßigkeiten der kinetischen Energie bei der Bewegung des Systems aus der ersten Stellung in die zweite anwenden, erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\,\Theta(\varphi)\omega^2 - \frac{1}{2}\,\Theta(\varphi_0)\,\omega_0^2 = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}(M - W)\,\mathrm{d}\,\varphi + P(z_0 - z).$$

Durch diese Gleichung wird die Winkelgeschwindigkeit der Hauptwelle für einen beliebigen Wert des Winkels φ bestimmt, d. h. für eine beliebige Stellung der Maschine. Diese Gleichung heißt die *Bewegungsgleichung der Maschine.*

Wir wenden die gewonnene Gleichung auf eine volle Umdrehung der Hauptwelle an, d. h., wir setzen $\varphi = \varphi_0 + 2\,\pi$. Wir sehen, daß der Schwerpunkt der Maschine nach einer vollen Umdrehung der Hauptwelle in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt; es ist dann $z = z_0$, und folglich ist die Arbeit der Schwerkräfte während einer vollen Umdrehung der Hauptwelle gleich Null. Behalten wir im Auge, daß $\Theta\ (\varphi_0 + 2\,\pi) = \Theta\ (\varphi_0)$ ist, so erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\,\Theta(\varphi_0)(\omega^2 - \omega_0^2) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi}(M - W)\,\mathrm{d}\,\varphi.$$

Eine solche Bewegung der Maschine, bei der die Winkelgeschwindigkeit nach einer vollen Umdrehung der Hauptwelle zu ihrem ursprünglichen Wert zurückkehrt, heißt stationäre Bewegung einer Maschine[1]. Wenn wir in der vorhergehenden Gleichung

[1] Wir meinen hier Maschinen, in welchen das Drehmoment eine periodische Funktion des Winkels φ mit der Periode $2\,\pi$ ist (eine Dampfmaschine u. a.). Die stationäre Bewegung eines Viertakt-Gasmotors (bei dem das Drehmoment die Periode $4\,\pi$ hat) wird dadurch charakterisiert, daß die Winkelgeschwindigkeit der Hauptwelle nach je zwei Umdrehungen der Welle zu ihrem ursprünglichen Werte zurückkehrt.

$\omega = \omega_0$ annehmen, erhalten wir die Bedingung für die stationäre Bewegung der Maschine:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} (M - W)\, d\varphi = 0.$$

Also ist es notwendig, damit die Bewegung einer Maschine stationär ist, daß die Summe der Arbeiten der Treibkräfte und der Widerstände während einer vollen Umdrehung der Hauptwelle gleich Null ist. Wenn diese Summe der Arbeiten größer als Null ist, d. h., wenn die Arbeit der Treibkräfte während einer Umdrehung der Hauptwelle größer als die Arbeit der Widerstände ist, dann wächst mit jeder Umdrehung der Hauptwelle ihre Winkelgeschwindigkeit; im entgegengesetzten Falle nimmt sie ab.

In der von uns gewonnenen Bedingung der stationären Bewegung einer Maschine zeigt sich die Unmöglichkeit der Lösung der berühmten Aufgabe vom perpetuum mobile, die im Laufe mehrerer Jahrhunderte viele Erfinder beschäftigt hat. Unter der Bezeichnung perpetuum mobile (d. h. eine sich ewig bewegende Maschine) verstand man eine Maschine, die imstande war, sich auf stationäre Art zu bewegen, ohne daß zum Antrieb irgendwelche Treibkräfte erforderlich wären, und die gleichzeitig die Nutzwiderstände überwinden, d. h. eine nützliche Arbeit vollbringen würde. Sehr zahlreich waren die Versuche, eine solche Maschine zu bauen; die meiste Aufmerksamkeit zog seinerzeit das Rad von Orphireus auf sich, das von diesem Erfinder im ersten Viertel des 18. Jahrhunderts gebaut und später von ihm vernichtet wurde. Alle Versuche blieben erfolglos. Aus der Bedingung der stationären Bewegung einer Maschine wird die Unmöglichkeit eines perpetuum mobile klar. Damit sich eine Maschine auf stationäre Art bewegt, ist das Vorhandensein von Treibkräften erforderlich, die eine positive Arbeit ausführen, die der negativen Arbeit der nützlichen und schädlichen Widerstände gleich ist. Selbst wenn die Maschine gar keine Nutzwiderstände überwindet, sind Treibkräfte zur Erhaltung der stationären Bewegung notwendig, da die schädlichen Widerstände nicht zu beseitigen sind. Beim Fehlen von Treibkräften muß eine Maschine, die in Bewegung gesetzt ist, unter der Wirkung schädlicher Widerstände unausbleiblich stehenbleiben.

KAPITEL XIV

DER SCHWERPUNKTSATZ

§ 84. Der Schwerpunktsatz

Im § 74 haben wir mit *Trägheitszentrum* des materiellen Systems $M_1, M_2, \ldots, M_n$ den Punkt C bezeichnet, dessen Koordinaten x_c, y_c, z_c, bezogen auf die Koordinatenachsen x, y, z, durch die Gleichungen

$$x_c = \frac{\Sigma m_i x_i}{M}, \qquad y_c = \frac{\Sigma m_i y_i}{M}, \qquad z_c = \frac{\Sigma m_i z_i}{M} \tag{1}$$

bestimmt werden, wobei m_i die Masse des Punktes M_i und y_i, x_i, z_i die Koordinaten desselben Punktes sowie $M = \Sigma m_i$ die Masse des ganzen Systems sind.

Im § 71 wurde bereits erwähnt, daß wir, wenn wir Zähler und Nenner in den Gln. (1) mit g multiplizieren, diese Gleichungen in der Form

$$x_c = \frac{\Sigma p_i x_i}{P}, \qquad y_c = \frac{\Sigma p_i y_i}{P}, \qquad z_c = \frac{\Sigma p_i z_i}{P}$$

darstellen können, wobei p_i das Gewicht des Punktes M_i und P das Gewicht des ganzen Systems ist. Hieraus folgt, daß das Trägheitszentrum des Systems mit seinem Schwerpunkt zusammenfällt.

An der gleichen Stelle wurde erwähnt, daß die Gln. (1) gleichwertig der Vektor-Gleichung

$$\mathfrak{r}_c = \frac{\Sigma m_i \mathfrak{r}_i}{M} \tag{2}$$

sind, wobei $\mathfrak{r}_i$ und $\mathfrak{r}_c$ die Radius-Vektoren sind, die von dem Koordinatenursprung aus nach dem Punkt M_i bzw. nach dem Trägheitszentrum des Systems C gezogen sind.

Wenn das System in Bewegung ist, verschiebt sich im allgemeinen sein Trägheitszentrum im Raum. Die Bewegung des Trägheitszentrums des Systems ist einem einfachen Gesetz unterworfen. Wir wollen jetzt dieses Gesetz ermitteln.

Wir stellen uns das sich bewegende System $M_1, M_2, \ldots, M_n$ vor (Abb. 138). Wir wissen, daß man alle auf die Punkte des Systems wirkenden Kräfte auf zweierlei Art in zwei Gruppen einteilen kann: entweder in äußere und innere Kräfte, oder in vorgegebene Kräfte und Zwangskräfte. Bei den Untersuchungen, mit denen wir uns bis jetzt beschäftigt haben, erwies es sich als bequem, die Kräfte in vorgegebene Kräfte und Zwangskräfte einzuteilen; beim Aufstellen des uns jetzt interessierenden Gesetzes der Bewegung des Trägheitszentrums erscheint es zweckmäßiger, alle Kräfte in äußere und innere einzuteilen. Also legen wir, unter Benutzung der im § 56 festgesetzten Bezeichnungen, die Resultierenden $\mathfrak{F}_1^E, \mathfrak{F}_2^E, \ldots, \mathfrak{F}_n^E$ aller an den Punkten unseres Systems angreifenden äußeren Kräfte und die Resultierenden $\mathfrak{F}_1^J, \mathfrak{F}_2^J, \ldots, \mathfrak{F}_n^J$ aller an denselben Punkten wirkenden inneren Kräfte fest.

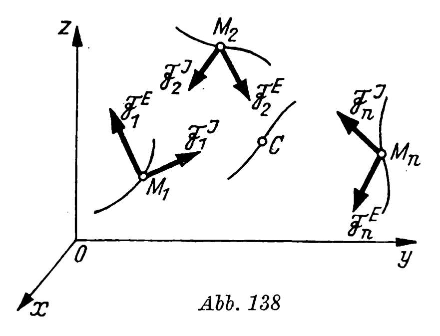


Abb. 138

Wenn wir beide Teile der Gl. (2) mit M multiplizieren, erhalten wir

$$M \mathfrak{r}_c = \sum m_i \mathfrak{r}_i .$$

Wir differenzieren nun diese Gleichung zweimal nach der Zeit t:

$$M \frac{d^2 \mathfrak{r}_c}{d t^2} = \sum m_i \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{d t^2} .$$

Wir wissen, daß die Vektor-Ableitung eines Radius-Vektors nach der Zeit gleich der Geschwindigkeit des Punktes und die Vektor-Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit gleich der Beschleunigung ist; folglich ergibt sich, wenn wir die Beschleunigung des Punktes M_i mit $\mathfrak{w}_i$ und die Beschleunigung des Trägheitszentrums C mit $\mathfrak{w}_c$ bezeichnen:

$$\frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{d t^2} = \mathfrak{w}_i , \qquad \frac{d^2 \mathfrak{r}_c}{d t^2} = \mathfrak{w}_c .$$

Die vorhergehende Gleichung nimmt folgende Form an:

$$M \mathfrak{w}_c = \sum m_i \mathfrak{w}_i .$$

Andererseits gilt, wenn wir die Grundgleichung der Dynamik für den Punkt M_i aufschreiben:

$$m_i \mathfrak{w}_i = \mathfrak{F}_i^E + \mathfrak{F}_i^J$$

und folglich

$$M \mathfrak{w}_c = \sum \mathfrak{F}_i^E + \sum \mathfrak{F}_i^J ,$$

wobei die Summation auf alle Punkte des Systems ausgedehnt ist.

Wir bemerken nun, daß die zweite, im rechten Teil der letzten Gleichung stehende Summe gleich Null ist. Die inneren Kräfte sind, da sie die Wechselwirkung zwischen je zwei Systempunkten darstellen, auf Grund des Axioms „die Kraft ist gleich der Gegenkraft" paarweise der Größe nach gleich und längs einer Geraden nach entgegengesetzten Seiten gerichtet. Hieraus folgt, daß ihre Summe und damit natürlich auch die Summe der Resultierenden $\mathfrak{F}_i^J$ gleich Null ist. Somit ist

$$\sum \mathfrak{F}_i^J = 0 .$$

Auf diese Art erhalten wir endgültig:

$$M \mathfrak{w}_c = \sum \mathfrak{F}_i^E . \tag{3}$$

Durch diese Gleichung wird die Beschleunigung des Trägheitszentrums des Systems bestimmt. Es ist leicht zu sehen, daß diese Gleichung die Form der Grundgleichung der Dynamik hat, die für einen materiellen Punkt aufgestellt ist, dessen Masse gleich M ist und an dem alle äußeren Kräfte $\mathfrak{F}_1^E, \mathfrak{F}_2^E, \ldots, \mathfrak{F}_n^E$ angreifen. Hieraus folgt, *daß sich das Trägheitszentrum des Systems wie ein materieller Punkt bewegt, in dem die Masse des ganzen Systems konzentriert ist und an dem alle äußeren Kräfte angreifen. Das ist das Gesetz für die Bewegung des Trägheitszentrums* oder der *Schwerpunktsatz.*

Projizieren wir beide Teile der Gl. (3) auf die Achsen x, y, z und bezeichnen die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}_i^E$ auf diesen Achsen mit X_i^E, Y_i^E und Z_i^E, so gilt:

$$M \ddot{x}_c = \sum X_i^E ,$$

$$M \ddot{y}_c = \sum Y_i^E ,$$

$$M \ddot{z}_c = \sum Z_i^E .$$

Durch diese Gleichungen, welche die Form von Differentialgleichungen der Bewegung eines materiellen Punktes haben, wird die Bewegung des Trägheitszentrums des Systems bestimmt. Diese Gleichungen heißen *Differentialgleichungen der Bewegung des Trägheitszentrums.*

Also müssen wir, wenn wir die Bewegung des Trägheitszentrums oder des Schwerpunktes irgendeines Körpers oder eines Systems von Körpern untersuchen wollen, uns vorstellen, daß in diesem Punkte die Masse des ganzen Körpers oder des ganzen Systems von Körpern konzentriert ist, und in Gedanken an diesem Punkt alle äußeren Kräfte angreifen lassen. Nunmehr können wir zur Lösung der erhaltenen Aufgabe alle die Verfahren anwenden, die im Abschnitt I beim Studium der Bewegung eines materiellen Punktes dargelegt wurden. Alle Resultate, die in dem der Dynamik eines materiellen Punktes gewidmeten Abschnitt I festgestellt wurden, sind, streng genommen, nur bei der Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes anwendbar, d. h. eines materiellen Teilchens von winzig kleinen Abmessungen. Wir haben jedoch bei der Anwendung beständig diese Resultate bei Körpern von endlichen Abmessungen benutzt. In welchem Maße und in welchen Grenzen ist dies zulässig? In welchem Falle kann man die Maße eines Körpers als genügend klein ansehen, um das Recht zu haben, denselben als materiellen Punkt zu behandeln? Wir wollen uns mit diesen Fragen befassen.

Wir wollen uns einen sich fortschreitend bewegenden Körper vorstellen. In diesem Falle wird die Bewegung des ganzen Körpers voll und ganz durch die Bewegung seines Schwerpunktes bestimmt. Wenn wir die Aufgabe von der Bewegung des Schwerpunktes eines Körpers auf Grund des von uns festgestellten Gesetzes als Aufgabe von der Bewegung irgendeines materiellen Punktes lösen, erhalten wir damit die Lösung der Frage der Bewegung des ganzen Körpers. Folglich sind wir im gegebenen Fall bei der Untersuchung der Bewegung eines Körpers berechtigt, ihn als materiellen Punkt zu behandeln, wenn wir voraussetzen, daß die ganze Masse des Körpers in seinem Schwerpunkt konzentriert ist. Ein solcher Ablauf der Lösung wird durch den Schwerpunktsatz vorgeschrieben.

Wenn der Körper sich nicht fortschreitend bewegt, kann seine Bewegung in eine fortschreitende Bewegung zusammen mit dem Schwerpunkt und in die Rotation um den Schwerpunkt zerlegt werden. Der fortschreitende Teil der Bewegung wird wieder voll und ganz durch die Bewegung des Schwerpunktes selbst bestimmt. Folglich haben wir bei der Erforschung dieses fortschreitenden Teiles der Bewegung das Recht, auf Grund des Schwerpunktsatzes den ganzen Körper als materiellen Punkt zu behandeln, wenn wir in Gedanken die ganze Masse des Körpers als im Schwerpunkt konzentriert denken. Wenn wir so vorgehen, machen wir keinen Fehler; dann bleibt der rotierende Teil der Bewegung übrig, der eine besondere Untersuchung erfordert. Hieraus ist ersichtlich, daß es in den Fällen zulässig ist, einen Körper von endlichen Ausmaßen als materiellen Punkt zu betrachten, in denen der fortschreitende Teil der Bewegung des Körpers die hauptsächliche Bedeutung hat, und in dem Maße, in dem eine Vernachlässigung der Rotation des Körpers um seinen Schwerpunkt erlaubt ist. Somit hängt die Lösung der Frage, ob der gegebene Körper als materieller Punkt betrachtet werden kann, nicht von seinen Ausmaßen, sondern vom Charakter seiner Bewegung und vom Charakter der gestellten Aufgabe ab. Die Sonne und die Planeten kann man als materielle Punkte (wie es in der Astronomie geschieht) bei der Unter-

suchung ihrer fortschreitenden Bewegungen behandeln; dieses Verfahren ist beim Studium der rotierenden Bewegungen der Himmelskörper unzulässig.

Wir sehen, daß der Schwerpunktsatz der Dynamik eines materiellen Punktes die Anwendung auf Körper von endlichen Maßen festlegt. Darin besteht die große prinzipielle Bedeutung dieses Gesetzes.

Zum Abschluß wollen wir noch einmal unterstreichen, daß beim Aufstellen des Schwerpunktsatzes alle inneren Kräfte automatisch eliminiert sind. Das Trägheitszentrum eines Systems ist nicht von der Wirkung der inneren Kräfte abhängig. Wir wissen bereits, welch eine praktische Bedeutung die Gewinnung solcher Abhängigkeiten besitzt, aus denen alle inneren Kräfte ausgeschlossen sind. In dieser Eliminierung der inneren Kräfte besteht praktisch der Wert des Schwerpunktsatzes.

§ 85. Einige Anwendungen des Schwerpunktsatzes

Wir wollen uns ein materielles System vorstellen, auf dessen Punkte nur innere Kräfte einwirken; ein solches System, an dem keine äußeren Kräfte angreifen, kann man ein „isoliertes" System nennen. Auf Grund des Schwerpunktsatzes können wir behaupten, daß sich das Trägheitszentrum des Systems bei Fehlen von äußeren Kräften wie ein materieller Punkt bewegen muß, an dem keinerlei Kräfte angreifen. Folglich bewegt sich das Trägheitszentrum eines isolierten Systems geradlinig und gleichförmig oder bleibt in Ruhe. Ein Beispiel für ein System, in dem es nur innere Kräfte der Wechselwirkung gibt, stellt das Sonnensystem dar (die Anziehungskräfte von Seiten der unbeweglichen Sterne, die in bezug auf das System äußere Kräfte sind, kann man vernachlässigen). Hieraus folgt, daß sich das Trägheitszentrum des Sonnensystems im Sternenraum geradlinig und gleichförmig bewegt. Die Beobachtungen der scheinbaren Bewegung der Sterne haben gezeigt, daß sich das Trägheitszentrum des Sonnensystems in der Richtung auf einen Punkt des Himmelsgewölbes, der sich im Sternbild des „Herkules" befindet, mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 18 km in der Sekunde hinbewegt.

Wir stellen uns einen schräg zur Horizontalen geworfenen Stein vor, der fliegt und sich dabei gleichzeitig um seinen Schwerpunkt dreht. Wir werden den Luftwiderstand vernachlässigen, dann sind die einzigen äußeren Kräfte, die auf die Teilchen des Steines einwirken, die Schwerkräfte. Nach dem Schwerpunktsatz muß sich der Schwerpunkt des Steines wie ein materieller Punkt unter der Einwirkung der Schwerkraft bewegen; wir folgern, daß sich der Schwerpunkt des Steines auf einer parabolischen Bahn bewegen muß. Die Bewegungsbahnen aller übrigen Punkte des Steines sind bedeutend komplizierter. Das kommt daher, daß sich die Teilchen des Steines unter der Einwirkung der Schwerkraft und der inneren Kräfte bewegen, welche sie von seiten der benachbarten Teilchen verspüren. Auf die Bewegung des Trägheitszentrums haben aber die inneren Kräfte keinerlei Einfluß.

Wenn der Flug eines Geschosses in einem luftleeren Raum vor sich ginge, würde der Schwerpunkt des Geschosses eine Parabel beschreiben. In Wirklichkeit bewegt er sich unter der Einwirkung der Schwerkraft und des Widerstandes auf einer anderen Bewegungsbahn (sie heißt die ballistische Kurve). Wir wollen uns vorstellen, daß in

einem bestimmten Augenblick die Detonation des Geschosses erfolgt. Im Augenblick der Detonation entstehen zwischen den Geschoßteilchen sehr große Kräfte. Diese Kräfte aber gehören zu den inneren Kräften, und wir wissen, daß innere Kräfte keinen Einfluß auf die Bewegung des Trägheitszentrums ausüben. Hieraus folgt, daß der Schwerpunkt des Geschosses die erfolgte Detonation nicht empfindet. Die Splitter, in die das Geschoß zersprengt wird, fliegen so auseinander, daß ihr gemeinsamer Schwerpunkt fortfährt, sich auf der Kurve zu bewegen, die der Schwerpunkt des Geschosses vor dem Augenblick der Detonation beschrieben hat (wenn man den Umstand vernachlässigt, daß die Wirkung des Luftwiderstandes auf die Splitter eine andere ist als seine Wirkung auf das ganze Geschoß).

Wenn ein Turner einen Sprung macht, beschreibt sein Schwerpunkt unter der Wirkung der Schwerkraft eine parabolische Bewegungsbahn. Durch keinerlei Körperbewegung kann der Turner während des Fluges diese parabolische Bewegung verändern; er kann die Bewegung seines Schwerpunktes nur dann beeinflussen, wenn er irgend einen äußeren Gegenstand berührt.

Wir wollen die Bewegung einer Lokomotive vom Gesichtspunkt des Schwerpunktsatzes betrachten. Der Schwerpunkt einer Lokomotive kann nur durch äußere Kräfte in Bewegung gesetzt werden, die an der Lokomotive dort angreifen, wo sie mit äußeren Körpern in Berührung kommt, d. h. in den Berührungspunkten der Räder mit den Schienen. An den Berührungspunkten der Triebräder (d. h. der Räder, die durch die Dampfmaschine in Bewegung gesetzt werden) mit den Schienen greifen in Richtung der Bewegung der Lokomotive wirkende Reibungskräfte an den Triebrädern an. Diese Reibungskräfte setzen den Schwerpunkt der Lokomotive in Bewegung. Eine auf absolut glatte Schienen gestellte Lokomotive könnte sich nicht von der Stelle rühren.

Ebenso kann beim Bremsen eines Zuges die Verlangsamung der Bewegung seines Schwerpunktes nicht durch Reibungskräfte zwischen den Rädern und den Bremsklötzen herbeigeführt werden, da dies innere Kräfte sind. Beim Bremsen entwickeln sich Reibungskräfte zwischen den gebremsten Rädern und den Schienen. Diese Reibungskräfte sind entgegengesetzt der Bewegung des Zuges gerichtet; sie sind es, die an dem Zuge angreifen.

Im Kapitel XVI werden wir uns ausführlicher mit der Dynamik der Bewegung von Schienenfahrzeugen beschäftigen.

§ 86. Die biegsame Welle der Turbine von DE LAVAL. Die kritische Winkelgeschwindigkeit

Wenn der Schwerpunkt eines rotierenden Körpers (z. B. eines Schwungrades) sich nicht auf der geometrischen Drehachse befindet, dann entstehen (wie ausführlicher im Kapitel XVIII klargestellt werden wird) bei der Rotation zentrifugale Trägheitskräfte, die bestrebt sind, die Welle zu verbiegen, auf die der rotierende Körper aufgesetzt ist. Diese Kräfte rufen, wenn sie durch Vermittlung der Lager auf den Maschinenstand übertragen werden, eine Erschütterung der ganzen Maschine hervor. Da die Zentrifugalkräfte proportional dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit der Rotation anwachsen, können sie bei einer sehr schnellen Rotation Werte erreichen, die für

die Dauerfestigkeit der Maschine gefährlich werden. Deshalb ist eine möglichst genaue Auswuchtung der schnellrotierenden Körper notwendig. Es ist natürlich unmöglich, eine absolut genaue Auswuchtung zu erreichen, und bei sehr rascher Rotation muß man mit der Möglichkeit des Auftretens gefährlicher zentrifugaler Trägheitskräfte rechnen.

Mit einem solchen Falle sehr rascher Rotation haben wir es bei der Dampfturbine von DE LAVAL zu tun. Das Rad dieser vom erwähnten schwedischen Ingenieur im Jahre 1884 erfundenen Turbine hat eine Drehzahl bis 30000 U/min. Um gegen die schädliche Wirkung der Trägheitskräfte anzukämpfen, die infolge einer unvollständigen Zentrierung des Rades erscheinen, hat DE LAVAL zu einem Mittel gegriffen, das

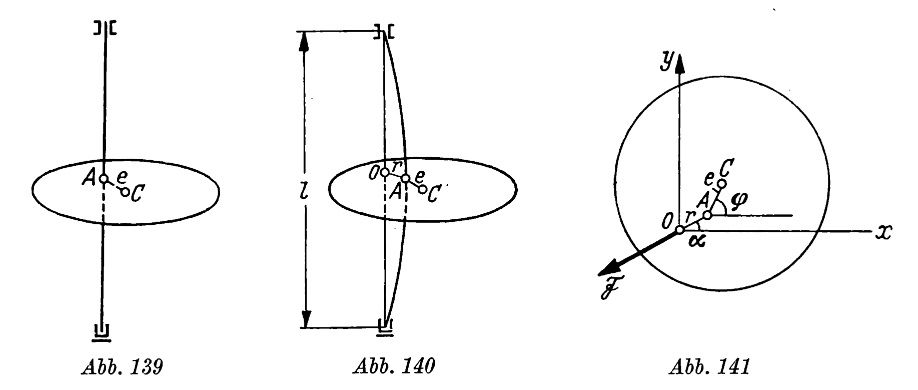


Abb. 139 *Abb. 140* *Abb. 141*

auf den ersten Blick paradox erscheint: Anstatt den Durchmesser der Welle zu vergrößern, hat er ihn verringert, indem er das Laufrad der Turbine auf eine dünne biegsame Welle von Fingerstärke setzte. Es erwies sich, daß das auf die biegsame Welle gesetzte Turbinenrad bei einer sehr raschen Rotation die bemerkenswerte Eigenschaft der *Selbstzentrierung* erwirbt. Bei einer sehr großen Winkelgeschwindigkeit der Rotation biegt sich die biegsame Welle gerade so, daß sich der Schwerpunkt des Rades der geometrischen Rotationsachse nähert.

Wenn wir die Aufgabe schematisieren, stellen wir uns eine horizontale runde Scheibe vor, die auf eine vertikale biegsame Welle aufgesetzt ist (Abb. 139). Wir setzen voraus, daß sich der Schwerpunkt C der Scheibe nicht auf der Wellenachse befindet; seinen Abstand AC von der Wellenachse nennen wir die Exzentrizität der Scheibe und bezeichnen sie mit e. Natürlich ist diese Größe e sehr klein (Bruchteile eines Millimeters); die Verbiegung der Welle, die davon herrührt, daß das Gewicht der Scheibe nicht an die Wellenachse angelegt ist, werden wir vernachlässigen. Nun setzen wir voraus, daß die Welle zusammen mit der Scheibe gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert (wir setzen voraus, daß an der Welle ein Drehmoment wirkt, das zur Überwindung der Reibungswiderstände in den Lagern und zur Erhaltung ihrer gleichförmigen Rotation notwendig ist). Bei der Rotation wird sich die Welle verbiegen (Abb. 140). Der Einfachheit halber wollen wir voraussetzen, daß die Scheibe auf dem mittleren Punkt der Welle aufgesetzt ist; dann wird bei verbogener Welle die Ebene der Scheibe horizontal bleiben. Wir wollen die Größe der Durchbiegung (wir bezeichnen sie mit r) der verbogenen Welle ermitteln.

Wir vermerken in der Scheibenebene den Punkt O, in dem sich diese Ebene mit der geometrischen Drehachse schneidet, sowie den Punkt A, in dem sich die Scheibenebene mit der verbogenen Wellenachse schneidet (Abb. 141). Der Abschnitt $OA = r$ ist die gesuchte Durchbiegung der Welle. Wir ziehen in der Scheibenebene durch den festen Punkt O die Koordinatenachsen x und y und bezeichnen die Koordinaten des Punktes A mit x und y. Wir werden die Größe der Durchbiegung r kennen, wenn es uns gelingt, die Koordinaten x und y zu bestimmen. Diese Koordinaten können wir ermitteln, indem wir auf die Bewegung der Scheibe den Schwerpunktsatz anwenden.

Wir bezeichnen die Koordinaten des Schwerpunktes G der Scheibe mit x_c und y_c. An der Scheibe greifen zwei äußere Kräfte an: die Schwerkraft $\mathfrak{P}$ und die Reaktion der Welle, die im Punkte A wirkt. Die Reaktion der Welle setzt sich ihrerseits aus der vertikalen Komponente, die gleich dem Gewicht der Scheibe $\mathfrak{P}$ ist, und der horizontalen Komponente $\mathfrak{F}$ zusammen, die nach dem Punkte O gerichtet ist; die Größe der Reaktion $\mathfrak{F}$ ist proportional der Durchbiegung r, d. h. $\mathfrak{F} = cr$, wobei c ein konstanter Koeffizient ist. Da sich die Welle wie ein Träger auf zwei Stützen verbiegt (Abb. 140), ist

$$c = \frac{48\,E J}{l^3},$$

wobei E der Elastizitätsmodul, J das Trägheitsmoment des Wellenquerschnittes und l die Länge der Welle ist.

Wir stellen die Differentialgleichung der Bewegung des Trägheitszentrums C unserer Scheibe auf. Bezeichnen wir die Masse der Scheibe mit M und den durch den Abschnitt OA mit der x-Achse gebildeten Winkel mit α, so gilt:

$$M\,\ddot{x}_c = -F\cos\alpha; \qquad M\,\ddot{y}_c = -F\sin\alpha.$$

Setzen wir hier $F = cr$ und beachten wir, daß

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad \sin\alpha = \frac{y}{r}$$

ist, so erhalten wir:

$$M\,\ddot{x}_c = -c\,x, \qquad M\,\ddot{y}_c = -c\,y. \tag{1}$$

Wir bezeichnen den durch den Abschnitt $AC = e$ mit der x-Achse gebildeten Winkel mit φ, und zwar ist φ nichts anderes als der Drehwinkel der rotierenden Scheibe. Da die Scheibe gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, ist $\varphi = \omega\,t$. Aus der Zeichnung lesen wir ab:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= x + e\cos\varphi = x + e\cos\omega\,t, \\ y_c &= y + e\sin\varphi = y + e\sin\omega\,t. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Wir eliminieren mit Hilfe dieser Beziehungen die Koordinaten x_c und y_c aus den Gln. (1). Differenzieren wir die Gln. (2) gliedweise zweimal nach der Zeit t, so erhalten wir:

$$\ddot{x}_c = \ddot{x} - \varepsilon\,\omega^2\cos\omega\,t; \qquad \ddot{y}_c = \ddot{y} - e\,\omega^2\sin\omega\,t.$$

Setzen wir diese Ausdrücke für $\ddot{x}_c$ und $\ddot{y}_c$ in die Gln. (1) ein, so gilt:

$$M\ddot{x} - M e\omega^2 \cos\omega t = -cx, \qquad M\ddot{y} - M e\omega^2 \sin\omega t = -cy$$

oder

$$\ddot{x} + \frac{c}{M} x = e\omega^2 \cos\omega t, \qquad \ddot{y} + \frac{c}{M} y = e\omega^2 \sin\omega t.$$

Wir haben hiermit Differentialgleichungen gewonnen, durch welche die Koordinaten x und y bestimmt werden, und zwar sind es Gleichungen von einer uns gut bekannten Form: Wir haben es bereits mit Differentialgleichungen dieser Form im Kapitel VII beim Studium der erzwungenen Schwingungen eines materiellen Punktes zu tun gehabt; die Lösung dieser Gleichungen ist dort im § 35 dargelegt. Erinnern wir uns dieser Lösung und führen der Kürze halber die Bezeichnung

$$\frac{c}{M} = k^2$$

ein, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 \sin(kt + \beta_1) + \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2} \cos\omega t, \\ y &= a_2 \sin(kt + \beta_2) + \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2} \sin\omega t, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wobei a_1, β_1, a_2, β_2 beliebige Konstanten sind.

Diese willkürlichen Konstanten hängen von den Anfangsbedingungen ab. Wir nehmen an, daß die Anfangsbedingungen so geartet sind, daß $a_1 = 0$ und $a_2 = 0$ ist. Dann wird die Bewegung des Punktes A durch die Gleichungen

$$x = \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2} \cos\omega t, \qquad y = \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2} \sin\omega t \tag{4}$$

bestimmt.

Wir wollen zuerst diesen einfachsten Fall betrachten; in diesem Fall erhalten wir für die Durchbiegung der Welle den Ausdruck

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2}. \tag{5}$$

Gleichzeitig erhalten wir, wenn wir $x = r\cos\alpha$ und $y = r\sin\alpha$ in die Gln. (4) einsetzen, nach Kürzung durch r:

$$\cos\alpha = \cos\omega t, \qquad \sin\alpha = \sin\omega t,$$

daher $\alpha = \omega t = \varphi$. Hieraus folgt, daß die Punkte O, A und C auf einer Geraden liegen; diese Gerade rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig um den Punkt O. Der Abstand $OC = \varrho$ des Scheibenschwerpunktes von der geometrischen Drehachse ist gleich

$$\varrho = r + e = \frac{e\omega^2}{k^2 - \omega^2} + e = \frac{ek^2}{k^2 - \omega^2}. \tag{6}$$

Bei $\omega < k$ haben wir $0 < r < \varrho$; das bedeutet, daß sich der Punkt A zwischen den Punkten O und C befindet (Abb. 142). Wenn $\omega > k$, dann gilt $r < \varrho < 0$. Dem negativen Werte der Durchbiegung r entspricht die Durchbiegung der Welle nach der Seite, die der Richtung des Abschnittes AC entgegengesetzt ist; der Schwerpunkt C liegt zwischen den Punkten A und O (Abb. 143). Bei $\omega = \infty$ erhalten wir $r = -e$ und $\varrho = 0$, d. h., der Schwerpunkt C befindet sich auf der geometrischen Rotationsachse. *Bei einer unendlich großen Winkelgeschwindigkeit zentriert sich also die auf die biegsame Welle gesetzte Scheibe automatisch.*

Wir bemerken, daß bei $\omega = k$ die Gl. (5) $r = \infty$ ergibt, was der Resonanzerscheinung in der Theorie der erzwungenen Schwingungen eines materiellen Punktes entspricht. Diese Winkelgeschwindigkeit, bei der man sehr große, für die Dauerfestigkeit der Welle gefährliche Durchbiegungen erwarten muß, heißt die *kritische Winkelgeschwindigkeit* der biegsamen Welle. Bezeichnen wir die kritische Winkelgeschwindigkeit mit ω_{kr} und erinnern uns der Bedeutung k, so haben wir

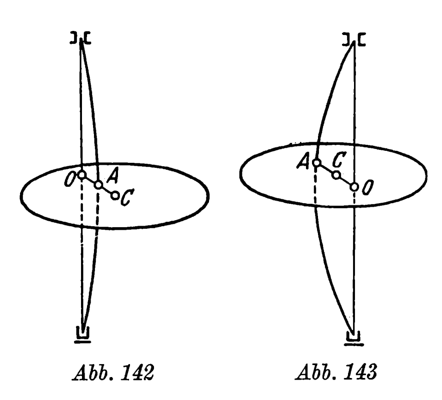


Abb. 142 *Abb. 143*

$$\omega_{\text{kr}} = \sqrt{\frac{c}{M}}.$$

In der Abbildung 144 ist die Abhängigkeit der Durchbiegung r von der Winkelgeschwindigkeit ω graphisch dargestellt.

Wir haben den einfachsten Fall betrachtet, bei dem die Durchbiegung der Welle durch die Gln. (4) bestimmt wird. Wir wenden uns nun den allgemeineren Gln. (3) zu. Diese Gleichungen unterscheiden sich von den Gln. (4) durch Glieder, die von den freien Schwingungen der Welle abhängen. Im allgemeinen Fall liegen die Punkte O, A und C nicht auf einer Geraden; das einfache Bild der Bewegung einer Scheibe, das wir beim Analysieren der Gln. (4) erhielten, wird sich infolge der freien Schwingungen der biegsamen Welle verzerren. Wir wissen aber, daß die unvermeidlichen Dämpfungen (die in der dargelegten Theorie nicht beachtet werden) zu einem raschen Erlöschen der freien Schwingungen führen. Hieraus folgt, daß in den Gln. (3) die den freien Schwingungen der Welle entsprechenden Glieder keine wesentliche Bedeutung haben; bei beliebigen Anfangsbedingungen vollzieht sich die Bewegung der Scheibe in den Grundzügen wie oben beschrieben. Nur in der Nähe der Resonanz muß man, wie wir wissen, bedeutende freie Schwingungen erwarten. Dementsprechend müssen wir bemerkbare Schwingungen der Welle dann erwarten, wenn die Winkelgeschwindigkeit nahe der kritischen ist. In der Nähe der kritischen Winkelgeschwindigkeit „schlägt" die Welle.

Wir haben gesehen, daß sich eine volle Zentrierung einer auf eine biegsame Welle gesetzten Scheibe bei einer unendlich großen Winkelgeschwindigkeit ergibt. In der Turbine von de Laval wird die biegsame Welle so gewählt, daß die normale Winkelgeschwindigkeit der Turbine ungefähr 7 mal größer als die kritische ist.

Setzen wir $\omega = 7\,k$ in die Gl. (6) ein, so erhalten wir $\varrho = \frac{e}{48}$, d. h., in diesem Fall verringert sich der Fehler in der Zentrierung des Turbinenrades 48 mal. Die Turbinenwelle ist mit einer Stoppvorrichtung versehen, die bedeutende Durchbiegungen der Welle verhindert; diese Vorrichtung gestattet, gefahrlos durch die kritische Winkelgeschwindigkeit beim Anlassen der Turbine und bei ihrer Stillsetzung zu fahren.

Zum Abschluß wollen wir die gewonnenen Resultate bei einem Zahlenbeispiel anwenden.

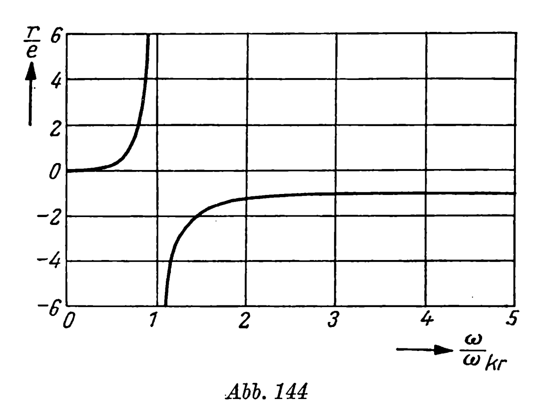


Abb. 144

Wir nehmen an, daß das Gewicht des Turbinenrades $P = 20$ kg, die Wellenlänge $l = 60$ cm, die normale Winkelgeschwindigkeit $\omega = 10000$ U/min beträgt. Wir wollen errechnen, bei welchem Durchmesser d der Welle die normale Winkelgeschwindigkeit der Turbine um 7 mal größer als die kritische sein wird.

Nach der Bedingung ist:

$$\omega_{\mathrm{kr}} = \frac{\omega}{7} = \frac{10\,000}{7}\ \mathrm{U/min} = \frac{10\,000\,\pi}{7 \cdot 30}\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 150\,\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Andererseits haben wir die Wechselbeziehung

$$\omega_{\mathrm{kr}} = \sqrt{\frac{c}{M}},$$

woraus

$$c = M\,\omega_{\mathrm{kr}}^2 = \frac{P\,\omega_{\mathrm{kr}}^2}{g}$$

folgt.

Substituieren wir hier

$$c = \frac{48\,E\,J}{l^3} = \frac{3\,E\,\pi\,\mathrm{d}^4}{4\,l^3}$$

$\left(\text{wir erinnern daran, daß } J = \frac{\pi d^4}{64} \text{ ist}\right)$, so erhalten wir:

$$\frac{3 E \pi d^4}{4 l^3} = \frac{P \omega_{\mathrm{kr}}^2}{g},$$

woraus

$$d = \sqrt[4]{\frac{4 P l^3 \omega_{\mathrm{kr}}^2}{3 \pi g E}}$$

folgt.

Wenn wir hier setzen

$$P = 20\,\mathrm{kg}, \qquad l = 60\,\mathrm{cm}, \qquad E = 2 \cdot 10^6\,\mathrm{kg/cm^2}, \qquad g = 981\,\mathrm{cm/s^2}, \qquad \omega_{\mathrm{kr}} = 150\,\frac{1}{\mathrm{s}},$$

finden wir:

$$d = 2{,}14\,\mathrm{cm}.$$

KAPITEL XV

DER IMPULSSATZ

§ 87. Der Impulssatz

Wir wollen bei der Bewegung eines materiellen Systems den Impulssatz anwenden, der im Kapitel V für den Fall der Bewegung eines materiellen Punktes aufgestellt ist.

Wir stellen uns das sich bewegende materielle System $M_1, M_2, \ldots, M_n$ vor (Abb. 145). Die auf das System wirkenden Kräfte teilen wir in äußere und innere ein. Die Resultierenden der äußeren Kräfte, die an jedem der Systempunkte angreifen, bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}_1^E, \mathfrak{F}_2^E, \ldots, \mathfrak{F}_n^E$, die Resultierenden der inneren Kräfte entsprechend mit $\mathfrak{F}_1^J, \mathfrak{F}_2^J, \ldots, \mathfrak{F}_n^J$.

Wir wenden den Impulssatz bei der Bewegung des Punktes M_1 während der Zeit von t_1 bis t_2 an.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Punktes M_i mit $\mathfrak{v}_i$ und die Impulse der Kräfte $\mathfrak{F}_i^E$ und $\mathfrak{F}_i^J$ während des Zeitraumes $t_2 - t_1$ mit $\mathfrak{S}_i^E$ und $\mathfrak{S}_i^J$, so erhalten wir

$$(m_i \mathfrak{v}_i)_2 - (m_i \mathfrak{v}_i)_1 = \mathfrak{S}_i^E + \mathfrak{S}_i^J,$$

wobei $(m_i \mathfrak{v}_i)_1$ und $(m_i \mathfrak{v}_i)_2$ die Werte des Impulses $m_i \mathfrak{v}_i$ zur Zeit t_1 bzw. t_2 sind.

Da wir für jeden Punkt des Systems eine solche Gleichung aufschreiben können, werden wir im ganzen n Gleichungen erhalten. Addieren wir diese n Gleichungen gliedweise, so erhalten wir:

$$(\sum m_i \mathfrak{v}_i)_2 - (\sum m_i \mathfrak{v}_i)_1 = \sum \mathfrak{S}_i^E + \sum \mathfrak{S}_i^J, \tag{1}$$

wobei $(\Sigma m_i \mathfrak{v}_i)_1$ und $(\Sigma m_i \mathfrak{v}_i)_2$ die Werte der Summe $\Sigma m_i \mathfrak{v}_i$ zur Zeit t_1 bzw. t_2 sind.

Wir bemerken nun, daß die Summe der Impulse aller inneren Kräfte gleich Null ist, d. h.

$$\sum \mathfrak{S}_i^J = 0,$$

und zwar gilt tatsächlich, wenn wir uns der Bestimmung der Kraftstöße erinnern,

$$\mathfrak{S}_i^J = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{F}_i^J \, dt.$$

Folglich gilt:

$$\sum \mathfrak{S}_i^J = \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{F}_i^J \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum \mathfrak{F}_i^J \, dt^1.$$

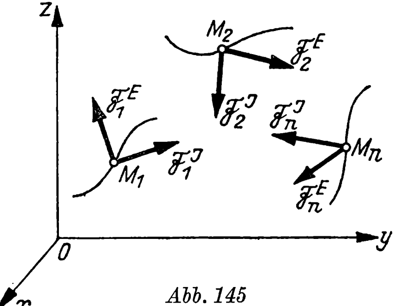


Abb. 145

Wir haben aber bereits im § 84 gesehen, daß die Summe aller inneren Kräfte gleich Null ist, d. h. $\Sigma \mathfrak{F}_i^J = 0$. Aus der soeben aufgestellten Gleichung folgt, daß auch $\Sigma \mathfrak{S}_i^J = 0$ ist.

Somit nimmt die Gl. (1) folgende endgültige Form an:

$$(\sum m_i \mathfrak{v}_i)_2 - (\sum m_i \mathfrak{v}_i)_1 = \sum \mathfrak{S}_i^E. \tag{2}$$

Durch diese Gleichung wird der *Impulssatz* ausgedrückt. Wir sehen, *daß der Zuwachs der Summe der Impulse der Systempunkte in einem gewissen Zeitraum gleich den Impulsen aller äußeren Kräfte in demselben Zeitraum ist.*

Man kann dem Impulssatz auch eine andere Formulierung geben, wenn man beide Teile der Gl. (2) auf die Koordinatenachsen x, y und z reduziert. Bezeichnen wir die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_i$ auf diesen Achsen mit v_{ix}, v_{iy} und v_{iz} und die Komponenten des Impulses $\mathfrak{S}_i^E$ mit S_{ix}^E, S_{iy}^E und S_{iz}^E, so gilt:

$$(\sum m_i v_{ix})_2 - (\sum m_i v_{ix})_1 = \sum S_{ix}^E,$$
$$(\sum m_i v_{iy})_2 - (\sum m_i v_{iy})_1 = \sum S_{iy}^E,$$
$$(\sum m_i v_{iz})_2 - (\sum m_i v_{iz})_1 = \sum S_{iz}^E,$$

wobei $(\Sigma m_i v_{ix})_1$, $(\Sigma m_i v_{ix})_2$ usw. die Werte der Summen $\Sigma m_i v_{ix}$ usw. zur Zeit t_1 bzw. t_2 sind.

[1] Es ist leicht zu ersehen, daß sich das Theorem „die Summe der Integrale ist gleich dem Integral der Summe" auch auf die Integrale der Vektor-Funktion erstreckt.

Unter Beachtung, daß $m_i v_{ix}$, $m_i v_{iy}$, $m_i v_{iz}$ die Komponenten des Impulses $m\mathfrak{v}_i$ auf den Achsen x, y und z sind, schließen wir, *daß der Zuwachs der Summe der Komponenten der Impulse der Systempunkte auf einer beliebigen Achse gleich der Summe der Komponenten der Impulse aller äußeren Kräfte auf derselben Achse ist.* Dies ist die Formulierung des Impulssatzes in Komponentenform auf einer beliebigen Achse; diese Formulierung wird gewöhnlich bei den Anwendungen benutzt.

Wir bemerken, daß die inneren Kräfte in den Gleichungen, die den Impulssatz ausdrücken, nicht auftreten. Folglich werden wir bei Anwendung dieses Gesetzes Beziehungen erhalten, die keine inneren Kräfte enthalten. Wir wissen bereits, welchen Wert diese Eliminierung der inneren Kräfte bei Anwendungen hat.

§ 88. Die Kraft eines Strahles

Wir wollen uns einen Flüssigkeitsstrahl vorstellen, der auf seinem Wege einem Hindernis in Form einer Wand begegnet (Abb. 146). Wenn der Strahl an die Wand stößt, übt er eine Kraft auf diese aus. Wir wollen diese Kraft ermitteln.

Wir bezeichnen die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen, die sich im Strahl bewegen, mit $\mathfrak{v}$ und werden annehmen, daß alle Flüssigkeitsteilchen ein und dieselbe konstante Geschwindigkeit haben. Einen kleinen Abschnitt des Strahles kann man als geradlinig ansehen; den vom Strahl mit der Wand gebildeten Winkel bezeichnen wir mit α. Außerdem bezeichnen wir die Querschnittsfläche des Strahles mit ω und die Dichte der Flüssigkeit (d. h. die Masse einer Raumeinheit der Flüssigkeit) mit ϱ.

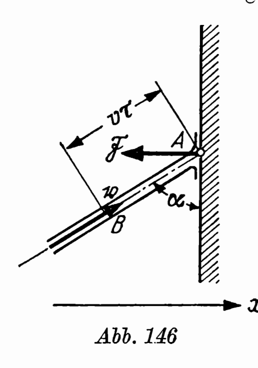


Abb. 146

Man kann die Kraft des Strahles auf die Wand als senkrecht zur Wand gerichtet annehmen. Beim Aufprall auf die Wand erfahren die Flüssigkeitsteilchen von seiten der Wand eine Reaktion, die der Größe nach gleich und der Richtung nach entgegengesetzt dem Druck der Flüssigkeit ist. Wir bezeichnen die Reaktion der Wand mit $\mathfrak{F}$; die Aufgabe wird auf die Bestimmung dieser Reaktion zurückgeführt.

Wir wenden auf die Bewegung des Strahles den Impulssatz an. Vor allem ist es notwendig, genau anzugeben, welche Flüssigkeitsteilchen wir in den Bestand des Systems aufnehmen, dessen Bewegung wir untersuchen wollen. Wir teilen von der Wand längs des Strahles den kleinen Abschnitt AB ab, dessen Länge $v\,\tau$ ist, wobei τ ein kleiner Zeitraum ist; am Ende B dieses Abschnittes ermitteln wir den Querschnitt des Strahles. Wir wählen einen beliebigen Zeitpunkt t und nehmen in den Bestand unseres Systems die Flüssigkeitsteilchen auf, die sich in diesem Zeitpunkt zwischen der Wand und dem soeben gekennzeichneten Schnitt des Strahles befinden. Wir wenden nun den Impulssatz bei der Bewegung dieser Flüssigkeitsteilchen im Zeitraum von $t_1 = t$ bis $t_2 = t + \tau$ an.

Wir stellen die Gleichung auf, die den Impulssatz in Komponenten auf die zur Wand senkrechte x-Achse ausdrückt.

Im Augenblick $t_1 = t$ besitzen die von uns bezeichneten Flüssigkeitsteilchen die allgemeine Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Projizieren wir diese auf die x-Achse, so gilt:

$$(\sum m_i v_{i\,x}) = \sum m_i v \sin\alpha = v \sin\alpha \sum m_i = M v \sin\alpha\,,$$

wobei M die Masse des abgesonderten Teiles des Strahles ist. Unter Beachtung, daß der Rauminhalt dieses Strahlteiles gleich $\omega\, v\, \tau$ ist, erhalten wir $M = \varrho\, \omega\, v\, \tau$ und folglich

$$(\sum m_i v_{i\,x})_1 = \varrho\, \omega\, v^2\, \tau \sin\alpha\,.$$

Während der Zeit τ durchlaufen die sich längs des Strahles bewegenden Flüssigkeitsteilchen die Strecke $v\,\tau$. Jene Teilchen, die sich im Augenblick t im Schnitt B befanden, erreichen im Augenblick $t + \tau$ die Wand; die weiter nach vorn liegenden Teilchen stoßen noch früher an die Wand. Folglich befinden sich im Augenblick $t_2 = t + \tau$ alle von uns betrachteten Teilchen bereits an der Wand. Sie bewegen sich längs der Wand, folglich sind ihre Geschwindigkeiten senkrecht zur x-Achse gerichtet. Somit ist im Augenblick $t_2 = t + \tau$ der Wert $v_{i\,x} = 0$ und

$$(\sum m_i v_{i\,x})_2 = 0\,.$$

Was die äußeren Kräfte anbetrifft, die auf unser System wirken, so sind diese die Schwerkraft, die Reaktion $\mathfrak{F}$ der Wand und der Druck von der Seite, die sich im Rücken der Masse der Flüssigkeit befindet (und eine äußere in bezug auf die abgesonderten Teilchen ist). Vernachlässigen wir diesen Druck und auch die Schwerkraft (bei einer großen Geschwindigkeit des Strahles sind diese Kräfte im Vergleich zu der Reaktion der Wand unbedeutend), so bleibt nur die eine äußere Kraft $\mathfrak{F}$ übrig. Der Impuls dieser Kraft in der Zeit τ ist gleich $\mathfrak{F}\,\tau$; die Projektion dieses Impulses auf die x-Achse ist gleich $-\,F\,\tau$.

Also führt der auf die x-Achse projezierte Impulssatz zu der Gleichung

$$-\,\varrho\, \omega\, v^2\, \tau \sin\alpha = -\,F\,\tau\,,$$

woraus

$$F = \varrho\, \omega\, v^2 \sin\alpha$$

folgt.

Mit dieser Gleichung wird die Kraft des Strahles auf die Wand bestimmt. Wir wollen das gewonnene Resultat auf ein Zahlenbeispiel anwenden. Wir errechnen die Kraft, die ein Wasserstrahl auf eine zur Richtung des Strahles senkrechte Wand erzeugt, wenn $\omega = 0{,}005\ \text{m}^2$ und $v = 20\ \text{m/s}$ ist.

Wenn wir ϱ als Masse von $1\ \text{m}^3$ Wasser bestimmen, finden wir:

$$\varrho = \frac{1000}{9{,}81} = 102\,\frac{\text{kg}\cdot\text{s}^2}{\text{m}^4}\,.$$

Folglich erhalten wir, wenn wir $\alpha = 90^\circ$ annehmen,

$$F = 102 \cdot 0{,}005 \cdot 400 = 204\ \text{kg}\,.$$

§ 89. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkung einer Kraft im elastischen Körper

In einem absolut starren Körper wird die Wirkung einer Kraft momentan übertragen.

Wir wollen uns einen vertikalen Stab AB vorstellen, der sich auf eine horizontale Ebene stützt (Abb. 147). Wir lassen an dem oberen Ende A des Stabes die vertikale (konstante) Kraft $\mathfrak{P}$ angreifen. Wenn der Stab absolut starr wäre, würden wir in demselben Augenblick, in dem wir an dem Ende A die Kraft $\mathfrak{P}$ angreifen lassen, im Punkte B einen dieser Kraft gleichen Druck auf die Stützfläche erhalten und eine entsprechende (am Ende B des Stabes angreifende) Reaktion der Ebene. Die Wirkung der Kraft $\mathfrak{P}$ würde momentan vom Ende A auf das Ende B des Stabes übertragen werden.

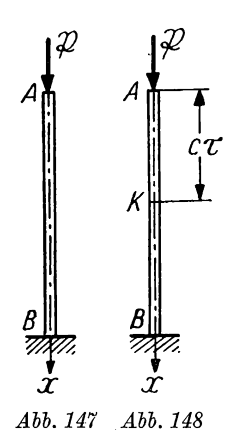


Abb. 147 *Abb. 148*

Es gibt aber in Wirklichkeit keine absolut starren Körper. Alle Körper besitzen in höherem oder niedrigerem Grade die Fähigkeit, sich unter der Einwirkung angreifender Kräfte zu deformieren. Im Zusammenhang damit wird in wirklich existierenden Körpern die Wirkung von Kräften nicht momentan übertragen; sie breitet sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit aus. Wenn wir den Stab AB (Abb. 147) im Punkte A mit der Kraft $\mathfrak{P}$ belasten, erhalten wir im Punkte B nicht in demselben Augenblick einen Druck auf die Stützfläche, in dem die Kraft $\mathfrak{P}$ angelegt wurde, sondern erst nach Ablauf eines gewissen Zeitraumes. Wir wollen errechnen, mit welcher Geschwindigkeit die Wirkung der Kraft $\mathfrak{P}$ längs des Stabes übertragen wird.

Die am oberen Ende des Stabes angreifende Kraft $\mathfrak{P}$ ruft eine Zusammendrückung des Stabes hervor. Wie aus dem Lehrgang der Festigkeitslehre bekannt ist, gilt für die durch die Kraft $\mathfrak{P}$ hervorgerufene Zusammendrückung ε

$$\varepsilon = \frac{P}{E\omega},$$

wobei E der Elastizitätsmodul und ω die Schnittfläche des Stabes ist. Wenn wir jedoch an das Ende A des Stabes die Kraft $\mathfrak{P}$ anlegen, wird der Stab die Zusammendrückung ε nicht momentan erhalten. Anfangs wird die oberste Schicht, die an das Ende A grenzt, zusammengedrückt werden. Nachdem diese erste Schicht die Zusammendrückung ε erhalten hat, beginnt sie mit einer Kraft gleich $\mathfrak{P}$ auf die folgende, zweite Schicht zu drücken, die ihrerseits sich zusammenzudrücken beginnt. Darauf beginnt die zweite Schicht die dritte zusammenzudrücken usw. Auf diese Art wird der Druck $\mathfrak{P}$ und die Zusammendrückung ε allmählich von Schicht zu Schicht übertragen, wobei sie sich mit einer gewissen Geschwindigkeit c längs des Stabes vom Ende A nach dem Ende B ausbreitet.

Wir bemerken, daß die Zusammendrückung der aufeinanderfolgenden Schichten unseres Stabes eine allmähliche Senkung aller höherliegenden Schichten hervorruft.

Natürlich ist diese Verrückung der Punkte des Stabes winzig klein. Zur Bestimmung der Geschwindigkeit c wollen wir bei der winzig kleinen Bewegung der Stabteilchen den Impulssatz anwenden.

Wir nehmen an, daß wir die Kraft $\mathfrak{P}$ an das obere Ende des Stabes im Zeitpunkt t angelegt haben. Im Zeitpunkt $t + \tau$, der auf den Zeitpunkt t folgt, wird sich der Stabteil $AK = c\,\tau$ (Abb. 148) bereits im zusammengedrückten Zustand befinden, der Stabteil KB dagegen wird noch in seinem ursprünglichen undeformierten Zustand bleiben. Wir wenden den Impulssatz bei der Bewegung des Stabteiles AK in der Zeit von $t_1 = t$ bis $t_2 = t + \tau$ an und schreiben die entsprechende Gleichung in Projektionen auf die vertikal nach unten gerichtete x-Achse auf.

Im Augenblick $t_1 = t$ befinden sich alle zum Stabteil AK gehörenden Teilchen in Ruhe. Folglich ist

$$(\sum m_i v_{i\,x})_1 = 0 .$$

Im Augenblick $t_2 = t + \tau$ befindet sich der Stabteil AK bereits im zusammengedrückten Zustand; in den darauffolgenden Augenblicken bewegt er sich wie ein unveränderliches Ganzes nach unten (infolge der Zusammendrückung der tieferliegenden Schichten); alle seine Punkte haben bei dieser Bewegung gleiche Geschwindigkeiten. Folglich genügt es zur Ermittlung der Geschwindigkeit des Stabteiles AK im Augenblick $t_2 = t + \tau$, die Geschwindigkeit des Punktes A in diesem Augenblick zu bestimmen.

Um die Geschwindigkeit des Punktes A zu bestimmen, wollen wir ermitteln, um welche Größe sich (wir bezeichnen sie mit u) der Punkt A im Augenblick $t_2 = t + \tau$ gesenkt hat. Die Verrückung u des Punktes A ist gleich der Verkürzung des Stabteiles AK. Da die relative Zusammendrückung des Teiles AK gleich ε ist, gilt

$$u = \varepsilon \cdot A\,K = \frac{P \cdot c\,\tau}{E\,\omega}.$$

Die Geschwindigkeit des Punktes A ist aber nichts anderes als die Ableitung $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,\tau}$; es gilt

$$\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,\tau} = \frac{P \cdot c}{E\,\omega}.$$

Diese Geschwindigkeit werden alle zum Teil AK gehörenden Teilchen im Augenblick $t_2 = t + \tau$ haben. Unter Beachtung, daß diese Geschwindigkeit vertikal nach unten gerichtet ist, erhalten wir

$$(\sum m_i v_{i\,x})_2 = \sum m_i \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,\tau} = \frac{P\,c}{E\,\omega} \sum m_i = \frac{M\,P\,c}{E\,\omega},$$

wobei M die Masse des Stabteiles AK ist. Bezeichnen wir die Dichte (d. h. die Masse der Raumeinheit) des Stabmaterials mit ϱ und bemerken, daß das Volumen des Teiles AK gleich $\omega\,c\,\tau$ ist, so haben wir $M = \varrho\,\omega\,c\,\tau$. Folglich ist

$$(\sum m_i v_{i\,x})_2 = \frac{\varrho\,P\,c^2\,\tau}{E}.$$

Wenn wir die Schwerkraft vernachlässigen, ist die einzige äußere Kraft, die auf den Stabteil AK während der Zeit τ einwirkt, die am oberen Ende des Stabes angreifende Kraft $\mathfrak{P}$ (im Schnitt K sind bis zum Zeitpunkt $t_2 = t + \tau$ keinerlei Kräfte vorhanden). Der Impuls der Kraft $\mathfrak{P}$ während der Zeit τ ist gleich $\mathfrak{P}\,\tau$; da dieser Impuls vertikal nach unten verläuft, ist seine Projektion auf die x-Achse gleich $P\tau$.

Also führt uns der Impulssatz zu folgender Abhängigkeit:

$$\frac{\varrho\, P\, c^2\, \tau}{E} = P\,\tau\,.$$

Hieraus folgt, daß

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$$

ist.

Dies ist die Geschwindigkeit der Ausbreitung der Kraftwirkung längs des Stabes.

Für einen Stahlstab ist

$$E = 2\,200\,000 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\varrho = 7{,}86 \cdot 102 = 802 \frac{\text{kg/sec}^2}{\text{m}^4} = 802 \cdot 10^{-8} \frac{\text{kg/sec}^2}{\text{cm}^4}.$$

Folglich ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Kraftwirkung in einem Stahlstabe gleich

$$c = \sqrt{\frac{2\,200\,000 \cdot 10^8}{802}} = 524 \cdot 10^3 \text{ cm/s} = 5{,}24 \text{ km/s}.$$

In einem Stahlstabe von der Länge 2 m wird die Kraft von einem Ende zum anderen im Laufe von 0,00038 s übertragen. Natürlich kann man praktisch annehmen, daß die Übertragung der Kraft momentan erfolgt.

Für einen absolut starren Körper ist $E = \infty$, und folglich ist $c = \infty$, d. h., in einem absolut starren Körper breitet sich die Kraftwirkung momentan aus, wie im Anfang dieses Paragraphen erwähnt wurde.

Eine ausführlichere Analyse zeigt, daß die Erscheinung, die bei einem plötzlichen Angreifen der Druckkraft $\mathfrak{P}$ an einem Ende des elastischen Stabes vor sich geht, nicht auf das einfache Bild einer allmählichen Zusammendrückung der Stabschichten beschränkt ist, das wir bereits untersucht haben.

Der Prozeß bleibt nicht in dem Augenblick stehen, in dem die Zusammendrückung ε das untere Ende B des Stabes erreicht hat und der ganze Stab gleichmäßig zusammengedrückt ist. In diesem Augenblick besitzen alle Stabteilchen Geschwindigkeiten, die vertikal nach unten gerichtet sind; infolgedessen drückt sich der Stab weiter zusammen. Einer weiteren Zusammendrückung des Stabes jedoch wirken die elastischen Kräfte des Stabes entgegen; dadurch entsteht in dem Stabe eine Erscheinung von schwingendem Charakter. Diese Schwingungen klingen in dem Stabe allmählich ab, und die Stabteilchen nähern sich den Ruhelagen, denen eine gleichmäßige Zusammendrückung ε des Stabes entspricht.

KAPITEL XVI

DER MOMENTENSATZ

§ 90. Das resultierende Moment des Impulses eines Systems

In dem der Statik eines starren Körpers gewidmeten Abschnitt des I. Teiles des Lehrbuches wurden die Begriffe des resultierenden Momentes der Kräfte in bezug auf einen Punkt und des resultierenden Momentes der Kräfte in bezug auf eine Achse dargelegt. Wir erinnern daran, daß wir die Summe der Momente der gegebenen

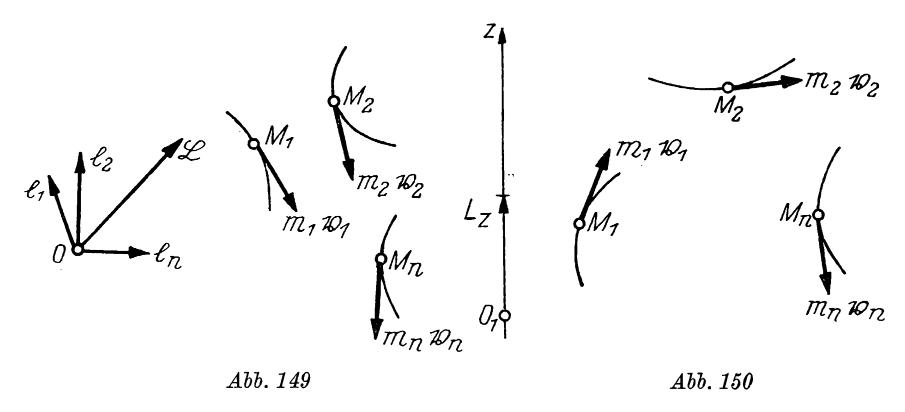


Abb. 149 *Abb. 150*

Kräfte in bezug auf einen Punkt resultierendes Kräftemoment in bezug auf diesen Punkt genannt haben; das resultierende Moment in bezug auf eine Achse aber ist die Summe der Momente der gegebenen Kräfte in bezug auf diese Achse.

Im Kapitel VI dieses Teiles haben wir den Begriff des Momentes auf den Impuls eines materiellen Punktes angewandt. Nun wollen wir den Begriff des resultierenden Momentes auf die Bewegungsgröße materieller Punkte ausdehnen.

Stellen wir uns ein sich bewegendes materielles System $M_1, M_2 \ldots, M_n$ vor (Abb. 149). Wir bezeichnen die Bewegungsgrößen der Punkte dieses Systems mit $m_1\mathfrak{v}_1, m_2\mathfrak{v}_2, \ldots, m_n\mathfrak{v}_n$ und bilden die Momente $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_n$ dieser Bewegungsgrößen in bezug auf einen Punkt O. *Die Summe* $\mathfrak{L}$ *dieser Momente heißt das resultierende Moment oder Hauptmoment der Bewegungsgrößen*[1] *des Systems in bezug auf den Punkt O.*

Wir wollen wiederum die Bewegungsgrößen der materiellen Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ mit $m_1\mathfrak{v}_1, m_2\mathfrak{v}_2, \ldots, m_n\mathfrak{v}_n$ (Abb. 150) bezeichnen und die Momente $l_{1z}, l_{2z}, \ldots, l_{nz}$ dieser Bewegungsgrößen in bezug auf eine Achse z errechnen. *Die Summe* L_z *dieser Momente heißt das resultierende Moment der Bewegungsgrößen des Systems in bezug auf die z-Achse.*

Also ist:
$$L_z = l_{1z} + l_{2z} + \cdots + l_{nz} = \sum l_{iz}.$$

[1] Im Deutschen vielfach Gesamtdrehimpuls oder Gesamtdrall oder, wenn keine Verwechslung möglich ist, einfach Drehimpuls oder Drall (Anm. d. deutschen Red.).

Das resultierende Moment L_z wird längs der z-Achse von einem beliebigen Punkt O_1 nach der positiven oder negativen Achsrichtung je nach dem Vorzeichen der Größe L_z abgetragen.

In der Statik eines starren Körpers wurde festgestellt, wenn wir das resultierende Moment $\mathfrak{M}$ des gegebenen Kräftesystems in bezug auf einen beliebigen Punkt O und das resultierende Moment M_z desselben Kräftesystems in bezug auf die z-Achse, *die durch den Punkt O hindurchgeht*, aufstellen, daß das zweite dieser resultierenden Momente gleich der Projektion des ersten auf die z-Achse ist, so daß

$$M_z = M \cos(\mathfrak{M}, z)$$

ist.

Natürlich ist dieses Theorem auch für die resultierenden Momente der Bewegungsgrößen des Systems richtig. Betrachten wir die resultierenden Momente $\mathfrak{L}$ und L_z der Bewegungsgrößen des Systems in bezug auf irgendeinen Punkt O und in bezug auf irgendeine Achse z, die durch den Punkt O hindurchgeht, so erhalten wir die Beziehung

$$L_z = L \cos(\mathfrak{L}, z),$$

d. h., das resultierende Moment L_z ist gleich der Projektion des resultierenden Momentes $\mathfrak{L}$ auf die z-Achse.

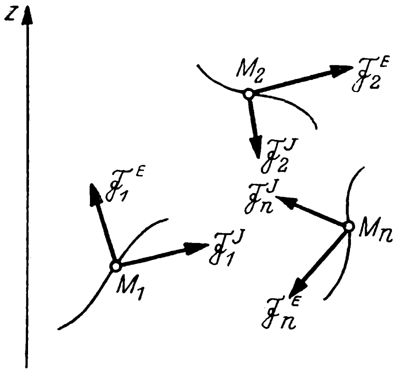


Abb. 151

§ 91. Der Momentensatz

Wir erweitern nun den Momentensatz, den wir im Kapitel VI für den Fall eines materiellen Punktes aufgestellt hatten, auf die Bewegung des mechanischen Systems.

Wir stellen uns ein sich bewegendes mechanisches System $M_1, M_2, \ldots, M_n$ vor (Abb. 151). Die auf die Punkte des Systems einwirkenden Kräfte unterteilen wir (wie wir das bereits beim Aufstellen des Gesetzes von der Bewegung des Trägheitszentrums und des Impulssatzes getan haben) in äußere und innere Kräfte. Die Resultierenden der äußeren Kräfte, die an den Punkten des Systems angreifen, bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}_1^E, \mathfrak{F}_2^E, \ldots, \mathfrak{F}_n^E$, die Resultierenden der inneren Kräfte entsprechend mit $\mathfrak{F}_1^J, \mathfrak{F}_2^J, \ldots, \mathfrak{F}_n^J$.

Wir wählen irgendeine feste Achse z und wenden den Momentensatz auf die Bewegung des i-ten Punktes unseres Systems an. Bezeichnen wir das Moment der Bewegungsgröße des Punktes M_i in bezug auf die z-Achse mit l_{iz}, die Momente der Kräfte $\mathfrak{F}_i^E$ und $\mathfrak{F}_i^J$ in bezug auf dieselbe Achse mit M_{iz}^E und M_{iz}^J, so gilt nach dem Momentensatz:

$$\frac{d l_{iz}}{d t} = M_{iz}^E + M_{iz}^J.$$

Wir stellen eine solche Gleichung für jeden Punkt unseres Systems auf und erhalten damit insgesamt n ähnliche Gleichungen. Addieren wir diese n Gleichungen gliedweise, so ergibt sich:

$$\sum \frac{\mathrm{d}\, l_{iz}}{\mathrm{d}t} = \sum M_{iz}^E + \sum M_{iz}^J, \tag{1}$$

wobei sich die Summationen auf alle Punkte des Systems erstrecken.

Nun ist

$$\sum \frac{\mathrm{d}\, l_{iz}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d} \sum l_{iz}}{\mathrm{d}t}$$

(da die Summe der Ableitung gleich der Ableitung der Summe ist). Die Summe $\sum l_{iz}$ ist jedoch nichts anderes als das Hauptmoment L_z der Bewegungsgröße des Systems in bezug auf die z-Achse. Folglich ist

$$\sum \frac{\mathrm{d}\, l_{iz}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d} \sum l_{iz}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\, L_z}{\mathrm{d}t}.$$

Was den rechten Teil der Gl. (1) anbetrifft, so ist es nicht schwer, zu erkennen, daß die Summe $\sum M_{iz}^J$ der Momente aller inneren Kräfte in bezug auf eine beliebige Achse z gleich Null ist. Wir wissen, daß auf Grund des Axioms „Kraft ist gleich Gegenkraft" die inneren Kräfte paarweise der Größe nach gleich sind und auf Geraden nach entgegengesetzten Seiten wirken. Hieraus folgt, daß die Momente der inneren Kräfte in bezug auf eine beliebige Achse paarweise der Größe nach gleich und dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sind; folglich ist die Summe der Momente aller inneren Kräfte in bezug auf eine beliebige Achse gleich Null, d. h.

$$\sum M_{iz}^J = 0.$$

Somit nimmt die Gl. (1) folgende endgültige Form an:

$$\frac{\mathrm{d}\, L_z}{\mathrm{d}t} = \sum M_{iz}^E.$$

Diese Gleichung zeigt, daß *bei einer Bewegung des Systems die zeitliche Ableitung des Hauptmomentes der Bewegungsgrößen (des Gesamtdrehimpulses) des Systems in bezug auf irgendeine Achse gleich der Summe der Momente (oder dem Hauptmoment) aller äußeren Kräfte in bezug auf dieselbe Achse ist.* Dies ist der *Momentensatz.*

Sehr wesentlich ist der Umstand, daß die inneren Kräfte, wie wir gesehen haben, gleich bei der Aufstellung des Momentensatzes eliminiert werden. Auch dieses Gesetz (ähnlich dem Gesetz von der Bewegung des Trägheitszentrums und dem Impulssatz) führt uns zu einer Beziehung, die keine inneren Kräfte enthält; darin besteht der praktische Wert dieses Theorems.

§ 92. Eine andere Formulierung des Momentensatzes

Das soeben aufgestellte Theorem ist (wie wir im weiteren sehen werden) ein äußerst geeignetes Mittel zur Erforschung der Drehbewegungen eines starren Körpers. Bevor wir jedoch zur Anwendung des Momentensatzes übergehen, werden wir uns im vorliegenden Paragraphen mit einer etwas anderen Formulierung desselben Gesetzes beschäftigen, die sich gleichfalls bei einigen Anwendungen als nützlich erweist. Der in dem vorhergehenden Paragraphen aufgestellte Momentensatz verbindet das Hauptmoment der Bewegungsgröße des Systems in bezug auf irgendeine Achse mit dem Hauptmoment der äußeren Kräfte in bezug auf dieselbe Achse. Die zweite Formulierung des Momentensatzes, die wir im Auge haben, stellt die Abhängigkeit zwischen den Hauptmomenten der Bewegungsgrößen und denen der äußeren Kräfte her, die auf irgendeinen festen Punkt bezogen sind.

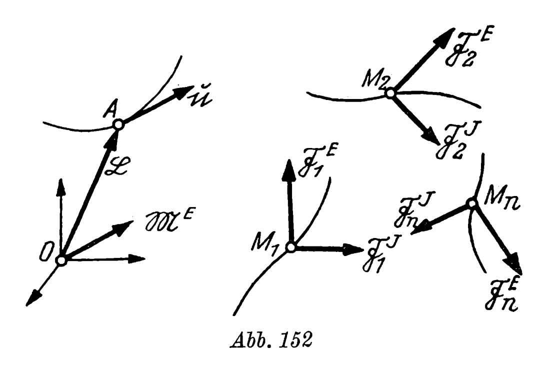


Abb. 152

Wir wollen uns also wiederum unser bewegtes System M_1, M_2, ..., M_n (Abb. 152) vorstellen und die äußeren Kräfte mit $\mathfrak{F}_1^E$, $\mathfrak{F}_2^E$, ..., $\mathfrak{F}_n^E$ und die inneren Kräfte, die an den Punkten des Systems angreifen, mit $\mathfrak{F}_1^J$, $\mathfrak{F}_2^J$, ..., $\mathfrak{F}_n^J$ bezeichnen. Wählen wir den festen Punkt O und stellen das Hauptmoment $\mathfrak{L}$ der Bewegungsgrößen des Systems und das Hauptmoment $\mathfrak{M}^E$ aller äußeren Kräfte in bezug auf diesen Punkt zusammen. Wir wollen die Abhängigkeit zwischen den Hauptmomenten $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}^E$ ermitteln.

Natürlich bleibt bei der Bewegung des Systems das Hauptmoment $\mathfrak{L}$ nicht konstant.

Bezeichnen wir das Moment der Bewegungsgröße des Punktes M_i in bezug auf den Punkt O mit $\mathfrak{l}_i$, die Momente der Kräfte $\mathfrak{F}_i^E$ und $\mathfrak{F}_i^J$ in bezug auf denselben Punkt mit $\mathfrak{M}_i^E$ und $\mathfrak{M}_i^J$, und wenden wir auf den Punkt M_i den Momentensatz in seiner Vektor-Form an (s. § 29), so erhalten wir:

$$\frac{d\mathfrak{l}_i}{dt} = \mathfrak{M}_i^E + \mathfrak{M}_i^J.$$

Hieraus finden wir, wenn wir über alle Punkte des Systems summieren,

$$\sum \frac{d\mathfrak{l}_i}{dt} = \sum \mathfrak{M}_i^E + \sum \mathfrak{M}_i^J,$$

oder

$$\frac{d\sum \mathfrak{l}_i}{dt} = \sum \mathfrak{M}_i^E + \sum \mathfrak{M}_i^J.$$

Andererseits gilt:

$$\sum \mathfrak{l}_i = \mathfrak{L}, \qquad \sum \mathfrak{M}_i^E = \mathfrak{M}^E, \qquad \sum \mathfrak{M}_i^J = \mathfrak{M}^J,$$

wobei $\mathfrak{L}$ das Hauptmoment der Bewegungsgrößen des Systems in bezug auf den Punkt O ist, und $\mathfrak{M}^E$, $\mathfrak{M}^J$ die Hauptmomente der äußeren und inneren Kräfte in bezug auf denselben Punkt sind. Wenn wir bemerken, daß $\mathfrak{M}^J = 0$ ist (da die inneren Kräfte paarweise der Größe nach gleich sind und auf Geraden nach entgegengesetzten Seiten verlaufen), erhalten wir

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \mathfrak{M}^E. \tag{1}$$

Dies ist die zweite Formulierung des Momentensatzes. Wir sehen, daß *die zeitliche vektorielle Ableitung des Hauptmomentes der Bewegungsgrößen des Systems in bezug auf einen bestimmten Punkt gleich dem Hauptmoment aller äußeren Kräfte in bezug auf denselben Punkt ist.*

Man kann die Formulierung des Momentensatzes noch ein wenig verändern. Bei der Bewegung des Systems verändert das Hauptmoment $\mathfrak{L}$ der Bewegungsgrößen des Systems, allgemein gesagt, mit der Zeit sowohl seine Größe als auch seine Richtung. Das Ende des Hauptmomentes $\mathfrak{L}$ (wir bezeichnen diesen Punkt mit A) verschiebt sich im Laufe der Zeit im Raume und beschreibt eine Kurve (Abb. 152); diese Kurve heißt der *Hodograph* des Hauptmomentes der Bewegungsgröße. Wir wollen die Geschwindigkeit ermitteln, mit welcher sich der Punkt A nach dem Hodographen verschiebt; diese Geschwindigkeit werden wir mit dem Buchstaben $\mathfrak{u}$ bezeichnen.

Die Antwort auf die gestellte Frage wird unmittelbar durch die Gl. (1) gegeben. Wir wissen, daß die Geschwindigkeit des Punktes gleich der vektoriellen Ableitung seines Radius-Vektors nach der Zeit ist; andererseits ist das Hauptmoment $\mathfrak{L}$ der Bewegungsgröße des Systems der von dem festen Punkt O aus laufende Radius-Vektor des Punktes A. Folglich ist

$$\mathfrak{u} = \frac{d\mathfrak{L}}{dt}$$

oder auf Grund der Gl. (1)

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{M}^E.$$

Wir gelangen zu der folgenden veränderten Formulierung des Momentensatzes: *Die Geschwindigkeit des Endes des Hauptmomentenvektors der Bewegungsgrößen, der in bezug auf einen bestimmten Punkt aufgestellt ist, ist proportional dem Hauptmoment aller äußeren Kräfte in bezug auf denselben Punkt.* Zuweilen wird dieses Resultat das Theorem von Resal genannt.

§ 93. Die Differentialgleichung der Drehbewegung eines starren Körpers um eine feste Achse

Wir gehen nun zu der Anwendung des Momentensatzes über. Wir stellen uns einen starren Körper vor, dessen zwei Punkte O_1 und O_2 unbeweglich befestigt sind (Abb. 153). Der Körper kann sich frei um die feste Achse z drehen, die durch die

Punkte O_1 und O_2 hindurchgeht; der Körper kann keinerlei andere Bewegungen ausführen. Nehmen wir an, daß die äußeren Kräfte $\mathfrak{F}_1^E, \mathfrak{F}_2^E, \ldots, \mathfrak{F}_n^E$ an dem Körper angreifen. Aus der Statik des starren Körpers ist uns bekannt, daß unser Körper unter der Einwirkung dieser Kräfte in Ruhe verbleiben wird, wenn die Summe der Momente der an ihm angreifenden Kräfte in bezug auf die Drehachse z gleich Null ist. Wenn diese Summe der Momente nicht gleich Null ist, wird sich der Körper unter der Einwirkung der angreifenden Kräfte um die z-Achse drehen. Wir wollen sehen, wie diese Drehbewegung des starren Körpers zu bestimmen ist.

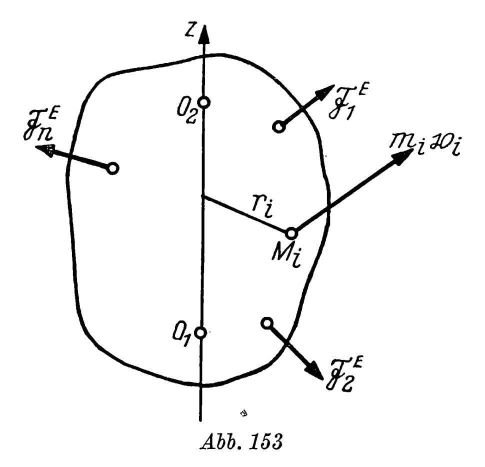


Abb. 153

Aus der Kinematik wissen wir, daß die Drehungen eines starren Körpers um eine feste Achse durch eine Gleichung bestimmt werden, die den Drehwinkel φ mit der Zeit t verbindet:

$$\varphi = f(t).$$

Unsere Aufgabe wird so gelöst, daß wir, wenn wir die äußeren am Körper angreifenden Kräfte kennen, den Drehwinkel als Funktion der Zeit bestimmen. Zur Lösung dieser Aufgabe benutzen wir den Momentensatz.

Wir wenden den Momentensatz (in seiner ersten Formulierung) auf die Drehbewegung unseres Körpers an und stellen die Gleichung auf, die dieses Gesetz in bezug auf die Drehachse z unseres Körpers ausdrückt:

$$\frac{\mathrm{d}\,L_z}{\mathrm{d}\,t} = \sum M_{i\,z}^E.$$

Wir wollen uns nun mit der Berechnung des Hauptmomentes L_z der Bewegungsgrößen des rotierenden Körpers in bezug auf die Drehachse z befassen.

Wir wissen, daß das Hauptmoment L_z gleich der Summe der Momente der Bewegungsgrößen aller materiellen Punkte ist, die zum gegebenen Körper gehören; bezeichnen wir das Moment der Bewegungsgröße eines beliebigen Teilchens M_i des Körpers (in bezug auf die z-Achse) mit l_{iz}, so gilt

$$L_z = \sum l_{i\,z}.$$

Wir bezeichnen die Geschwindigkeit des Punktes M_i mit $\mathfrak{v}_i$ und seine Bewegungsgröße mit $m_i\,\mathfrak{v}_i$. Da der Hebelarm der Bewegungsgröße $m_i\,\mathfrak{v}_i$ in bezug auf die z-Achse gleich dem Abstand r_i des Punktes M_i von dieser Achse ist, gilt

$$l_{i\,z} = m_i v_i r_i.$$

Es ist aber $v_i = r_i\,\omega$, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Körpers ist. Folglich ist

$$l_{i\,z} = m_i r_i^2 \omega.$$

Hieraus folgt:

$$L_z = \sum m_i r_i^2 \omega = \omega \sum m_i r_i^2 .$$

Die Summe $\Sigma m_i r_i^2$ ist nichts anderes als das uns bereits bekannte Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die z-Achse. Bezeichnen wir dieses Trägheitsmoment mit J, so erhalten wir:

$$L_z = J \omega ,$$

d. h., *das Hauptmoment der Bewegungsgrößen eines rotierenden Körpers in bezug auf die Drehachse ist gleich dem Produkt aus dem Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf dieselbe Achse und der Winkelgeschwindigkeit.* Das ist eine der wichtigsten Formeln der Dynamik eines starren Körpers.

Setzen wir nun den gefundenen Ausdruck für das Hauptmoment L_z in den linken Teil der Gleichung, die den Momentensatz ausdrückt, ein, so erhalten wir:

$$J \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum M_{iz}^E . \tag{1}$$

Wir sehen, daß in der Zahl der äußeren Kräfte außer den gegebenen Kräften $\mathfrak{F}_1^E$, $\mathfrak{F}_2^E, \ldots, \mathfrak{F}_n^E$ auch noch die Reaktionen der Stützpunkte O_1 und O_2 enthalten sein müssen. Die Momente dieser Reaktionen sind jedoch in bezug auf die z-Achse gleich Null. Folglich sind im rechten Teil der soeben aufgestellten Gleichung nur die Momente der gegebenen Kräfte enthalten.

Wenn wir im Auge behalten, daß

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

ist, wobei φ der Drehwinkel ist, können wir die gewonnene Gleichung auf folgende Art umschreiben:

$$J \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \sum M_{iz}^E . \tag{2}$$

Somit können wir, wenn wir die am Körper angreifenden äußeren Kräfte kennen, die zweite Ableitung des Drehwinkels nach der Zeit ermitteln. Integrieren wir die gewonnene Gleichung, so finden wir den Drehwinkel φ als Funktion der Zeit, und damit ist die Drehbewegung des Körpers bestimmt. Natürlich treten beim Integrieren zwei willkürliche Konstanten auf, die aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen, d. h. aus den Anfangswerten von φ und $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$.

Die Gl. (1) oder (2) heißt *Differentialgleichung der Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse.*

Nehmen wir an, daß die Summe der Momente der äußeren Kräfte in bezug auf die Drehachse gleich Null ist; dann erhalten wir aus der Gl. (1):

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 0,$$

woraus $\omega = \text{const}$ folgt. Also rotiert in diesem Fall der Körper gleichförmig. Im Spezialfall kann const $= 0$ sein; dann ist $\omega = 0$, der Körper bleibt in Ruhe, und wir erhalten den im Lehrbuch der Statik untersuchten Fall.

§ 94. Die Bestimmung des Reibungskoeffizienten in Lagern

Als Beispiel für die Anwendung der Differentialgleichung der Rotation eines starren Körpers wollen wir ein Verfahren betrachten, das zur Bestimmung des Reibungskoeffizienten in Lagern angewandt wird.

Eine kurze Welle mit an den Enden aufgesetzten schweren Scheiben A und B ruht in einem Lager (Abb. 154). Die Welle wird auf eine große Winkelgeschwindigkeit gebracht und darauf sich selbst überlassen. Infolge der Reibung im Lager verlangsamt sich die Drehung der Welle allmählich. Beim Beobachten dieser verlangsamten Drehung wird die Anzahl der Umdrehungen, welche die Welle in bestimmten Zeiträumen (z. B. in je 30 s) macht, vermerkt. Wir wollen sehen, wie man nach diesen Angaben den Reibungskoeffizienten im Lager bestimmen kann.

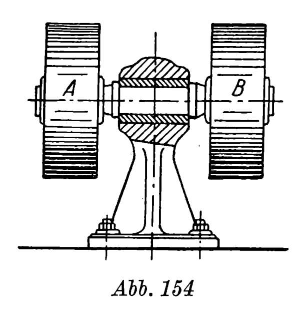


Abb. 154

Wir wenden die im vorhergehenden Paragraphen aufgestellte Differentialgleichung der Drehbewegung auf die verlangsamte Drehung unserer Welle an.

Die äußeren an der Welle angreifenden Kräfte sind ihr Gewicht $\mathfrak{P}$, die normale Reaktion $\mathfrak{N}$ des Lagers und die Reibungskraft $\mathfrak{F}$. Die Momente der Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{N}$ in bezug auf die Drehachsen der Welle sind gleich Null, das Moment der Reibungskraft $\mathfrak{F}$ aber ist gleich $-Fr$, wobei r der Radius des Zapfens ist. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment der Welle (mit den Scheiben A und B) in bezug auf die Drehachse mit J, so gilt die Differentialgleichung der Drehbewegung

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -Fr.$$

Wenn wir $F = fP$ annehmen, wobei f der gesuchte Reibungskoeffizient und $J = \frac{P}{g} r_I^2$ ist, wobei r_I der Trägheitsradius der Welle (mit den Scheiben) in bezug auf die Drehachse ist, dann erhalten wir

$$\frac{P}{g} r_I^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -fPr \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{fgr}{r_I^2}.$$

Könnte man den Reibungskoeffizienten f als konstante Größe ansehen, so würde die Integration dieser Gleichung keine Schwierigkeiten bereiten. Tatsächlich ergibt sich, wenn wir f als konstant annehmen und integrieren:

$$\omega = -\frac{fgr}{r_I^2} t + C,$$

wobei C eine willkürliche Konstante ist. Die Konstante C bestimmen wir aus den Anfangsbedingungen. Wir bezeichnen die ursprüngliche Winkelgeschwindigkeit, die

der Welle mitgeteilt wurde, mit ω_0. In diesem Falle ist $\omega = \omega_0$ bei $t = 0$. Wenn wir in der soeben gewonnenen Gleichung $t = 0$ und $\omega = \omega_0$ annehmen, finden wir $C = \omega_0$ und gewinnen endgültig:

$$\omega = \omega_0 - \frac{f g r}{r_I^2} t.$$

Wir wollen annehmen, daß die Welle nach T s, nachdem ihr die Anfangs-Winkelgeschwindigkeit ω_0 mitgeteilt worden war, stehenblieb. Setzen wir $t = T$ und $\omega = 0$ in die letzte Gleichung ein, so erhalten wir:

$$f = \frac{\omega_0 r_I^2}{g r T}.$$

Nach dieser Gleichung könnte der Reibungskoeffizient berechnet werden, wenn man ihn als konstante Größe annähme. Tatsächlich aber verändert sich der Reibungskoeffizient im Lager in ziemlich weiten Grenzen mit der Veränderung der Winkelgeschwindigkeit der Welle, und durch die gewonnene Gleichung wird nur ein gewisser Mittelwert dieses Koeffizienten bestimmt. Bei der von uns beobachteten verlangsamten Drehung der Welle verändert sich der Reibungskoeffizient f ständig. Wir wollen sehen, wie die Werte des Koeffizienten f für verschiedene Werte der Winkelgeschwindigkeit ω auf Grund jener Beobachtungsdaten zu bestimmen sind, von denen am Anfang des Paragraphen die Rede war.

Wir kehren zur Differentialgleichung

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{f g r}{r_I^2}$$

zurück.

Die Ableitung $\frac{d\omega}{dt}$ ist nichts anderes als die Winkelbeschleunigung ε. Folglich ist

$$\varepsilon = -\frac{f g r}{r_I^2},$$

woraus

$$f = -\frac{\varepsilon r_I^2}{g r}$$

folgt.

Somit wird die Berechnung des Koeffizienten f auf die Berechnung der Winkelbeschleunigung ε zurückgeführt. Um zu erklären, auf welche Art man, wenn auch nur annähernd, die Winkelbeschleunigung ε berechnen kann, wollen wir ein Zahlenbeispiel wählen:

Bei einer experimentellen Bestimmung des Reibungskoeffizienten im Lager, die nach der angegebenen Art durchgeführt wurde, ist nach je 30 s die Anzahl der Umdrehungen der Welle vermerkt worden. Die beobachteten Umdrehungszahlen (d. h. die beobachteten Werte des Drehwinkels φ) sind in der Tabelle 10 angeführt.

Tabelle 10

t (min)	φ (Umdr.)	t (min)	φ (Umdr.)	t (min)	φ (Umdr.)	t (min)	φ (Umdr.)
0	0	5	2167	10	3486	15	4315
0,5	275	5,5	2328	10,5	3588	15,5	4379
1	535	6	2482	11	3685	16	4440
1,5	781	6,5	2629	11,5	3777	16,5	4497
2	1013	7	2769	12	3865	17	4550
2,5	1232	7,5	2902	12,5	3949	17,5	4598
3	1439	8	3029	13	4029	18	4640
3,5	1635	8,5	3150	13,5	4105	18,5	4673
4	1821	9	3267	14	4178	19	4697
4,5	1998	9,5	3379	14,5	4248		

Die Welle blieb nach 19 Minuten 14 Sekunden stehen, nachdem sie 4702 Umdrehungen gemacht hatte.

Wir wollen die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Welle im Zeitraum vom Augenblick $t = 0$ bis zum Augenblick $t = 0{,}5$ min ermitteln. Diese mittlere Winkelgeschwindigkeit ist gleich

$$\omega = \frac{275}{0{,}5} = 550 \text{ U/min}.$$

Wenn wir einen kleinen Fehler zulassen, können wir annehmen, daß die Winkelgeschwindigkeit der Welle in einem bestimmten Augenblick zwischen $t = 0$ und $t = 0{,}5$ min, und zwar zur Zeit $t = 0{,}25$ min, diesen Wert hatte. Genauso finden wir, daß im Augenblick $t = 0{,}75$ min die Winkelgeschwindigkeit der Welle (annähernd) gleich

$$\omega = \frac{535 - 275}{0{,}5} = 520 \text{ U/min}$$

war.

Wir wollen nun die mittlere Winkelbeschleunigung der Welle im Zeitraum zwischen $t = 0{,}25$ min und $t = 0{,}75$ min ermitteln. Es gilt:

$$\varepsilon = \frac{520 - 550}{0{,}5} = -60 \text{ U/min}^2.$$

Wenn wir wieder einen kleinen Fehler zulassen, nehmen wir an, daß dies die Winkelbeschleunigung der Welle zwischen $t = 0{,}25$ min und $t = 0{,}75$ min war, d. h. zur Zeit $t = 0{,}5$ min. Durch Interpolation können wir auch die Winkelgeschwindigkeit, die diesem Augenblick entspricht, bestimmen; sie ist gleich

$$\omega = \frac{550 + 520}{2} = 535 \text{ U/min}.$$

Also entspricht (annähernd) dem Augenblick $t = 0{,}5$ min die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 535$ U/min und die Winkelbeschleunigung $\varepsilon = -60$ U/min². Auf die gleiche Art können wir die Werte der Winkelgeschwindigkeit und der Winkelbeschleunigung für die Augenblicke $t = 1$ min, 1,5 min, 2 min usw. errechnen. Die Resultate der Berechnungen sind in der Tabelle 11 angeführt.

Tabelle 11

t (min)	ω (U/min)	ε (U/min²)	t (min)	ω (U/min)	ε (U/min²)
0,5	535	— 60	10	209	— 20
1	506	— 56	10,5	199	— 20
1,5	478	— 56	11	189	— 20
2	451	— 52	11,5	180	— 16
2,5	426	— 48	12	172	— 16
3	403	— 44	12,5	164	— 16
3,5	382	— 40	13	156	— 16
4	363	— 36	13,5	149	— 12
4,5	346	— 32	14	143	— 12
5	330	— 32	14,5	137	— 12
5,5	315	— 28	15	131	— 12
6	301	— 28	15,5	125	— 12
6,5	287	— 28	16	118	— 16
7	273	— 28	16,5	110	— 16
7,5	260	— 24	17	101	— 20
8	248	— 24	17,5	90	— 24
8,5	238	— 16	18	75	— 36
9	229	— 20	18,5	57	— 36
9,5	219	— 20			

Schon der Verlauf der Änderung der Winkelbeschleunigung ε weist darauf hin, daß sich bei Verringerung der Winkelgeschwindigkeit der Reibungskoeffizient zuerst verringert, danach aber (bei kleinen Winkelgeschwindigkeiten) wieder anwächst. Um die Größe des Koeffizienten f nach der Gleichung

$$f = -\frac{\varepsilon r_I^2}{g r}$$

zu berechnen, muß man natürlich die Winkelbeschleunigung ε in absoluten Einheiten ausdrücken. Bei dem durchgeführten Experiment war $r = 6$ cm, $r_I = 36{,}4$ cm; mit diesen Daten ergibt sich $f = -0{,}225\,\varepsilon$, wobei ε die Dimension $\frac{1}{\text{s}^2}$ haben muß. Bei $\omega = 535$ U/min ist $\varepsilon = -60$ U/min² $= -1{,}105\,\frac{1}{\text{s}^2}$, und folglich ist

$$f = 0{,}225 \cdot 0{,}105 = 0{,}024\,.$$

Bei $\omega = 137$ U/min haben wir $\varepsilon = -12$ U/min² $= -0{,}021\ \frac{1}{s^2}$, woraus $f = 0{,}0047$ folgt.

In der Abb. 155 ist die Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten f von der Winkelgeschwindigkeit der Welle graphisch dargestellt. Die auf die angegebene Weise be-

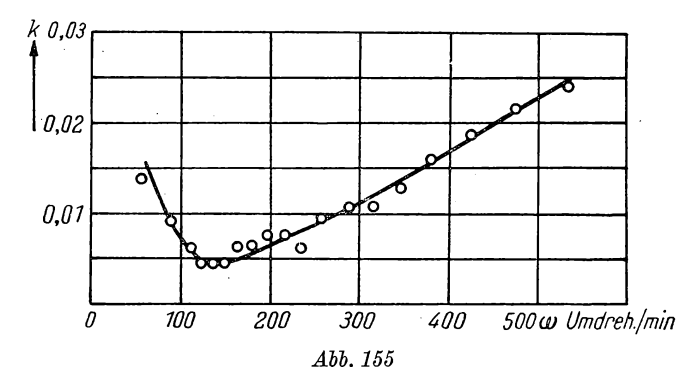


Abb. 155

rechneten Werte des Koeffizienten f sind mit Punkten bezeichnet; die stetige Kurve, die durch die konstruierten Punkte gelegt ist, stellt die Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten f von der Winkelgeschwindigkeit ω dar.

§ 95. Die Bestimmung der Trägheitsmomente nach dem Schwingungsverfahren

Eine der Methoden der experimentellen Bestimmung der Trägheitsmomente starrer Körper besteht darin, daß der zu untersuchende Körper so aufgehängt wird, daß er in Form eines Pendels um die Achse schwingen kann, bezüglich der das Trägheitsmoment bestimmt werden soll. Wenn man die Schwingungsdauer des Körpers mißt, kann man daraus das gesuchte Trägheitsmoment bestimmen.

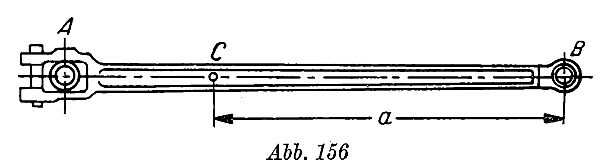


Abb. 156

Wir nehmen an, daß das Trägheitsmoment der Kurbelstange AB einer Dampfmaschine in bezug auf die Achse B des Kreuzkopfzapfens bestimmt werden soll (Abb. 156). Die Kurbelstange AB wird so aufgehängt, daß die Achse B horizontal verläuft. Diese Achse wird starr befestigt (Abb. 157). Wenn man nun die Kurbelstange aus ihrer senkrechten Gleichgewichtslage lenkt, wird sie wie ein Pendel schwingen, wobei sie sich um die Achse B dreht. Wir wollen die Schwingungsdauer der kleinen Schwingungen der Kurbelstange berechnen.

Wir werden nun die Differentialgleichung der Schwingungen unserer Kurbelstange aufstellen und dazu die Differentialgleichung der Drehbewegung des starren Körpers benutzen.

Wir bezeichnen das Gewicht der Kurbelstange mit P, den Abstand BC ihres Schwerpunktes C von der Achse B mit a und das gesuchte Trägheitsmoment mit J. Die an der Kurbelstange AB angreifenden äußeren Kräfte sind: die Schwerkraft $\mathfrak{P}$ und die Reaktion der festen Achse B. Das Moment dieser Reaktion in bezug auf die Achse B ist gleich Null, das Moment der Schwerkraft $\mathfrak{P}$ in bezug auf dieselbe Achse ist gleich $-Pa \sin \varphi$, wobei φ der von der Geraden BC mit der Vertikalen gebildete Winkel ist (d. h. der Winkel der Abweichung der Kurbelstange von der Gleichgewichtslage). Nehmen wir den Winkel φ als Drehwinkel an, so erhalten wir die Differentialgleichung der Drehbewegung

$$J \ddot{\varphi} = - P a \sin \varphi ,$$

durch welche die Schwingungen der Kurbelstange bestimmt werden.

Im Fall von Schwingungen mit kleiner Amplitude können wir annähernd $\sin \varphi = \varphi$ setzen und erhalten damit die Gleichung

$$J \ddot{\varphi} + P a \varphi = 0$$

oder

$$\ddot{\varphi} + \frac{P a}{J} \varphi = 0 .$$

Abb. 157

Die Gleichung dieser Form ist uns aus der Theorie der freien Schwingungen des materiellen Punktes bekannt (s. § 31). Dieser Gleichung entsprechen harmonische Schwingungen, deren Frequenz k gleich

$$k = \sqrt{\frac{P a}{J}}$$

ist.

Folglich wird die Schwingungsdauer T der kleinen Schwingungen der Kurbelstange durch die Gleichung

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{J}{P a}}$$

bestimmt.

Wenn wir hier $J = \frac{P}{g} r_I^2$ annehmen, wobei r_I der Trägheitsradius der Kurbelstange in bezug auf die Achse B ist, dann gilt:

$$T = \frac{2 \pi r_I}{\sqrt{g a}} .$$

Hieraus folgt, daß wir, wenn wir die Größe a kennen und aus Beobachtungen die Schwingungszeit T bestimmt haben, den Trägheitsradius r_I nach

$$r_I = T\frac{\sqrt{g\,a}}{2\,\pi}$$

bestimmen können.

Haben wir r_I bestimmt und kennen wir das Gewicht P, so finden wir das gesuchte Trägheitsmoment der Kurbelstange nach der Gleichung

$$J = \frac{P}{g}\,r_I^2\,.$$

Wir wenden diese Erwägungen auf ein Zahlenbeispiel an und nehmen an, daß $P = 94$ kg, $a = 121{,}55$ cm ist; die beobachtete Anzahl von Schwingungen in der Minute war gleich $23^3/_4$. Hieraus erhalten wir:

$$T = \frac{60}{23{,}75} = 2{,}53\,\mathrm{s}$$

und damit aus obigen Gleichungen

$$r_I = 139\,\mathrm{cm}\,, \qquad J = 18{,}5\,\mathrm{kg\,cm\,s^2}\,.$$

§ 96. Der Momentensatz bei der Relativbewegung eines Systems in bezug auf sein Trägheitszentrum

Wir haben bereits im § 74 gesehen, daß es in einigen Fällen zweckmäßig ist, die absolute Bewegung eines Systems als aus der Translativbewegung „zusammen mit dem Trägheitszentrum" und der Relativbewegung „in bezug auf das Trägheitszentrum" zusammengesetzt zu betrachten. Wir erinnern daran, daß wir unter der Relativbewegung „in bezug auf das Trägheitszentrum" die Relativbewegung eines Systems in bezug auf die sich zusammen mit dem Trägheitszentrum *fortschreitend* bewegenden Achsen verstehen.

Die Dynamik der Relativbewegung wurde von uns im Kapitel VIII betrachtet. Wenn (wie im gegebenen Fall) die Translativbewegung eine fortschreitende ist, können wir die Relativbewegung des materiellen Punktes unter der Bedingung als absolute Bewegung betrachten, daß die Wirkung der translativen Trägheitskraft zu der Wirkung der äußeren Kräfte hinzugefügt wird. Dann dürfen wir alle jene Resultate, die wir für die absolute Bewegung des Systems ermittelt haben, bei der Relativbewegung des Systems „in bezug auf das Trägheitszentrum" anwenden, wenn wir die translativen Trägheitskräfte zu den auf alle Punkte unseres Systems einwirkenden Kräften hinzufügen

Wir greifen aus diesen Resultaten den Momentensatz heraus und wenden ihn bei der Relativbewegung des Systems in bezug auf sein Trägheitszentrum an.

Wir stellen uns ein sich bewegendes mechanisches System $M_1, M_2, \ldots, M_n$ vor und bezeichnen sein Trägheitszentrum mit C (Abb. 158). Wir legen durch den Punkt C die zueinander senkrechten Achsen ξ, η, ζ und stellen uns vor, daß diese Achsen sich zusammen mit dem Punkte C fortschreitend bewegen; dabei werden wir annehmen, daß die Achsen ξ, η, ζ parallel zu den festen Achsen x, y und z bleiben. Wir wollen die Relativbewegung unseres Systems in bezug auf die Achsen ξ, η, ζ betrachten (in der Abb. 158 sind die relativen Bewegungsbahnen der Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ gekenn-

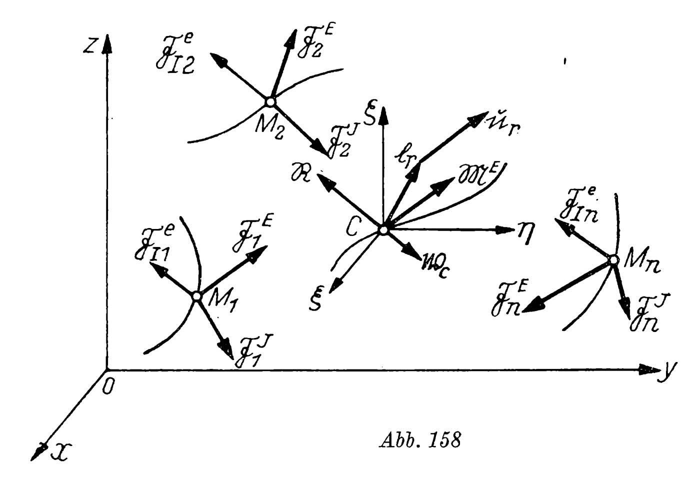


Abb. 158

zeichnet; diese Kurven sind unveränderlich mit den Achsen ξ, η, ζ verbunden und nehmen an deren fortschreitender Bewegung teil). Wir bezeichnen die äußeren Kräfte, die an den Punkten des Systems angreifen, mit $\mathfrak{F}_1^E, \mathfrak{F}_2^E, \ldots, \mathfrak{F}_n^E$ und die inneren Kräfte mit $\mathfrak{F}_1^J, \mathfrak{F}_2^J, \ldots, \mathfrak{F}_n^J$.

Wenn wir auf die Relativbewegung unseres Systems den Momentensatz anwenden wollen, müssen wir zu den wirkenden äußeren Kräften die translativen Trägheitskräfte $\mathfrak{F}_{I1}^e, \mathfrak{F}_{I2}^e, \ldots, \mathfrak{F}_{In}^e$ hinzufügen. Da die translativen Beschleunigungen aller Systempunkte gleich der Beschleunigung $\mathfrak{w}_c$ des Punktes C sind, so sind die erwähnten translativen Trägheitskräfte gleich

$$\mathfrak{F}_{I1}^e = -m_1 \mathfrak{w}_c, \qquad \mathfrak{F}_{I_2}^e = -m_2 \mathfrak{w}_c, \ \ldots, \qquad \mathfrak{F}_{In}^e = -m_n \mathfrak{w}_c.$$

Nach dem Momentensatz ist die zeitliche Ableitung des Hauptmomentes der Bewegungsgröße des Systems (in seiner Relativbewegung) in bezug auf irgendeine Achse gleich der Summe der Momente aller äußeren Kräfte, zu denen auch die translativen Trägheitskräfte in bezug auf dieselbe Achse hinzugezählt werden müssen. Natürlich wird die Bezugsachse dabei als mit den Achsen ξ, η, ζ fest verbunden vorausgesetzt, so daß sie an der fortschreitenden Bewegung dieser Achsen teilnimmt. Wir werden zeigen, daß die Summe der Momente aller translativen Trägheitskräfte in bezug auf diese Achse gleich Null ist, wenn die Achsen, auf welche die Momente bezogen werden, durch das Trägheitszentrum C hindurchgehen.

Aus der Statik des starren Körpers ist bekannt, daß die Summe der Momente der Komponenten gleich dem Moment der Resultierenden ist. Wenn man aber die Kräfte $\mathfrak{F}^e_{I1}, \mathfrak{F}^e_{I2}, \ldots, \mathfrak{F}^e_{In}$ nach den Regeln der Statik addiert und im Auge behält, daß alle diese Kräfte parallel und proportional den Massen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ der Systempunkte sind, finden wir (genauso wie im analogen Fall im § 59), daß die Resultierende der Kräfte $\mathfrak{F}^e_{I1}, \mathfrak{F}^e_{I2}, \ldots, \mathfrak{F}^e_{In}$ gleich ihrer Summe $M\,\mathfrak{w}_c$ ist, wobei M die im Trägheitszentrum C konzentriert gedachte Masse des ganzen Systems ist. Hieraus folgt, daß das Moment dieser Resultierenden in bezug auf jede durch das Trägheitszentrum hindurchgehende Achse gleich Null ist.

Wenn wir also die Momentenbezugsachse so wählen, daß sie durch das Trägheitszentrum C hindurchgeht, dann wird das ergänzende Glied im Momentensatz, das von den translativen Trägheitskräften abhängt, zu Null. Der Momentensatz hat dann die gleiche Form wie bei der absoluten Bewegung des Systems.

Wählen wir z. B. die ζ-Achse als Momentenbezugsachse. Wenn wir den Gesamtdrehimpuls des Systems (in ihrer Relativbewegung) in bezug auf diese Achse mit $L_{r\zeta}$ und die Momente der Kräfte $\mathfrak{F}^E_1, \mathfrak{F}^E_2, \ldots, \mathfrak{F}^E_n$ in bezug auf dieselbe Achse mit $M^E_{1\zeta}, M^E_{2\zeta}, \ldots, M^E_{n\zeta}$ bezeichnen, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}L_{r\zeta}}{\mathrm{d}t} = \sum M^E_{i\zeta}.$$

Wir gehen nun zur zweiten Formulierung des Momentensatzes über.

Wir bezeichnen den Gesamtdrehimpuls (natürlich in der Relativbewegung des Systems) in bezug auf den Punkt C mit $\mathfrak{L}_r$. Da die Summe der Momente der Kräfte $\mathfrak{F}^e_{I1}, \mathfrak{F}^e_{I2}, \ldots, \mathfrak{F}^e_{In}$ in bezug auf den Punkt C gleich dem Moment ihrer Resultierenden in bezug auf denselben Punkt ist, dieses Moment aber in bezug auf das relative Trägheitszentrum gleich Null ist, so ist folglich auch das zusätzliche Glied, das von den translativen Trägheitskräften abhängt, Null. Bezeichnen wir die relative Geschwindigkeit des Endpunktes des Momentenvektors $\mathfrak{L}_r$ mit $\mathfrak{u}_r$ und das Hauptmoment der äußeren Kräfte $\mathfrak{F}^E_1, \mathfrak{F}^E_2, \ldots, \mathfrak{F}^E_n$ in bezug auf den Punkt C mit $\mathfrak{M}^E$, so erhalten wir

$$\mathfrak{u}_r = \mathfrak{M}^E.$$

Also bleibt der Momentensatz ohne jede Veränderung bei der von uns betrachteten Relativbewegung des Systems unter der Bedingung anwendbar, daß die Momentenbezugsachse (in der ersten Formulierung dieses Satzes) durch das Trägheitszentrum des Systems hindurchgeht und das Momentenzentrum (in der zweiten Formulierung) mit dem Trägheitszentrum zusammenfällt.

§ 97. Einige Schlußfolgerungen aus dem Momentensatz

Wir stellen uns ein kräftefreies mechanisches System vor, d. h. ein System, auf das keinerlei äußere Kräfte einwirken. Im § 85 haben wir gesehen, daß das Trägheitszentrum eines solchen Systems sich geradlinig und gleichförmig bewegen muß.

Wenn wir die Relativbewegung des kräftefreien Systems in bezug auf sein Trägheitszentrum betrachten, müssen wir die weitere Schlußfolgerung ziehen, daß das Hauptmoment der Impulse des Systems in dieser ihrer Relativbewegung, bezüglich des Trägheitszentrums nach Größe und Richtung konstant bleiben muß.

Tatsächlich verschwindet das Hauptmoment $\mathfrak{M}^E$ der äußeren Kräfte in bezug auf das Trägheitszentrum, wenn äußere Kräfte fehlen. Aus dem Momentensatz (in seiner zweiten Formulierung) folgt, daß die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{u}_r$ des Endpunktes des Drehimpulsvektors bezüglich des Trägheitszentrums gleich Null ist. Das bedeutet, daß das Hauptmoment $\mathfrak{L}_r$ seine konstante Größe und unveränderliche Richtung beibehält. Ein Beispiel für ein kräftefreies System ist das Sonnensystem. Die Ebene, die durch das Trägheitszentrum des Sonnensystems hindurchgeht und senkrecht zu der unveränderlichen Richtung des Hauptmomentes der Bewegungsgrößen des Sonnensystems läuft, wurde von Laplace „unveränderliche Ebene“ genannt.

Das Hauptmoment $\mathfrak{M}^E$ der äußeren Kräfte bezüglich des Trägheitszentrums wird auch in dem Fall zu Null, wenn die Schwerkraft die einzige am System angreifende äußere Kraft ist. Folglich müssen wir auch in diesem Fall die Schlußfolgerung von der Unveränderlichkeit der Größe und der Richtung des Gesamtdrehimpulses $\mathfrak{L}_r$ des Systems bezüglich des Trägheitszentrums ziehen; das Hauptmoment der Bewegungsgrößen in bezug auf eine beliebige Achse, die durch das Trägheitszentrum hindurchgeht, muß ebenfalls ihre konstante Größe bewahren. Im § 85 haben wir gesehen, daß der einen Sprung ausführende Turner durch keinerlei Körperbewegungen die parabolische Bewegung seines Schwerpunktes verändern kann. Nun können wir hinzufügen, daß es keinerlei Körperbewegungen dem Turner gestatten werden, während des Sprunges das Hauptmoment $\mathfrak{L}_r$ der Bewegungsgrößen in bezug auf seinen Schwerpunkt zu verändern.

Stellen wir uns einen Tänzer vor, der in der Luft eine Pirouette ausführt. Wir bezeichnen die Winkelgeschwindigkeit bei der Drehung des Körpers des Tänzers um die vertikale Achse ζ, die durch seinen Schwerpunkt hindurchgeht, mit ω, das Trägheitsmoment des Körpers des Tänzers in bezug auf dieselbe Achse mit J. In einem solchen Falle hat das Hauptmoment $L_{r\zeta}$ der Bewegungsgrößen in bezug auf die Achse ζ die Größe

$$L_{r\zeta} = J\,\omega\,.$$

Diese Größe bleibt während des Sprunges konstant. Der Tänzer kann die Winkelgeschwindigkeit ω verändern, wenn er das Trägheitsmoment J verändert (wenn er die Arme streckt oder einzieht); aber wenn im Anfangsaugenblick $\omega = 0$ war, dann bleibt während der ganzen Zeit des Sprunges die Winkelgeschwindigkeit gleich Null.

Um eine Pirouette zu machen, muß sich der Tänzer eine gewisse Winkelgeschwindigkeit im Augenblick des Ablösens vom Fußboden geben.

Kann ein Mensch, der unbeweglich auf einer absolut glatten horizontalen Ebene steht, sich um eine vertikale Achse drehen, die durch seinen Schwerpunkt hindurchgeht? Auf den ersten Blick — nein: Die einzigen äußeren Kräfte, die am Körper des Menschen angreifen, sind die Schwerkraft und die vertikale Reaktion der Ebene; die Momente dieser beiden Kräfte in bezug auf die durch den Schwerpunkt des Körpers des Menschen hindurchgehende vertikale Achse ζ sind gleich Null, woraus folgt, daß die

Größe $L_{r\zeta} = J\omega$ (wobei J das Trägheitsmoment des Körpers des Menschen in bezug auf die Achse ζ und ω seine Winkelgeschwindigkeit ist) ihren konstanten Wert beibehält. Wenn im Anfangsaugenblick $\omega = 0$ ist, bleibt die Winkelgeschwindigkeit beständig gleich Null.

Jetzt stellen wir uns jedoch vor, daß ein auf einer glatten horizontalen Ebene stehender Mensch den Arm über seinen Kopf dreht, indem er mit ihm Kreise in der horizontalen Ebene beschreibt. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment des Armes in bezug auf die Achse ζ mit J_1 und das Trägheitsmoment des übrigen Körpers mit J_2, die Winkelgeschwindigkeit des Armes und des Körpers entsprechend mit ω_1 und ω_2, so erhalten wir:

$$L_{r\zeta} = J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2 = 0 .$$

Für $\omega_1 < 0$ folgt $\omega_2 > 0$; das bedeutet, daß sein Körper sich um die Achse ζ im Uhrzeigersinn drehen wird, wenn der Mensch seinen Arm entgegen dem Uhrzeigersinn dreht. Natürlich sind die Zahlenwerte der Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 umgekehrt proportional den Trägheitsmomenten J_1 und J_2.

Auf ähnliche Weise hätte sich der Tänzer, von dem weiter oben die Rede war, eine (allerdings unbedeutende) Winkelgeschwindigkeit während seines Sprunges mitteilen können. Auf analoge Art erklärt sich auch die Fähigkeit einer Katze, während des Fallens sich umzudrehen, wenn sie mit den Pfoten nach oben aus einer gewissen Höhe herabfällt.

§ 98. Die Differentialgleichungen der ebenen Bewegung eines starren Körpers

Wir stellen uns einen starren Körper vor, der eine Bewegung in der Ebene ausführt. Wir nehmen jene Ebene als Zeichnungsebene an, die durch das Trägheitszentrum des Körpers hindurchgeht und in der die Bewegung des Körpers stattfindet. Als Schnitt dieses Körpers mit der Ebene erhalten wir eine ebene Figur, zu der auch das Trägheitszentrum C des Körpers gehört (Abb. 159). Wir zerlegen die absolute Bewegung des Körpers in die Translationsbewegung „zusammen mit dem Trägheitszentrum" und in die Relativbewegung „in bezug auf das Trägheitszentrum". Die erste dieser Bewegungskomponenten ist eine fortschreitende Bewegung, die zweite eine Rotation um die Achse, die durch das Zentrum C hindurchgeht und senkrecht zur Zeichnungsebene steht. Die fortschreitende Bewegung zusammen mit dem Trägheitszentrum ist vollständig bestimmt, wenn die Koordinaten x_c und y_c des Trägheitszentrums, bezogen auf die festen Achsen x und y, als Funktionen der Zeit bekannt sind; der drehende Teil der Bewegung des Körpers aber wird durch das Vorgeben des Drehwinkels φ als Funktion der Zeit bestimmt. Also wird die ebene Bewegung des Körpers voll und ganz durch das Vorgeben der drei Größen x_c, y_c und φ als Funktionen der Zeit bestimmt:

$$x_c = f_1(t), \qquad y_c = f_2(t), \qquad \varphi = f_3(t).$$

Wir wollen nun voraussetzen, daß uns die auf den gegebenen Körper einwirkenden Kräfte gegeben sind und wollen sehen, wie die Größen x_c, y_c und φ als Funktionen

der Zeit zu bestimmen sind. Zur Bestimmung der Koordinaten x_c und y_c des Trägheitszentrums benutzen wir das Gesetz von der Bewegung des Trägheitszentrums. Nach diesem Gesetz ist

$$M\ddot{x}_c = \sum X_i^E, \qquad M\ddot{y}_c = \sum Y_i^E,$$

wobei M die Masse des Körpers ist und ΣX_i^E und ΣY_i^E die Summen der Komponenten der äußeren an diesem angreifenden Kräfte auf der x- bzw. y-Achse sind.

Zur Bestimmung des Drehwinkels φ benutzen wir den Momentensatz der Relativbewegung des Körpers in bezug auf sein Trägheitszentrum. Bezeichnen wir die durch das Trägheitszentrum C gehende Achse, die senkrecht zu der Zeichnungsebene verläuft, mit ζ, so folgt:

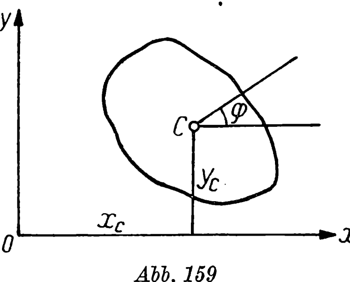


Abb. 159

$$\frac{\mathrm{d}\,L_{r\zeta}}{\mathrm{d}\,t} = \sum M_{i\zeta}^E,$$

wobei $L_{r\zeta}$ das Hauptmoment der Bewegungsgrößen in bezug auf die Achse ζ und $\Sigma M_{i\zeta}^E$ die Summe der Momente der an dem Körper angreifenden Kräfte in bezug auf dieselbe Achse ist.

Nun ist aber die Relativbewegung des Körpers in bezug auf das Trägheitszentrum die Rotation um die Achse ζ. Eingedenk des im § 93 bei der Betrachtung der rotierenden Bewegung eines starren Körpers aufgestellten Resultates schließen wir, daß

$$L_{r\zeta} = J_c\,\omega$$

ist, wobei J_c das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Achse ζ und ω seine Winkelgeschwindigkeit ist. Somit stellen wir aus der Gleichung, die den Momentensatz ausdrückt, die Differentialgleichung der Rotation um die Achse ζ auf:

$$J_c \frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t} = \sum M_{i\zeta}^E.$$

Wenn wir noch im Auge behalten, daß $\omega = \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,t}$ ist, kommen wir endgültig zu den folgenden *Differentialgleichungen der ebenen Bewegung eines starren Körpers:*

$$M\ddot{x}_c = \sum X_i^E,$$

$$M\ddot{y}_c = \sum Y_i^E,$$

$$J_c\ddot{\varphi} = \sum M_{i\zeta}^E.$$

Durch Integration dieser Gleichungen können wir die Größen x_c, y_c und φ als Funktionen der Zeit bestimmen. Dies sind die Differentialgleichungen der ebenen Bewegung eines starren Körpers.

§ 99. Die Bewegung eines Radsatzes

Als Beispiel für die Anwendung der Differentialgleichungen der ebenen Bewegung eines starren Körpers wollen wir die Frage nach der Bewegung eines Radsatzes behandeln, die bereits im § 78 berührt worden ist.

An der Achse eines Radsatzes, der sich auf einem horizontalen Schienenstrang befindet, greift die horizontale Kraft $\mathfrak{F}$ an (Abb. 160). Wir bezeichnen das Gewicht des Radsatzes mit $\mathfrak{P}$, den Radius der Räder mit a, den Trägheitsradius des Satzes in bezug auf seine Achse mit r_I. Wir nehmen an, daß sich der Radsatz im Anfangsaugenblick in Ruhe befand und wollen klarstellen, ob der Radsatz unter der Einwirkung der Kraft $\mathfrak{F}$ ohne zu gleiten rollen wird oder ob ein Gleiten der Räder auf den Schienen stattfinden wird.

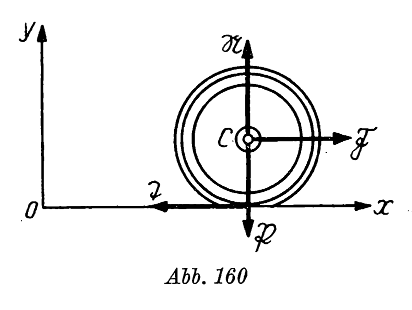


Abb. 160

Um diese Frage zu beantworten, stellen wir die Differentialgleichung der Bewegung des Radsatzes auf. Wir richten die x-Achse längs des Schienenstranges und die y-Achse vertikal nach oben. Wenn wir beachten, daß die an dem Radsatz angreifenden äußeren Kräfte die Kraft $\mathfrak{F}$, das Gewicht $\mathfrak{P}$ des Satzes, die Normalreaktion $\mathfrak{N}$ der Schienen und die Reibungskraft $\mathfrak{T}$ (den Rollwiderstand werden wir vernachlässigen) sind, erhalten wir die Differentialgleichungen der Bewegung des Radsatzes

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_c &= F - T, \\ m\ddot{y}_c &= N - P, \\ m r_I^2 \dot{\omega} &= - T a, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wobei m die Masse des Radsatzes ist.

Da die Koordinate $y_c = a$ eine konstante Größe ist, wird $\ddot{y}_c = 0$, und aus der zweiten Gleichung erhalten wir $N = P$.

Wir setzen nun voraus, daß der Radsatz unter der Einwirkung der Kraft $\mathfrak{F}$ ohne zu gleiten rollt. In dem Falle erscheint der Berührungspunkt des Rades mit den Schienen als momentanes Geschwindigkeitszentrum der Bewegung des Rades. Da die Geschwindigkeit des Zentrums des Rades $\dot{x}_c$ die Rotationsgeschwindigkeit um das momentane Geschwindigkeitszentrum sein muß, erhalten wir

$$\dot{x}_c = - a\omega .$$

Diese Abhängigkeit zwischen $\dot{x}_c$ und ω gestattet, die Kraft T für den Fall zu bestimmen, in dem der Radsatz ohne zu gleiten rollt. Differenzieren wir die letzte Gleichung nach der Zeit, so erhalten wir $\ddot{x}_c = - a\dot{\omega}$. Die Substitution dieses Ausdrucks für $\ddot{x}_c$ in der ersten Gl. (1) führt zu der Gleichung

$$- m a \dot{\omega} = F - T .$$

Wir multiplizieren nun diese Gleichung mit r_I^2 und fügen die dritte Gl. (1) hinzu, nachdem wir vorher letztere mit a multipliziert haben. Dann wird die Größe $\dot{\omega}$ eliminiert, und wir erhalten

$$F r_I^2 - T(r_I^2 + a^2) = 0$$

und daraus:

$$T = F \frac{r_I^2}{a^2 + r_I^2}.$$

Dies ist die Reibungskraft T für den Fall, daß der Radsatz ohne zu gleiten rollt. Die Reibungskraft T aber muß die Ungleichung $T \leqslant fN$ befriedigen oder, da $N = P$ ist,

$$T \leqslant f P,$$

wobei f der Reibungskoeffizient zwischen dem Rade und der Schiene ist. Hieraus erhalten wir die Bedingung

$$F \frac{r_I^2}{a^2 + r_I^2} \leqslant f P$$

oder

$$F \leqslant f P \frac{a^2 + r_I^2}{r_I^2}.$$

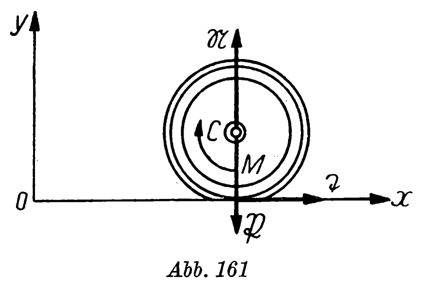


Abb. 161

Somit hängt die Art der Antwort auf die am Anfang dieses Paragraphen gestellte Frage von der Größe der am Radsatz angreifenden Kraft $\mathfrak{F}$ ab. Wenn die Kraft $\mathfrak{F}$ den soeben gewonnenen Grenzwert nicht übersteigt, wird der Radsatz ohne zu gleiten rollen; andernfalls wird er unter gleichzeitigem Gleiten auf den Schienen rollen. Für einen Radsatz, bei dem $P = 1000$ kg, $r_I^2 = 0{,}55\, a^2$ und $f = 0{,}24$ ist, hat der Grenzwert der Kraft F den Wert

$$f P \cdot \frac{a^2 + r_I^2}{r_I^2} = 675 \text{ kg}.$$

Genauso kann die Frage von der Bewegung eines Radsatzes betrachtet werden, wenn anstatt der Kraft $\mathfrak{F}$ irgendein Drehmoment $\mathfrak{M}$ angreift (Abb. 161); unter ähnlichen Bedingungen befinden sich die Treibräder der Lokomotive. Nun erscheinen als äußere Kräfte ein Kräftepaar mit dem Moment $\mathfrak{M}$, die Schwerkraft $\mathfrak{P}$, die Normalreaktion $\mathfrak{N}$ der Schienen und die Reibungskraft $\mathfrak{T}$ (es muß vermerkt werden, daß in der Abb. 161 die Reibungskraft $\mathfrak{T}$ eine Richtung hat, die der von Abb. 160 entgegengesetzt verläuft). Die Differentialgleichungen lauten also

$$m \ddot{x}_C = T,$$

$$m r_I^2 \dot{\omega} = T a - M,$$

wobei $N = P$ ist.

Wenn der Radsatz ohne zu gleiten rollt, ist $\ddot{x}_c = -a\,\dot{\omega}$. Setzen wir dies ein und eliminieren $\dot{\omega}$, so erhalten wir:

$$T(a^2 + r_I^2) - M a = 0$$

und hieraus

$$T = \frac{M a}{a^2 + r_I^2}.$$

Dies ist der Wert der Reibungskraft T für den Fall, daß der Radsatz ohne zu gleiten rollt. Hieraus erhalten wir, wenn wir die Ungleichung

$$T \leqslant f P$$

benutzen, die Bedingung

$$M \leqslant f P \frac{a^2 + r_I^2}{a}.$$

Wenn die Größe des Drehmomentes M den soeben gewonnenen Grenzwert übersteigt, wird ein Gleiten der Räder auf den Schienen unvermeidlich. Bei $P = 1000$ kg, $a = 50$ cm, $r_I^2 = 0{,}55\,a^2$ und $f = 0{,}24$ ist der Grenzwert des Drehmomentes, bei dem ein Gleiten der Räder eintritt, gleich

$$f P \cdot \frac{a^2 + r_I^2}{a} = 186 \text{ kg m}.$$

Wir haben die Bedingungen der Bewegung eines einzelnen Radsatzes betrachtet. Ganz ebenso kann man die Bewegung eines Radsatzes untersuchen, der zu irgendeinem Fahrzeug gehört. Wir wollen uns noch mit der Ermittlung der Bedingungen beschäftigen, bei welchen ein Gleiten der Treibräder eines Motorfahrzeuges eintritt, z. B. der Treibräder einer Lokomotive.

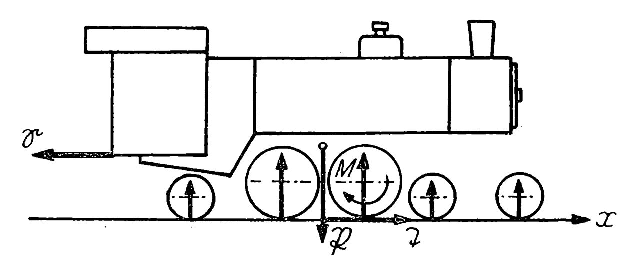


Abb. 162

Der Einfachheit halber wollen wir voraussetzen, daß die Lokomotive nur ein Paar Treibräder besitzt, an denen das Drehmoment $\mathfrak{M}$ angreift (Abb. 162).

Wir richten die x-Achse längs des horizontalen Schienenstranges und stellen die Differentialgleichung der Bewegung des Schwerpunktes der Lokomotive auf. Die an der Lokomotive angreifenden äußeren Kräfte sind ihr Gewicht $\mathfrak{P}$, die Reaktion der Schienen, die Reibungskraft $\mathfrak{T}$, die an den Treibrädern angreift (die an

den übrigen Rädern angreifenden Reibungskräfte werden wir vernachlässigen) und die Widerstandskraft $\mathfrak{S}$ des Zuges, dem die Lokomotive vorgespannt ist (das ist die sogenannte Haken-Zugkraft). Bezeichnen wir die Masse der Lokomotive mit m_1, so gilt die Differentialgleichung der Bewegung

$$m_1 \ddot{x}_c = T - S.$$

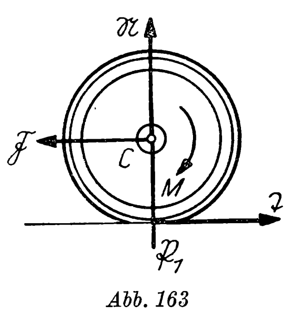


Abb. 163

Wir wollen auch die Differentialgleichung der Rotation des treibenden Radsatzes aufstellen. Die auf diesen Radsatz einwirkenden äußeren Kräfte sind (Abb. 163): die Belastung $\mathfrak{P}_1$ auf den Radsatz (dies ist das sogenannte Kuppelgewicht der Lokomotive; zu ihm gehört auch das Gewicht $\mathfrak{p}$ des Radsatzes selbst), die Reaktion $\mathfrak{N}$ der Schienen, die Reibungskraft $\mathfrak{T}$, die horizontale Reaktion $\mathfrak{F}$ der Lager und das Drehmoment $\mathfrak{M}$ (die Reibung in den Lagern sowie den Rollwiderstand vernachlässigen wir). Bezeichnen wir die Masse des Radsatzes mit m_2, den Radius der Räder mit a und den Trägheitsradius des Radsatzes in bezug auf seine Achse mit r_I, so gilt die Differentialgleichung der Rotation

$$m_2 r_I^2 \dot{\omega} = T a - M.$$

Bei Gleitfreiheit ist $\ddot{x}_c = - a \dot{\omega}$. Wenn wir, wie früher, mit Hilfe dieser Beziehung die Größe $\dot{\omega}$ eliminieren, finden wir:

$$m_1 a (T a - M) + m_2 r_I^2 (T - S) = 0$$

und hieraus:

$$T = \frac{m_1 a M + m_2 r_I^2 S}{m_1 a^2 + m_2 r_I^2} = \frac{P a M + p r_I^2 S}{P a^2 + p r_I^2}. \tag{1}$$

Die Ungleichung $T \leqslant f P_1$, wobei f der Reibungskoeffizient zwischen den Rädern und den Schienen ist, führt zu der Bedingung

$$\frac{M}{a} \leqslant f P_1 \left(1 + \frac{p r_I^2}{P a^2}\right) - S \frac{p r_I^2}{P a^2}.$$

Durch diese Ungleichung wird der Grenzwert des Drehmomentes M bestimmt, bei dem ein Gleiten der Laufräder eintritt. Wir sehen, daß beim Anfahren $\ddot{x}_c > 0$ sein muß und folglich $T > S$. Setzen wir hier den Wert T aus der Gl. (1) ein, so erhalten wir:

$$\frac{M}{a} > S.$$

Also muß, damit beim Anfahren kein Gleiten der Laufräder stattfindet, das Drehmoment M folgende Bedingungen erfüllen:

$$S < \frac{M}{a} \leqslant f P_1 \left(1 + \frac{p r_I^2}{P a^2}\right) - S \frac{p r_I^2}{P a^2}.$$

Natürlich ist eine Erfüllung dieser Ungleichungen nur in dem Falle möglich, in dem

$$f P_1 > S \quad \text{ist.}$$

Eine Erhöhung der Grenze, bei der ein Gleiten eintritt, wird durch die Erhöhung des Kuppelgewichtes P_1 erreicht (eine schwere Lokomotive, mehrere Paare Treibräder) und gleichfalls durch die Erhöhung des Reibungskoeffizienten f, wozu im Bedarfsfall die Schienen mit Sand bestreut werden.

Die bewegende Kraft einer Lokomotive ist die Reibungskraft $\mathfrak{T}$ (dies ist die sogenannte Zugkraft auf dem Radkranz). Wir wollen sehen, welchem Wert des Drehmomentes M die größte Kraft T entspricht. Aus der Gl. (1) ist ersichtlich, daß bei Gleitfreiheit die Kraft T proportional mit der Vergrößerung des Drehmomentes M anwächst. Beim Gleiten der Laufräder auf den Schienen ist $T = fP_1$.

Wenn der Reibungskoeffizient f eine konstante Größe wäre, hätte die Kraft T beim Gleiten einen konstanten Wert, unabhängig von der Größe des Drehmomentes M. In Wirklichkeit aber, wie Versuche zeigen, verkleinert sich der Reibungskoeffizient f mit dem Anwachsen der Gleitgeschwindigkeit. Hieraus folgt, daß die Reibungskraft T dann den größten Wert hat, wenn die Gleitgeschwindigkeit Null ist, d. h. an der Gleitgrenze. Folglich entspricht die größte Zugkraft auf dem Radkranz T dem Drehmoment M, das nach der Gleichung

$$\frac{M}{a} = f P_1 + (f P_1 - S) \frac{p r_1^2}{P a^2}$$

bestimmt wird, wobei der Reibungskoeffizient f eine der Gleitgeschwindigkeit (die hier gleich Null ist) entsprechende Größe hat.

KAPITEL XVII

DIE ELEMENTARE THEORIE DER KREISEL-ERSCHEINUNGEN

§ 100. Das resultierende Moment des Impulses (Drall) eines schnell rotierenden Kreisels

Als eine Anwendung des Momentensatzes werden wir jetzt die elementare Theorie der Kreiselerscheinungen betrachten, d. h. jener Erscheinungen, die bei einer schnellen Rotation von Körpern beobachtet werden, wenn die Drehachse ihre Richtung im Raume verändert. In vielen technisch wichtigen Fällen muß man mit diesen Erscheinungen rechnen. Andererseits gibt es eine recht bedeutende Anzahl von Anlagen, bei denen diese Erscheinungen für praktische Zwecke benutzt werden (Kreiselkompaß, Kreisel als Dämpfer von Schiffsschwankungen, gyroskopische Einschienen-

Eisenbahn u. a.). Die Anwendung des Momentensatzes in seiner Vektorform (oder des Theorems von RESAL) führt zu der sehr einfachen, wenn auch nicht völlig exakten Kreiseltheorie[1].

Wir bezeichnen jeden Körper als Kreisel, der aus homogenem Material hergestellt ist und die Form eines Drehkörpers hat. Die Drehachse ist die Mittellinie des Kreisels. Bei der Anwendung hat der Kreisel gewöhnlich die Form eines Schwungrades mit massivem Radkranz.

Wir wollen uns zuerst mit der Berechnung des Hauptmomentes der Bewegungsgrößen eines rotierenden Kreisels beschäftigen.

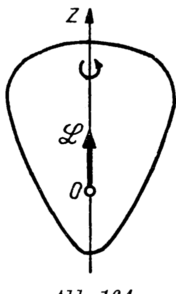


Abb. 164

Wir stellen uns einen Kreisel vor, der um die Mittellinie z rotiert, die selbst unbeweglich bleibt (Abb. 164). Wir nehmen auf der Drehachse einen beliebigen Punkt O an und bestimmen das Hauptmoment $\mathfrak{L}$ der Bewegungsgrößen des Kreisels in bezug auf diesen Punkt. Zuerst wollen wir die Richtung dieses Momentes ermitteln. Es ist leicht einzusehen, daß die einzige Richtung des Momentes $\mathfrak{L}$, welche die Bedingung der Symmetrie erfüllt, die Richtung der Drehachse z selbst ist: Es gibt keinerlei Gründe dafür, daß das Moment $\mathfrak{L}$ nach der einen Seite von der Achse z (z. B. nach rechts) oder nach der anderen (nach links) gerichtet sein müßte. Das Moment $\mathfrak{L}$ läuft also vom Punkte O aus auf der z-Achse; es muß so gerichtet sein, daß die Richtung des Momentenvektors $\mathfrak{L}$ und der Drehsinn des Kreisels um die z-Achse eine Rechtsschraube bilden.

Wir wollen nun die Größe des Momentes $\mathfrak{L}$ ermitteln. Dazu bemerken wir, daß das Moment $\mathfrak{L}$, da es auf der z-Achse verläuft, in seiner natürlichen Größe auf diese Achse projiziert wird. Andererseits ist die Projektion des Momentes $\mathfrak{L}$ auf die z-Achse (die durch den Punkt O geht) gleich dem Hauptmoment L_z der Impulse des Kreisels in bezug auf die z-Achse. Für das Moment L_z gilt die Gleichung

$$L_z = J\,\omega\,,$$

wobei J das Trägheitsmoment des Kreisels in bezug auf die z-Achse und ω die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels ist. Wenn wir beachten, daß im gegebenen Fall $L = L_z$ ist, erhalten wir

$$L = J\,\omega\,.$$

Wir wollen uns nun vorstellen, daß zur gleichen Zeit, in der der Kreisel um die eigene Mittelachse AB mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, diese Achse selbst ihre Richtung im Raum verändert. Wir wollen annehmen, daß einer der Punkte der Achse AB, z. B. der Punkt O, unbeweglich bleibt und die Achse AB um diesen Punkt rotiert (Abb. 165). Wir wollen uns die Aufgabe stellen, das Hauptmoment $\mathfrak{L}$ der Bewegungsgrößen des Kreisels in bezug auf den unbeweglichen Punkt O zu ermitteln. Natürlich ist jetzt die Größe des Momentes $\mathfrak{L}$ nicht gleich $J\omega$, und seine Richtung fällt nicht mit der Richtung der Achse AB zusammen. Wenn wir uns jedoch vor-

[1] Eine ausführlichere Darlegung der Kreiseltheorie enthält das Buch: E. L. Nikolai „Die Theorie der Kreisel", Е. Л. Николаи, Теория гироскопов, Гостехиздат, Л.—М., 1948.

stellen, daß der Kreisel um die Achse AB mit der sehr großen Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, während die Achse AB ihre Richtung im Raume verhältnismäßig langsam verändert, werden wir zu der Schlußfolgerung berechtigt sein, daß bei der Berechnung des Momentes $\mathfrak{L}$ in der ersten Annäherung ein Vernachlässigen der Bewegung der Achse AB selbst zulässig ist. In diesem Fall aber wird die Größe des Momentes $\mathfrak{L}$ wie früher durch

$$L = J\,\omega$$

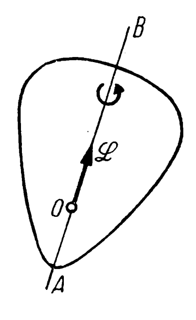


Abb. 165

ausgedrückt, und der Momentenvektor $\mathfrak{L}$ wird mit der Achse AB zusammenfallen. Der Fehler dieses angenäherten Resultates wird um so kleiner sein, je kleiner die Geschwindigkeit der Verrückung der Achse AB im Verhältnis zur Winkelgeschwindigkeit ω des Kreisels ist.

Der gewonnene angenäherte Ausdruck des Momentes $\mathfrak{L}$ liegt jener elementaren Kreiseltheorie zugrunde, die hier dargelegt werden soll. Hieraus ist ersichtlich, daß diese Theorie nur im Fall eines schnell rotierenden Kreisels anwendbar ist, dessen Mittellinie verhältnismäßig langsam ihre Richtung im Raume verändert.

Wenn die Kreiselachse ihre Lage so verändert, daß nicht einer seiner Punkte unbeweglich bleibt, dann zerlegen wir die absolute Bewegung des Kreisels in eine translative Bewegung zusammen mit dem Trägheitszentrum und eine Relativbewegung in bezug auf das Trägheitszentrum und wenden den Momentensatz bei dieser Relativbewegung an. Stellen wir das Hauptmoment $\mathfrak{L}_r$ der Bewegungsgrößen des Kreisels in bezug auf sein Trägheitszentrum (das natürlich auf der Mittellinie des Kreisels liegt) zusammen, so erhalten wir in der ersten Näherung

$$L_r = J\,\omega\,,$$

wobei die Richtung des Momentes $\mathfrak{L}_r$ mit der Richtung der Kreiselmittellinie zusammenfällt. Natürlich setzen wir auch hier voraus, daß die Winkelgeschwindigkeit ω des Kreisels um seine Mittellinie sehr groß ist, während die Veränderung der Richtung der Mittellinie verhältnismäßig langsam vor sich geht.

§ 101. Der Kreisel mit drei Freiheitsgraden

Sehr verbreitet ist die Meinung, daß eine schnelle Rotation dem Körper die Fähigkeit mitteilt, allen Kräften, die bestrebt sind, die Richtung seiner Drehachse zu verändern, Widerstand entgegenzusetzen; man sagt, daß ein schnell rotierender Kreisel bestrebt ist, seine Rotationsebene unverändert zu erhalten. Wir sehen, daß eine solche Behauptung, die von gar keinen Vorbehalten begleitet ist, im allgemeinen der Wirklichkeit nicht entspricht. In diesem Fall ist es notwendig, einen Unterschied zwischen Kreiseln mit drei und solchen mit zwei Freiheitsgraden zu machen.

Wir stellen uns einen Kreisel vor, der die Form eines Schwungrades mit massivem Radkranz besitzt (Abb. 166) und setzen voraus, daß der Schwerpunkt C dieses Kreisels festgehalten wird (z. B. mit Hilfe einer Spitze, die sich auf eine glatte halbkugel-

förmige Unterlage stützt). Wir haben es dann mit einem Körper mit einem festen Punkt C zu tun. Die Lage eines solchen Körpers wird durch drei Größen bestimmt, z. B. durch die drei Eulerschen Winkel; folglich handelt es sich hier um einen Kreisel mit *drei Freiheitsgraden.* Wir werden gleich sehen, daß eine schnelle Rotation tatsächlich einem Kreisel mit drei Freiheitsgraden die eigenartige Fähigkeit mitteilt, den Kräften, die bestrebt sind, die Richtung seiner Drehachse zu verändern, Widerstand entgegenzusetzen.

Wir wollen zunächst voraussetzen, daß der Kreisel nicht rotiert, und lassen am ruhenden Kreisel an einem beliebigen auf seiner Mittellinie liegenden Punkte A die Kraft $\mathfrak{F}$ angreifen, die senkrecht zu dieser Achse verläuft (Abb. 166). Wir nehmen an, daß die Kraft $\mathfrak{F}$ eine konstante Größe hat und daß sie im Laufe des kleinen Zeitraumes τ (vom Augenblick $t = 0$ bis zum Augenblick $t = \tau$) wirkt. Wie wird das Resultat der Wirkung der Kraft $\mathfrak{F}$ sein?

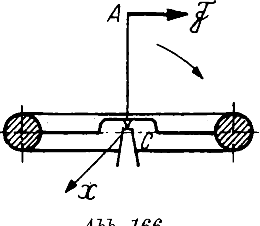


Abb. 166

Wir wollen annehmen, daß im Augenblick $t = 0$ die Mittellinie des Kreisels senkrecht gerichtet war. Unter der Einwirkung der Kraft $\mathfrak{F}$ wird sich der Körper um die horizontale Achse x drehen, die senkrecht zu der vertikalen Ebene verläuft, in der die Kraft $\mathfrak{F}$ wirkt. Die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung wird vom Augenblick $t = 0$ bis zum Augenblick $t = \tau$ anwachsen. Nach dem Augenblick $t = \tau$, wenn die Wirkung der Kraft $\mathfrak{F}$ aufhört, wird sich der Kreisel weiterhin gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit um die x-Achse drehen, die er bis zum Augenblick $t = \tau$ erworben hatte; dabei wird sich die Mittellinie des Kreisels in der durch die Kraft $\mathfrak{F}$ festgelegten vertikalen Ebene drehen, indem sie gleichförmig um die x-Achse in der in der Abbildung durch einen Pfeil bezeichneten Richtung rotiert.

Ganz anders wird das Resultat der Wirkung der Kraft $\mathfrak{F}$ sein, wenn wir dem Kreisel vorher eine rasche Rotation um seine Mittellinie erteilen.

Wir nehmen an, daß dem Kreisel eine große Winkelgeschwindigkeit ω um seine Mittellinie mitgeteilt worden ist. Zur Ermittlung der Wirkung der Kraft $\mathfrak{F}$ wollen wir den Momentensatz in seiner Vektorform anwenden.

Das Hauptmoment $\mathfrak{L}$ der Bewegungsgrößen des Kreisels in bezug auf den festen Punkt C ist der Größe nach gleich $L = J\omega$, wobei J das Trägheitsmoment des Kreisels in bezug auf seine Mittellinie ist; es verläuft auf der Mittellinie (Abb. 167). Wir bezeichnen das Ende des Vektors $\mathfrak{L}$ mit B. Das Hauptmoment $\mathfrak{M}^E$ der an dem Kreisel angreifenden äußeren Kräfte in bezug auf den Punkt C ist nichts anderes als das Moment der Kraft $\mathfrak{F}$ in bezug auf diesen Punkt (da die Momente der Schwerkraft und der Stützreaktion in bezug auf den Punkt C gleich Null sind). Folglich ist, wenn wir CA mit a bezeichnen:

$$M^E = F a;$$

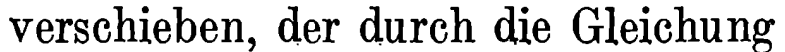
die Richtung des Momentes $\mathfrak{M}^E$ fällt mit der negativen Richtung der horizontalen x-Achse zusammen, die senkrecht zu der die Kraft $\mathfrak{F}$ enthaltenden vertikalen Ebene steht.

Nach dem Momentensatz ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ des Punktes B proportional dem Moment $\mathfrak{M}^E$; folglich verläuft die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ parallel zur x-Achse und ist der Größe nach gleich

$$u = F a .$$

Der Punkt B gehört aber zur Mittellinie des Kreisels; wenn wir die Bewegung des Punktes B verfolgen, haben wir die Möglichkeit, die Bewegung dieser Achse zu verfolgen. Welche Bewegung aber wird der Punkt B unter der Wirkung der Kraft $\mathfrak{F}$ ausführen, die am Punkte A der Mittellinie angreift?

Vom Augenblick $t = 0$ bis $t = \tau$ wird sich der Punkt B gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ bewegen; während der Zeit τ wird er sich parallel zur x-Achse um den kleinen Abschnitt $u\,\tau = F a\,\tau$ verschieben. Hierbei wird sich die Mittellinie des Kreisels in der vertikalen Ebene, die durch die Achse geht, um den kleinen Winkel α



verschieben, der durch die Gleichung

$$\alpha = \frac{u\,\tau}{L} = \frac{F a\,\tau}{J\,\omega} \tag{1}$$

bestimmt wird.

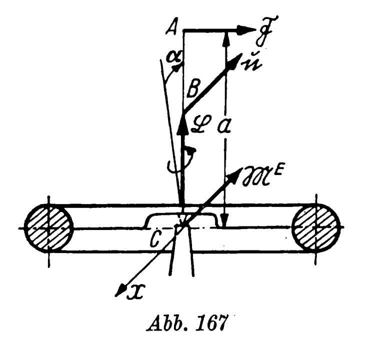


Abb. 167

Im Augenblick $t = \tau$ hört die Wirkung der Kraft $\mathfrak{F}$ auf; die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ verschwindet, der Punkt B bleibt augenblicklich stehen; auch die Mittellinie des Kreisels hält augenblicklich an. Nach dem Zeitpunkt $t = \tau$ rotiert der Kreisel weiterhin mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um seine Achse, die um den Winkel α aus ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt ist.

Aus der Gl. (1) ist ersichtlich, daß der Winkel α um so kleiner ist, je größer die Winkelgeschwindigkeit ω ist. Bezeichnen wir das Gewicht des Kreisels mit P und seinen Trägheitsradius in bezug auf die Mittellinie mit r_I und nehmen wir $P = 5$ kg, $r_I = 10$ cm, $\omega = 6000$ U/min, $F = 1$ kg, $a = 20$ cm und $\tau = 0{,}1$ s an, so ergibt sich nach der Gl. (1)

$$\alpha = 0{,}0062 = 0{,}36^\circ .$$

Folglich verändert sich durch die Einwirkung der an der Kreiselachse angreifenden Kraft $\mathfrak{F}$ unter den erwähnten Bedingungen die Lage des Kreisels fast gar nicht. Die schnelle Rotation verlieh dem Kreisel die Fähigkeit, der Kraft, die bestrebt war, die Richtung seiner Drehachse zu verändern, Widerstand entgegenzusetzen.

Unter der Einwirkung der Kraft $\mathfrak{F}$ findet jedoch eine bestimmte, wenn auch kleine Bewegung der Kreiselachse statt. Es muß unterstrichen werden, daß diese Bewegung der Achse nicht in der Richtung der Kraft $\mathfrak{F}$ erfolgt, sondern in der Richtung ihres Momentes, d. h. *senkrecht zur Kraft* $\mathfrak{F}$.

§ 102. Die Präzession eines Kreisels

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir gesehen, daß unter der Einwirkung einer an der Mittellinie eines schnell rotierenden Kreisels angreifenden Kraft im Laufe eines kleinen Zeitraumes die Mittellinie eine kleine Verrückung in der zu der an-

greifenden Kraft senkrechten Richtung erhält. Wenn an der Mittelachse des Kreisels ununterbrochen eine Kraft angreift, ergibt sich eine ununterbrochene Drehung der Achse in der Richtung, die zu der angreifenden Kraft senkrecht verläuft. Diese Bewegung der Symmetrieachse des rotierenden Kreisels heißt *Präzession.* Wir wollen die Erscheinung der Präzession am Beispiel eines einfachen Kreisels untersuchen.

Wir stellen uns vor, daß dem Kreisel eine sehr große Winkelgeschwindigkeit ω verliehen ist und daß die Spitze O, in die seine Achse ausläuft, sich auf eine glatte halbkugelförmige Unterlage stützt (Abb. 168). Wir wollen den Momentensatz bei der Untersuchung der Kreiselbewegung anwenden.

Das Hauptmoment $\mathfrak{L}$ der Bewegungsgrößen des Kreisels bezüglich des festen Punktes O ist der Größe nach gleich $L = J\omega$, wobei J das Trägheitsmoment des Kreisels in bezug auf seine Mittellinie ist, und es verläuft vom Punkte O aus längs der Mittellinie; das Ende des Vektors $\mathfrak{L}$ bezeichnen wir mit A. Die äußeren Kräfte sind die Schwerkraft $\mathfrak{P}$, die im Schwerpunkt C des Kreisels angreift, und die Auflagerreaktion. Da das Moment der Auflagerreaktion in bezug auf den Punkt O gleich Null ist, fällt das Hauptmoment $\mathfrak{M}^E$ der äußeren Kräfte in bezug auf den Punkt O mit dem Moment der Schwerkraft $\mathfrak{P}$ in bezug auf diesen Punkt zusammen. Nehmen wir $OC = a$ an und bezeichnen den von der Mittellinie mit der Vertikalen gebildeten Winkel mit ϑ, so gilt:

$$M^E = P a \sin \vartheta .$$

Das Moment $\mathfrak{M}^E$ steht senkrecht auf der vertikalen Ebene, in der die Mittellinie liegt.

Wir bezeichnen die Geschwindigkeit des Punktes A mit $\mathfrak{u}$. Nach dem Momentensatz gilt:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{M}^E .$$

Hieraus folgt, daß

$$u = P \cdot a \cdot \sin \vartheta$$

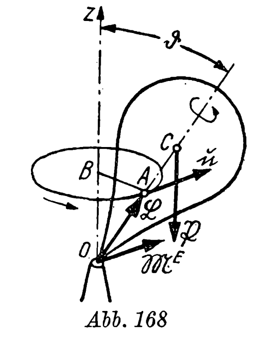


Abb. 168

ist, wobei die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ senkrecht zu der vertikalen Ebene verläuft, welche die Mittellinie des Kreisels enthält.

Da der Punkt A zur Mittellinie des Kreisels gehört, wird die Bewegung dieser Achse durch die Bewegung des Punktes A bestimmt. Die Kreiselachse verschiebt sich in der Richtung, die senkrecht zur Schwerkraft $\mathfrak{P}$ verläuft; bei dieser Bewegung der Achse bleibt der Winkel ϑ konstant, und die Mittellinie beschreibt einen Kegelmantel, wenn sie sich um die durch den Punkt O gehende Vertikale z dreht. Diese Bewegung der Symmetrieachse des Kreisels heißt Präzession; die Richtung der Präzession ist in Abb. 168 mit einem Pfeil bezeichnet.

Wir wollen nun die Winkelgeschwindigkeit der Präzession ermitteln; wir bezeichnen sie mit ω_1. Fällen wir von dem Punkte A das Lot AB auf die z-Achse, so erhalten wir:

$$\omega_1 = \frac{u}{AB} .$$

Setzen wir hier $u = P \cdot a \cdot \sin \vartheta$ ein und

$$AB = L \sin \vartheta = J\omega \sin \vartheta,$$

so finden wir

$$\omega_1 = \frac{P a \sin \vartheta}{J \omega \sin \vartheta} = \frac{P a}{J \omega}.$$

Wie zu sehen ist, wird die Winkelgeschwindigkeit der Präzession ω_1 um so kleiner, je größer die Winkelgeschwindigkeit ω der Rotation des Kreisels um seine Mittellinie ist.

§ 103. Der Kreisel mit zwei Freiheitsgraden. Das Kreiselmoment

Wir stellen uns einen Kreisel in Form eines Schwungrades vor, dessen Achse FG in einem runden Rahmen befestigt ist, der sich selbst um die horizontale Achse MN, die durch den Schwerpunkt C hindurchgeht, drehen kann (Abb. 169). Die Lage des Kreisels wird durch zwei Größen bestimmt: durch den Drehwinkel des Schwungrades um seine Mittellinie und den Drehwinkel des Rahmens um die Achse MN; wir haben es hier mit einem Kreisel *mit zwei Freiheitsgraden* zu tun. Wir werden gleich sehen, daß wir dem Kreisel jegliche Fähigkeit nehmen, den Kräften, welche die Richtung seiner Mittellinie zu verändern suchen, Widerstand entgegenzusetzen, wenn wir ihm einen Freiheitsgrad nehmen.

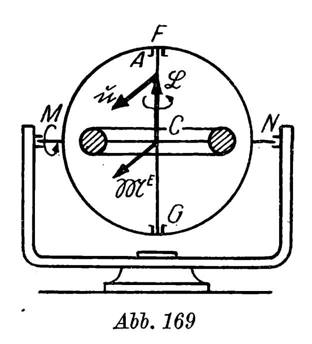


Abb. 169

Nehmen wir an, daß dem Kreisel eine sehr große Winkelgeschwindigkeit ω um seine Achse erteilt wurde und daß sich der Rahmen des Kreisels mit einer verhältnismäßig kleinen Winkelgeschwindigkeit ω_1 um die Achse MN dreht; die Rotationsrichtungen sind in der Abbildung mit Pfeilen bezeichnet. Wir werden sehen, welche äußeren Kräfte am Rahmen angreifen müssen, um die gleichförmige Rotation des Rahmens zu unterhalten.

Wir wenden wieder den Momentensatz an. Wenn wir die Momente in bezug auf den festen Punkt C zusammenfassen, erhalten wir das Hauptmoment $\mathfrak{L}$ der Bewegungsgrößen des Kreisels, das der Größe nach gleich $L = J\omega$ ist, wobei J das Trägheitsmoment des Kreisels in bezug auf seine Mittellinie ist und vom Punkte C aus auf der Mittellinie verläuft. Da uns die Bewegung des Rahmens und folglich auch die Bewegung der Mittellinie des Kreisels gegeben sind, ist uns die Geschwindigkeit des Endes A des Momentes $\mathfrak{L}$ bekannt; bezeichnen wir diese Geschwindigkeit mit $\mathfrak{u}$, so gilt:

$$u = L\omega_1 = J\omega\omega_1 .$$

Die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ verläuft senkrecht zur Rahmenebene.

Nach dem Momentensatz ist

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{M}^E,$$

wobei $\mathfrak{M}^E$ das Hauptmoment der am Kreisel angreifenden äußeren Kräfte in bezug auf den Punkt C ist. Folglich ist

$$M^E = J\omega\,\omega_1;$$

die Richtung des Momentes $\mathfrak{M}^E$ verläuft senkrecht zur Rahmenebene.

Wir erwähnen, daß der Hauptvektor der am Kreisel angreifenden äußeren Kräfte gleich Null ist (sonst könnte, gemäß dem Gesetz der Bewegung des Trägheitszentrums, der Schwerpunkt C des Kreisels nicht in Ruhe bleiben). Hieraus schließen wir, daß sich die am Kreisel angreifenden äußeren Kräfte auf ein Kräftepaar mit dem Moment $\mathfrak{M}^E$ reduzieren lassen müssen, d. h. auf ein Kräftepaar, daß in der Rahmenebene liegt und dessen Moment gleich $J\omega\,\omega_1$ ist.

In den Punkten M und N greifen am Rahmen die Reaktionen der Lager an, in denen die Achse des Rahmens liegt. Wir schließen, daß sich diese Reaktionen zusammensetzen aus den statischen Reaktionen, die der Größe nach gleich $^1/_2\,P$ sind (wobei P das Gewicht des Kreisels ist) und vertikal nach oben verlaufend die Schwerkraft P aufheben, und den dynamischen Reaktionen, die in der Ebene des Rahmens liegen und das soeben erwähnte Kräftepaar bilden. Zum Aufrechterhalten der Drehung des Rahmens werden keine anderen äußeren Kräfte benötigt.

Wenn wir also den Rahmen eines schnell rotierenden Kreisels anstoßen und ihm dadurch eine gewisse Winkelgeschwindigkeit um die Achse MN geben, wird sich der Rahmen weiterhin um diese Achse drehen, und zwar genauso, wie er sich drehen würde, wenn es keinerlei Drehung des Kreisels um seine Mittellinie gäbe. Ein Kreisel mit zwei Freiheitsgraden besitzt nicht die Fähigkeit, Kräften, die bestrebt sind, seine Rotationsebene zu verändern, Widerstand entgegenzusetzen. Wenn der Kreisel mit drei Freiheitsgraden eine solche Fähigkeit besitzt, entsteht das daher, daß seine Mittellinie die Möglichkeit hat, sich in der Richtung zu verschieben, die senkrecht zu der Richtung der angreifenden Kraft ist. Nehmen wir der Mittellinie diese Möglichkeit, so berauben wir den Kreisel der Fähigkeit, der Wirkung einer angreifenden Kraft Widerstand entgegenzusetzen.

Im Jahre 1874 wurde in England der Versuch gemacht, den Kreisel gegen Schiffsschwankungen technisch anzuwenden. Zur Überfahrt über den Ärmelkanal wurde ein Dampfer gebaut, in dem sich eine große Kajüte befand, die ähnlich einem Pendel um eine Achse schaukelte, die längs des Schiffsrumpfes lag. Beim Schlingern sollte sich diese Kajüte mittels besonderer hydraulischer Maschinen, die von einem Kreisel mit zwei Freiheitsgraden reguliert werden sollten, in einer unveränderten vertikalen Lage halten. Die regulierende Tätigkeit dieses Kreisels sollte sich auf die gedachte Fähigkeit desselben gründen, die Richtung seiner Drehachse unverändert beizubehalten. Natürlich endete der Versuch mit einem Mißerfolg. Damit eine ähnliche Einrichtung wirksam sein könnte, müßte der Kreisel drei Freiheitsgrade haben. Eine der Idee nach analoge Einrichtung, wobei jedoch der Kreisel drei Freiheitsgrade hatte, wurde von Regnard für die automatische Stabilisierung eines Flugzeuges vorgeschlagen[1].

Wir haben gesehen, daß bei der Drehung des Rahmens eines Kreisels die an dem Kreisel angreifenden Kräfte auf ein Kräftepaar mit dem Moment $\mathfrak{M}^E$ reduziert werden. Wir wollen nun vom Gesichtspunkt der Methode der Kinetostatik aus die

[1] Er wurde von SCHLICK für Schiffe tatsächlich gebaut und erfolgreich erprobt (SCHLICKscher Schiffsbund) (Anm. d. deutschen Red.).

von uns betrachtete Erscheinung untersuchen. Nach der Methode der Kinetostatik müssen sich die am System angreifenden Kräfte mit den Trägheitskräften ausgleichen. Hieraus schließen wir, daß die bei der Drehung des Rahmens entstehenden Trägheitskräfte des Kreisels auf ein Kräftepaar reduziert werden, deren Moment $\mathfrak{M}$ der Größe nach gleich und der Richtung nach entgegengesetzt dem Moment $\mathfrak{M}^E$ ist. Folglich ist das Moment $\mathfrak{M}$ des Trägheitskräftepaares der Größe nach gleich

$$M = J\,\omega\,\omega_1 .$$

Wir wollen das Moment $\mathfrak{M}$ *Kreiselmoment* nennen; das Auftreten dieses Momentes trägt den Namen *Kreiseleffekt.*

Das Kreiselmoment tritt in allen den Fällen auf, in denen die Achse eines schnell rotierenden Kreisels ihre Richtung im Raume verändert (unabhängig von der Zahl der Freiheitsgrade des Kreisels). Im Falle eines Kreisels mit zwei Freiheitsgraden, von dem in diesem Paragraphen die Rede war, wird das Kreiselmoment durch die Reaktionen der Lager M und N ausgeglichen (und ruft einen zusätzlichen Druck auf diese Lager hervor). Im Fall der Präzession eines Kreisels, die im vorhergehenden Paragraphen betrachtet wurde, wird das Kreiselmoment durch das Moment der Schwerkraft aufgehoben. Wir bemerken, daß das Kreiselmoment im allgemeinen Falle den Wert

$$M = J\,\omega\,\omega_1 \sin\vartheta$$

hat, wobei ϑ der von der Mittellinie und der Drehachse eingeschlossene Winkel ist. Das Ableiten dieser Beziehung überlassen wir dem Leser.

§ 104. Die Dampfschiffsturbine

Mit dem Kreiseleffekt muß man in all den Fällen rechnen, in denen die Drehachse irgendeines schnell rotierenden Teiles der Maschine im Laufe der Zeit ihre Richtung verändert.

Wir stellen uns eine Dampfturbine vor, welche die Schiffsschraube in Bewegung setzt (Abb. 170). Wir nehmen an, daß die Turbinenachse parallel zur Längsachse des Schiffes angeordnet ist. Beim Stampfen des Schiffes, wobei der Schiffskörper um die Querachse AB schaukelt, verändert die Turbine im Laufe der Zeit ihre Richtung. Wir wollen nun den Kreiseleffekt untersuchen, der hier auftritt.

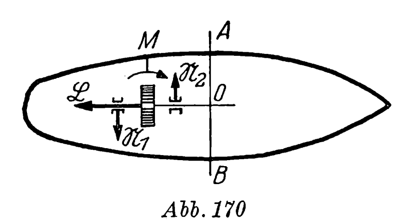


Abb. 170

Wir wollen annehmen, daß für den vom Heck her schauenden Beobachter die Turbine gegen den Uhrzeigersinn rotierend erscheint. In diesem Falle verläuft das Hauptmoment $\mathfrak{L}$ der Bewegungsgrößen der Turbine, bezogen auf den festen Punkt O, auf der Turbinenachse in Richtung vom Bug nach dem Heck und ist der Größe nach gleich $L = J\omega$, wobei J das Trägheitsmoment der Turbine in bezug auf ihre Achse ist und ω die Winkelgeschwindigkeit der Turbine.

In dem Augenblick, wo sich wegen des Stampfens das Heck des Dampfers hebt, hat das Ende des Momentenvektors $\mathfrak{L}$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$, die nach oben verläuft und der Größe nach gleich

$$u = L\,\omega_1 = J\,\omega\,\omega_1$$

ist, wobei ω_1 die Winkelgeschwindigkeit des Schiffskörpers ist. Das Kreiselmoment $\mathfrak{M}$ ist der Größe nach gleich und der Richtung nach dem Hauptmoment $\mathfrak{M}^E$ der äußeren Kräfte, bezogen auf den Pol O, entgegengesetzt. Also ist es (nach dem Momentensatz) gleich $\mathfrak{u}$, aber entgegengesetzt gerichtet. Folglich ist das Kreiselmoment $\mathfrak{M}$ der Größe nach gleich

$$M = J\,\omega\,\omega_1$$

und verläuft vertikal nach unten. Das bedeutet, daß das zugehörige Kräftepaar in der horizontalen Ebene liegt; seine Drehrichtung ist in der Abb. 170 durch einen Pfeil bezeichnet. Dieses Paar ruft einen horizontalen Druck auf die Lager hervor, in denen die Turbinenachse liegt, und horizontale Reaktionen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ dieser Lager; die Reaktionen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ bilden ein Kräftepaar, welches das Kreiselmoment aufhebt. Wenn sich das Heck senkt, ändern das Kreiselmoment $\mathfrak{M}$ und folglich auch die Reaktionen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ der Lager ihre Richtung um 180°.

Also ruft das Kreiselmoment der Turbine beim Stampfen einen sich periodisch verändernden horizontalen Druck auf die Turbinenlager hervor. Wir wollen eine Berechnung des größten Kreiselmomentes und auch des von ihm hervorgerufenen Druckes auf die Lager gemäß folgendem Zahlenbeispiel vornehmen.

Nehmen wir an, daß $J = 980$ kg m s², $\omega = 500$ U/min $= 52{,}4\,\frac{1}{\text{s}}$ ist.

Wir nehmen ferner an, daß die Amplitude φ_0 des Stampfens des Schiffskörpers gleich $5° = 0{,}0873$ und die Schwingungsdauer T gleich 7 s ist. Wenn wir annehmen, daß das Stampfen des Dampfers nach einem harmonischen Gesetz vor sich geht und den Neigungswinkel des Schiffskörpers mit φ bezeichnen, erhalten wir

$$\varphi = \varphi_0 \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Hieraus erhalten wir für die Winkelgeschwindigkeit ω_1 des Schiffskörpers den Ausdruck

$$\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi\varphi_0}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Folglich ist der größte Wert der Winkelgeschwindigkeit ω_1 gleich

$$(\omega_1)_{\max} = \frac{2\pi\varphi_0}{T} = 0{,}078\,\frac{1}{\text{s}}.$$

Hieraus erhalten wir den größten Wert des Kreiselmomentes

$$M_{\max} = J\,\omega\,(\omega_1)_{\max} \approx 4000\ \text{kgm}.$$

Bei einem Abstand von 4,25 m zwischen den Lagern sind die von diesem Moment hervorgerufenen Reaktionen N_1 und N_2 gleich

$$N_1 = N_2 = \frac{4000}{4{,}25} = 910\,\text{kg}.$$

Wie man sieht, kann das Kreiselmoment einen sehr bedeutenden Druck auf die Lager ausüben.

§ 105. Der Kreiseleffekt bei der Bewegung eines Radsatzes in einer Kurve

Das Kreiselmoment tritt auch bei der Bewegung eines Radsatzes in einer Kurve auf. Wir zerlegen die absolute Bewegung des Radsatzes in eine translative (fortschreitende) Bewegung zusammen mit seinem Trägheitszentrum C und eine relative (rotierende) Bewegung in bezug auf sein Trägheitszentrum und wenden bei dieser Relativbewegung den Momentensatz an, wobei wir die Momente in bezug auf das Trägheitszentrum C zusammensetzen (Abb. 171). Wir bezeichnen das Gewicht des Radsatzes mit P, sein Trägheitsmoment in bezug auf seine Achse mit J, den Trägheitsradius in bezug auf dieselbe Achse mit r_I, den Radius der Räder mit a, den Krümmungsradius der von dem Radsatz beschriebenen Kurve mit R und die Geschwindigkeit des Trägheitszentrums C mit $\mathfrak{v}$.

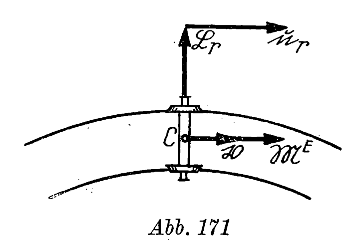


Abb. 171

Das Hauptmoment $\mathfrak{L}_r$ der Bewegungsgrößen des Radsatzes in bezug auf das Trägheitszentrum C ist gleich $J\omega$, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Radsatzes um seine Achse ist; das Hauptmoment verläuft auf der Achse des Radsatzes. Wenn wir annehmen, daß die Räder ohne zu gleiten rollen, ist $\omega = \frac{v}{a}$, und folglich ist

$$L_r = J\,\frac{v}{a}.$$

Der Einfachheit halber wollen wir voraussetzen, daß in der Kurve beide Schienen in einer horizontalen Ebene liegen. Die Achse des Radsatzes dreht sich beim Durchlaufen der Kurve um die vertikale Achse ζ, die durch das Trägheitszentrum C hindurchgeht, mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_1 = \frac{v}{R}.$$

Dabei erhält das Ende des Momentenvektors $\mathfrak{L}_r$ die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{u}_r$, die der Größe nach gleich

$$u_r = L_r\,\omega_1 = J \cdot \frac{v^2}{a\,R}$$

ist; bei der in Abb. 171 angenommenen Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ verläuft die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}_r$ ebenso wie die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$.

Nach dem Momentensatz ist das Hauptmoment $\mathfrak{M}^E$ der äußeren Kräfte in bezug auf den Punkt C gleich $\dot{v}_r$. Das Kreiselmoment $\mathfrak{M}$ ist jedoch entgegengesetzt gleich $\mathfrak{M}^E$. Nehmen wir $J = \frac{P}{g} r_I^2$ an, so finden wir, daß

$$M = \frac{P r_I^2 v^2}{g a R}$$

ist, wobei die Richtung des Momentes $\mathfrak{M}$ entgegengesetzt der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ verläuft. Dieses Moment ruft eine zusätzliche Belastung der äußeren Schiene hervor und eine Entlastung der inneren Schiene (Abb. 172).

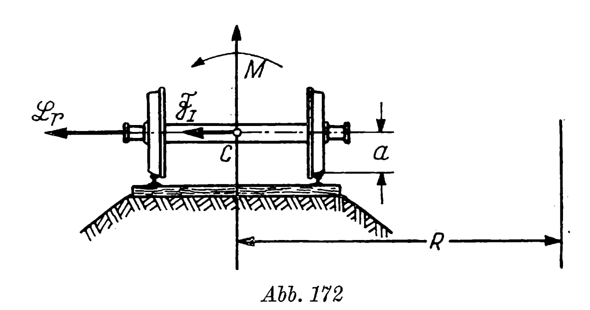


Abb. 172

Wir sehen, daß wir, wenn wir die Methode der Kinetostatik auf die gegebene Frage anwenden, nicht nur die Trägheitskräfte, die der Relativbewegung des Radsatzes in bezug auf seinen Schwerpunkt entsprechen (diese Trägheitskräfte finden ihren Ausdruck im Kreiselmoment $\mathfrak{M}$), berücksichtigen müssen, sondern auch die der fortschreitenden Bewegung des Radsatzes zusammen mit seinem Schwerpunkt entsprechenden Trägheitskräfte. Bei dieser fortschreitenden Bewegung werden die Trägheitskräfte auf eine Zentrifugalkraft reduziert, die gleich

$$F_I = \frac{P v^2}{g R}$$

ist und am Schwerpunkt C angreift. Die in der Höhe a über dem Schienenniveau angreifende Zentrifugalkraft $\mathfrak{F}_I$ ruft gleichfalls einen zusätzlichen Druck auf die äußere Schiene und eine Entlastung der inneren Schiene hervor. Das volle Kippmoment der Trägheitskräfte des Radsatzes ist gleich

$$F_I a + M = \frac{P a v^2}{g R} + \frac{P r_I^2 v^2}{g a R} = \frac{P a v^2}{g R}\left(1 + \frac{r_I^2}{a^2}\right).$$

Wir wollen annehmen: $P = 1000$ kg, $a = 50$ cm, $r_I^2 = 0{,}55\, a^2$. Das Kippmoment, das am Radsatz beim Durchfahren einer Bahn vom Radius $R = 200$ m mit einer Geschwindigkeit $v = 20$ m/s angreift, ist gleich 158 kgm. Wenn der Abstand zwischen den Schienen gleich 1,5 m ist, erhält die äußere Schiene eine zusätzliche Belastung von 105 kg; um die gleiche Größe verringert sich der Druck auf die innere Schiene.

§ 106. Die gyroskopische Einschieneneisenbahn

Die bemerkenswerten Eigenschaften eines schnell rotierenden Kreisels haben eine vielfache und verschiedenartige Verwendung in der Technik gefunden. Wir wollen uns hier mit der Untersuchung der Grundidee jener Kreiselanlage beschäftigen, mit der man die Stabilität eines Waggons der Einschieneneisenbahn verwirklichen kann. Innerhalb des Waggons ist ein Kreisel mit zwei Freiheitsgraden von einer solchen Konstruktion aufgestellt, wie sie im § 103 beschrieben wurde (Abb. 173). Natürlich würde sich der Waggon ohne Kreisel in einem labilen Gleichgewicht befinden. Wir nehmen an, daß dem Kreisel eine sehr große Winkelgeschwindigkeit ω in der auf der Abb. 173 durch einen Pfeil angegebenen Richtung mitgeteilt wurde.

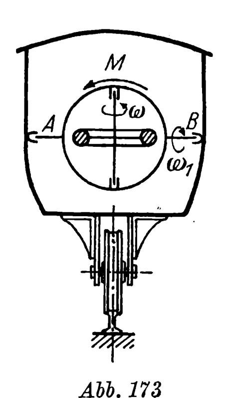


Abb. 173

Wir wollen nun annehmen, daß das Gleichgewicht des Waggons gestört ist, und zwar soll sich der Waggon anfänglich nach rechts neigen. Um sein Gleichgewicht wiederherzustellen, genügt es, dem Rahmen des Kreisels eine Drehung um die Achse AB in der gleichfalls in der Abbildung durch einen Pfeil bezeichneten Richtung zu verleihen. Wir wissen bereits (s. § 103), daß bei dieser Drehung des Rahmens die Trägheitskräfte des Kreisels auf ein Kräftepaar reduziert werden, dessen Moment gleich

$$M = J\,\omega\,\omega_1$$

ist, wobei J das Trägheitsmoment des Kreisels in bezug auf seine Mittellinie und ω_1 die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Rahmens ist. Das Kreiselmoment $\mathfrak{M}$ verläuft entgegengesetzt dem Moment der Schwerkraft. Bei einer genügenden Größe des Momentes $\mathfrak{M}$ wird das Moment der Schwerkraft ausgeglichen, und das Gleichgewicht des Waggons wird auf diese Art wiederhergestellt.

Entsprechend wird, wenn der Waggon sich nach links neigt, sein Gleichgewicht durch die Drehung des Kreiselrahmens nach der umgekehrten Seite wiederhergestellt.

Somit könnte ein sich im Innern befindender Mensch eine beliebig lange Zeit den Waggon im Gleichgewicht erhalten, indem er den Rahmen des Kreisels bald nach der einen, bald nach der anderen Seite dreht. (Zu große Anstrengungen würde es dabei nicht kosten.)

Bei den von verschiedenen Autoren (Brennan, Scherl, Schilowski) vorgelegten Systemen einer gyroskopischen Einschieneneisenbahn wird die Rotation des Kreiselrahmens automatisch mit Hilfe besonderer Einrichtungen so reguliert, daß im Bedarfsfall der Kreiselrahmen automatisch die zum Ausgleich des Momentes der Schwerkraft notwendige Winkelgeschwindigkeit ω_1 erhält. Auf die Einzelheiten dieser regulierenden Einrichtungen werden wir hier nicht eingehen.

KAPITEL XVIII

DIE TRÄGHEITSMOMENTE EINES STARREN KÖRPERS

§ 107. Das erste Theorem. Der STEINERsche Satz

Wir haben gesehen, welche wesentliche Bedeutung dem Begriff des Trägheitsmomentes in allen Fragen zukommt, die mit der Rotation eines starren Körpers verbunden sind. In diesem Kapitel werden wir uns mit den Grundbeziehungen zwischen den Trägheitsmomenten eines Körpers bezüglich verschiedener Achsen und auch mit einigen Anwendungen dieser Beziehungen befassen.

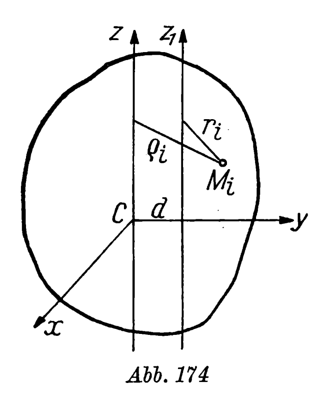


Abb. 174

Wir legen durch das Trägheitszentrum C des gegebenen Körpers eine beliebige Achse z und eine andere Achse z_1, die parallel zu der z-Achse verlaufen soll (Abb. 174). Wir bezeichnen die Trägheitsmomente des Körpers in bezug auf die Achsen z und z_1 mit J_c und J. Wir werden zeigen, daß diese Trägheitsmomente durch die Beziehung

$$J = J_c + M d^2$$

miteinander verbunden sind, wobei M die Masse des Körpers und d der Abstand zwischen den Achsen z und z_1 ist.

Wir wollen ein beliebiges Teilchen M_i des gegebenen Körpers wählen und seine Abstände von den Achsen z und z_1 mit ϱ_i und r_i bezeichnen. Gemäß der Bestimmung des Begriffes des Trägheitsmomentes gilt:

$$J_c = \sum m_i \varrho_i^2,$$

$$J = \sum m_i r_i^2,$$

wobei m_i die Masse des gewählten Teilchens des Körpers ist; die Summen erstrecken sich auf alle zum gegebenen Körper gehörigen Teilchen.

Wir wollen nun die Abhängigkeit zwischen den Größen r_i und ϱ_i ermitteln und legen zu dem Zweck durch den Punkt C in der Ebene, welche die Achsen z und z_1 enthält, die zur z-Achse senkrechte y-Achse und ebenfalls durch den Punkt C die x-Achse, die senkrecht zu den Achsen y und z verläuft. Bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes M_i in bezug auf die Achsen x, y und z mit x_i, y_i und z_i, so erhalten wir:

$$r_i^2 = (y_i - \mathrm{d})^2 + x_i^2,$$

$$\varrho_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

und hieraus

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + d^2 - 2\,d\,y_i = \varrho_i^2 + d^2 - 2\,d\,y_i\,.$$

Multiplizieren wir diesen Ausdruck für r_i^2 mit m_i und summieren gliedweise, so finden wir:

$$J = \sum m_i\,\varrho_i^2 + \sum m_i\,d^2 - 2\sum m_i\,d\,y_i$$

$$= \sum m_i\,\varrho_i^2 + d^2 \sum m_i - 2\,d \sum m_i\,y_i$$

$$= J_c + M\,d^2 - 2\,d \sum m_i\,y_i\,.$$

Nun bemerken wir, daß

$$\sum m_i\,y_i = M\,y_c$$

ist, wobei y_c die Koordinate des Trägheitszentrums ist. Im gegebenen Fall aber ist $y_c = 0$; folglich ist

$$\sum m_i\,y_i = 0\,.$$

Somit erhalten wir endgültig:

$$J = J_c + M\,d^2\,.$$

Diese Beziehung heißt der STEINERsche Satz.

Wenn wir in dieser Gleichung $J = M r_I^2$ und $J_c = M r_{Ic}^2$ annehmen, wobei r_I und r_{Ic} die Trägheitsradien des Körpers in bezug auf die Achsen z_1 und z sind, erhalten wir

$$r_I^2 = r_{Ic}^2 + d^2\,.$$

Wir wollen diese Gleichung bei einem Zahlenbeispiel anwenden. Im § 95 wurde der Trägheitsradius einer Kurbelstange in bezug auf die Achse des Kreuzkopfes aus der beobachteten Schwingungsdauer der Kurbelstange berechnet. Der Abstand zwischen der Achse des Kreuzkopfes und dem Schwerpunkt der Kurbelstange betrug $a = 121{,}55$ cm, der Trägheitsradius der Kurbelstange war $r_I = 139$ cm. Wir wollen nun den Trägheitsradius r_{Ic} derselben Kurbelstange in bezug auf die Achse ermitteln, die durch den Schwerpunkt der Kurbelstange hindurchgeht und parallel zur Achse des Kreuzkopfes verläuft. Nach der soeben gewonnenen Gleichung gilt:

$$r_{Ic} = \sqrt{r_I^2 - a^2} = 67\,\text{cm}\,.$$

Nehmen wir das Gewicht der Kurbelstange mit $P = 94$ kg an, so finden wir, daß das gesuchte Trägheitsmoment gleich $J_c = 4{,}3$ kgm·s² ist.

§ 108. Das zweite Theorem

Wir wählen einen beliebigen Punkt O des gegebenen Körpers und legen durch diesen Punkt drei zueinander senkrechte Achsen x, y und z (Abb. 175). Danach legen wir durch den Punkt O eine beliebige Achse L und bezeichnen die Winkel, die von dieser Achse mit den Achsen x, y und z gebildet werden, mit α, β und γ. Das Trägheitsmoment des gegebenen Körpers in bezug auf die Achse L bezeichnen wir mit J. Es ist klar, daß das Trägheitsmoment J von der Richtung der Achse L abhängt, d. h. von den Winkeln α, β und γ. Wir wollen diese Abhängigkeit ermitteln.

Wir nehmen ein beliebiges Teilchen M_i des gegebenen Körpers und fällen von dem Punkte M_i aus das Lot $A_i M_i = r_i$ auf die Achse L. Bezeichnen wir die Masse des Teilchens M_i mit m_i, so gilt für das Trägheitsmoment J der Ausdruck

$$J = \sum m_i r_i^2, \tag{1}$$

wobei die Summation auf alle Teilchen des Körpers ausgedehnt ist.

Wir wollen nun die Abhängigkeit der Größe r_i von den Winkeln α, β und γ ermitteln. Aus dem Dreieck OM_iA_i lesen wir ab:

$$r_i^2 = O\,M_i^2 - O\,A_i^2.$$

Wir bezeichnen die Koordinaten des Punktes M_i in bezug auf die Koordinatenachsen x, y und z mit x_i, y_i und z_i. Es ist dann

$$O\,M_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2.$$

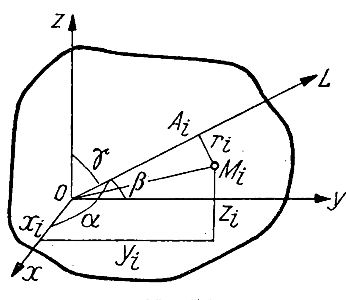


Abb. 175

Der Abschnitt OA_i ist die Projektion des Abschnittes OM_i auf die Achse L. Der Abschnitt OM_i ist dagegen die geometrische Summe der Abschnitte x_i, y_i und z_i. Wir wollen den Umstand benutzen, daß die Projektion einer geometrischen Summe gleich der Summe der Projektionen der Komponenten ist. Projizieren wir den Abschnitt OM_i und auch die Abschnitte x_i, y_i und z_i auf die Achse L und behalten im Auge, daß die Abschnitte x_i, y_i und z_i mit der Achse L die Winkel α, β und γ bilden, so erhalten wir:

$$O\,A_i = x_i \cos\alpha + y_i \cos\beta + z_i \cos\gamma.$$

Setzen wir die gewonnenen Ausdrücke für OM_i und OA_i in den Ausdruck für r_i ein, so finden wir:

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (x_i \cos\alpha + y_i \cos\beta + z_i \cos\gamma)^2.$$

Das ist die Abhängigkeit der Größe r_i von den Winkeln α, β und γ. Wir wollen jetzt diese Abhängigkeit anders darstellen. Bedenken wir, daß

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

ist, so finden wir

$$r_i^2 = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (x_i \cos\alpha + y_i \cos\beta + z_i \cos\gamma)^2,$$

woraus wir, wenn wir die Klammern auflösen,

$$r_i^2 = (y_i^2 + z_i^2)\cos^2\alpha + (z_i^2 + x_i^2)\cos^2\beta + (x_i^2 + y_i^2)\cos^2\gamma$$
$$- 2\,y_i z_i \cos\beta\cos\gamma - 2\,z_i\,y_i \cos\gamma\cos x - 2\,x_i\,y_i \cos x\cos\beta$$

erhalten.

Setzen wir diesen Ausdruck für r_i^2 in die Gl. (1) ein, so erhalten wir die gesuchte Abhängigkeit des Trägheitsmomentes J von den Winkeln α, β und γ. Multiplizieren wir den soeben gewonnenen Ausdruck für r_i^2 mit m_i und addieren gliedweise, so erhalten wir

$$\begin{aligned} J = {} & \cos^2\alpha \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) + \cos^2\beta \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) \\ & + \cos^2\gamma \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2\cos\beta\cos\gamma \sum m_i y_i z_i \\ & - 2\cos\gamma\cos\alpha \sum m_i z_i x_i - 2\cos\alpha\cos\beta \sum m_i x_i y_i . \end{aligned}$$

Zur Abkürzung führen wir die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} A &= \sum m_i (y_i^2 + z_i^2), & D &= \sum m_i y_i z_i , \\ B &= \sum m_i (z_i^2 + x_i^2), & E &= \sum m_i z_i x_i , \\ C &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2), & F &= \sum m_i x_i y_i \end{aligned}$$

ein. Damit erhalten wir endgültig:

$$J = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\gamma\cos\alpha - 2F\cos\alpha\cos\beta .$$

Dies ist die gesuchte Abhängigkeit des Trägheitsmomentes J von den Winkeln α, β und γ, welche die Richtung der Achse L bestimmen.

Was die Größen A, B, C, D, E, F anbetrifft, so ist leicht zu sehen, daß die Größen A, B und C nichts anderes darstellen als die Trägheitsmomente des gegebenen Körpers in bezug auf die Achsen x, y und z (da $y_i^2 + z_i^2$ nichts anderes als das Quadrat des Abstandes des Teilchens M_i von der x-Achse ist). Die Größen D, E und F heißen *zentrifugale Trägheitsmomente* oder einfach *Zentrifugalmoment* in bezug auf die Achsen y und z, z und x, x und y.

§ 109. Das Trägheitsellipsoid

Der in dem vorhergehenden Paragraphen gewonnene Ausdruck des Trägheitsmomentes J durch die Winkel α, β und γ gestattet eine einfache geometrische Auslegung.

Wir nehmen wieder im gegebenen Körper einen beliebigen Punkt O an und ziehen durch diesen Punkt die zueinander senkrechten Achsen x, y und z sowie die Achse L, die mit den Achsen x, y und z die Winkel α, β und γ bilden (Abb. 176). Wir bezeichnen das Trägheitsmoment des gegebenen Körpers in bezug auf die Achse L mit J und tragen vom Punkte O auf der Achse L den Abschnitt

$$OK = \frac{1}{\sqrt{J}}$$

ab.

Den verschiedenen Richtungen der Achse L (d. h. den verschiedenen Werten der Winkel α, β und γ) entsprechen verschiedene Lagen des Punktes K. Wir wollen den geometrischen Ort der auf diese Art konstruierten Punkte K ermitteln.

Wir bezeichnen die Koordinaten des Punktes K (bezogen auf die Achsen x, y und z) mit x, y und z und werden uns bemühen, die Gleichung zu finden, die durch diese Koordinaten befriedigt wird.

Es gilt:

$$\begin{aligned} x &= OK\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{J}}, \\ y &= OK\cos\beta = \frac{\cos\beta}{\sqrt{J}}, \\ z &= OK\cos\gamma = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{J}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Andererseits haben wir die Abhängigkeit

$$J = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\gamma\cos\alpha - 2F\cos\alpha\cos\beta.$$

Wenn wir hier die Ausdrücke für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, und $\cos\gamma$ einsetzen, die aus den Gln. (1) hervorgehen, finden wir

$$J = AJx^2 + BJy^2 + CJz^2 - 2DJyz - 2EJzx - 2FJxy$$

oder, nach der Kürzung durch J,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1. \tag{2}$$

Wir haben die Gleichung gewonnen, welche die Koordinaten x, y und z verbindet und damit die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes der Punkte K darstellt.

Da die von uns gewonnene Gleichung vom zweiten Grade ist, so ist der gesuchte geometrische Ort eine Fläche zweiter Ordnung, und man erkennt leicht, daß es sich hier um ein Ellipsoid handelt.

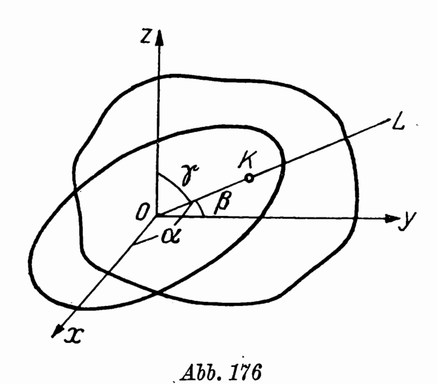


Abb. 176

Tatsächlich ist das Ellipsoid die einzige Fläche zweiter Ordnung, die keine unendlich entfernten Punkte besitzt. Andererseits kann der Abschnitt OK in keiner Richtung der Achse L unendlich groß werden (da das Trägheitsmoment J niemals gleich Null ist). Auch hieraus müssen wir folgern, daß die von uns gefundene Fläche zweiter Ordnung, auf der die Punkte K liegen, ein Ellipsoid ist.

Dieses Ellipsoid heißt *Trägheitsellipsoid.*

Wir bemerken, daß der Koordinatenursprung das Ellipsoidzentrum ist, da es in der Gl. (2) keine Glieder ersten Grades gibt. Somit befindet sich das Zentrum des Trägheitsellipsoids im Punkte O.

§ 110. Die Hauptträgheitsachsen

Die Bedeutung der im vorhergehenden Paragraphen dargelegten geometrischen Untersuchung besteht darin, daß sie uns die äußerst wichtige Vorstellung von den Hauptträgheitsachsen eines starren Körpers vermittelt.

Es ist bekannt, daß jedes Ellipsoid drei zueinander senkrechte Achsen besitzt. Gleichfalls bekannt ist, daß in der Gleichung des Ellipsoids die Glieder, die gemischte Koordinatenprodukte enthalten, dann verschwinden, wenn diese Achsen zugleich die Koordinatenachsen sind.

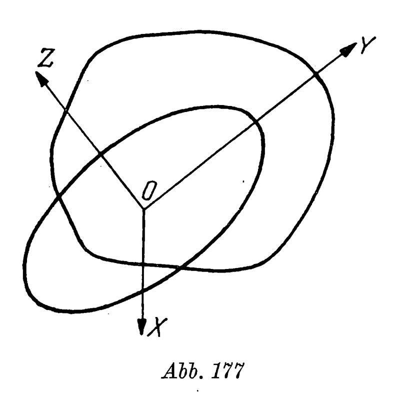


Abb. 177

Im vorhergehenden Paragraphen wurden die Achsen x, y und z im Punkte O ganz willkürlich gewählt; die Gleichung des Trägheitsellipsoids, bezogen auf diese Achsen, hat die Form

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 - 2 D y z - 2 E z x - 2 F x y = 1,$$

wobei A, B und C die Trägheitsmomente des gegebenen Körpers in bezug auf die Achsen x, y und z sind; D, E und F sind die entsprechenden zentrifugalen Trägheitsmomente in bezug auf die Achsen y und z, z und x, x und y.

Wir bestimmen die Achsen des Trägheitsellipsoids, das für den Punkt O konstruiert ist, und werden diese Achsen X, Y und Z nennen und sie zugleich als Koordinatenachsen verwenden (Abb. 177). Wenn wir die Gleichung des Trägheitsellipsoids auf die Achsen X, Y und Z beziehen, müssen die Glieder, die gemischte Koordinatenprodukte enthalten, in dieser Gleichung verschwinden (d. h., die Koeffizienten dieser Glieder müssen Null werden). Die Gleichung des Trägheitsellipsoids, bezogen auf die Achsen X, Y und Z, wird dann die Form

$$A X^2 + B Y^2 + C Z^2 = 1$$

haben, wobei A, B und C die Trägheitsmomente des gegebenen Körpers in bezug auf die Achsen X, Y und Z sind. Die zentrifugalen Trägheitsmomente D, E und F in bezug auf die Achsen X, Y und Z sind gleich Null.

Also folgern wir, daß in jedem Punkte O eines starren Körpers drei zueinander senkrechte Achsen X, Y und Z vorhanden sind, für welche die zentrifugalen Trägheitsmomente des Körpers in bezug auf diese Achsen gleich Null sind. Diese Achsen heißen *Hauptträgheitsachsen* und die entsprechenden Trägheitsmomente A, B und C *Hauptträgheitsmomente* bezüglich des Punktes O.

Wir wählen nun irgendeinen Punkt O im starren Körper und bezeichnen die Hauptträgheitsachsen des gegebenen Körpers in diesem Punkte mit X, Y und Z (Abb. 178). Darauf legen wir durch den Punkt O irgendeine Achse L und bezeichnen die durch die Achse L mit den Achsen X, Y und Z gebildeten Winkel mit α, β und γ. Wir bezeichnen das Trägheitsmoment des gegebenen Körpers in bezug auf die Achse L

mit J. Denken wir an die im § 108 aufgestellte Abhängigkeit zwischen den Trägheitsmomenten J und den Winkeln α, β und γ und beachten wir, daß im gegebenen Falle die zentrifugalen Trägheitsmomente D, E und F Null werden, so erhalten wir

$$J = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma ,$$

wobei A, B und C die Hauptträgheitsmomente des gegebenen Körpers im Punkte O sind.

Gemäß dieser Gleichung kann das Trägheitsmoment in bezug auf eine beliebige durch den Punkt O gehende Achse errechnet werden, wenn die Hauptträgheitsmomente A, B und C, die diesem Punkte entsprechen, bekannt sind.

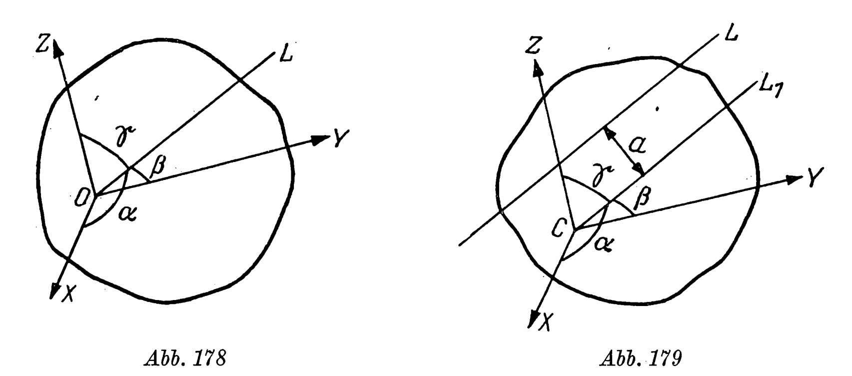


Abb. 178 *Abb. 179*

Die dem Schwerpunkt eines Körpers entsprechenden Hauptträgheitsachsen heißen *Hauptzentral-Trägheitsachsen.* Wir wollen zeigen, daß das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf eine beliebige Achse leicht gefunden werden kann, wenn die Richtungen der Hauptzentral-Trägheitsachsen des Körpers und ebenso seine Trägheitsmomente in bezug auf diese Achsen bekannt sind.

Wir wollen annehmen, daß das Trägheitsmoment J eines Körpers in bezug auf irgendeine Achse L berechnet werden soll (Abb. 179). Wir legen den Schwerpunkt C des Körpers und die Hauptzentral-Trägheitsachsen X, Y und Z fest. Wir legen durch den Punkt C die zu der Achse L parallel verlaufende Achse L_1 und bezeichnen die Winkel, die von der Achse L_1 mit den Achsen X, Y und Z gebildet werden, mit α, β und γ. Das Trägheitsmoment J_c des gegebenen Körpers in bezug auf die Achse L_1 wird aus der Gleichung

$$J_c = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma$$

berechnet, wobei A, B und C die Hauptträgheitsmomente des Körpers sind. Wenn wir den Abstand zwischen den Achsen L und L_1 mit d bezeichnen, erhalten wir

$$J = J_c + M d^2 ,$$

wobei M die Masse des Körpers ist.

Wir wollen nun klarstellen, *unter welcher Bedingung eine gegebene Achse die Hauptträgheitsachse im gegebenen Punkte des Körpers ist.*

Wir nehmen an, daß die z-Achse die Hauptträgheitsachse im Punkte O ist (Abb. 180). Das bedeutet, daß die z-Achse eine der Achsen des für den Punkt O konstruierten Trägheitsellipsoids ist. Wie legen durch den Punkt O die zwei zueinander senkrechten Achsen x und y, die auch zu der gegebenen z-Achse senkrecht verlaufen. Wie wir wissen, hat die Gleichung des auf die Achsen x, y und z bezogenen Trägheitsellipsoids die Form

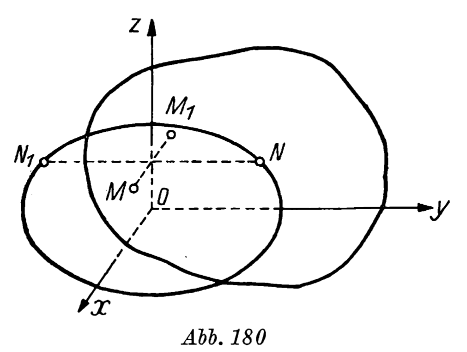


Abb. 180

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 - 2 D y z - 2 E z x - 2 F x y = 1,$$

wobei die Buchstaben A, B, C, D, E und F die uns bereits bekannten Bedeutungen haben; wir erinnern daran, daß D, E und F zentrifugale Trägheitsmomente in bezug auf die Achsen z und y, z und x bzw. x und y sind.

Wir nehmen den auf der Fläche des Trägheitsellipsoids liegenden Punkt M in der xz-Ebene an und bezeichnen die Koordinaten dieses Punktes mit x, 0, z. Da laut Voraussetzung die z-Achse auch Achse des Trägheitsellipsoids ist, muß der Punkt M_1 mit den Koordinaten $-x$, 0, z gleichfalls zu diesem Ellipsoid gehören. Setzen wir die Koordinaten der Punkte M und M_1 in die Gleichung des Trägheitsellipsoids ein, so erhalten wir zwei Gleichungen:

$$A x^2 + C z^2 - 2 E z x = 1,$$

$$A x^2 + C z^2 + 2 E z x = 1.$$

Subtrahieren wir die erste Gleichung von der zweiten, so finden wir:

$$4 E z x = 0$$

oder, da x und z nicht gleich Null sind,

$$E = 0.$$

Entsprechend überzeugen wir uns, daß

$$D = 0$$

ist, wenn wir die zwei Punkte N und N_1 des Trägheitsellipsoids nehmen, die in der yz-Ebene und symmetrisch zur z-Achse liegen.

Also besteht die Bedingung, nach der die z-Achse die Hauptträgheitsachse im Punkte O ist, darin, *daß die zentrifugalen Trägheitsmomente des Körpers in bezug auf die z-Achse und die beiden anderen zueinander und zur z-Achse senkrechten Achsen, die durch den Punkt O gelegt sind, gleich Null sein müssen.*

Das soeben gewonnene Resultat gestattet, uns von der folgenden Eigenschaft der Hauptzentralträgheitsachsen zu überzeugen: *Die Hauptzentralträgheitsachse ist die Hauptträgheitsachse für alle ihre Punkte.*

Wir nehmen an, daß C der Schwerpunkt des gegebenen Körpers und die Achse z eine der Hauptzentralträgheitsachsen ist (Abb. 181). Wir legen durch den Punkt C die beiden Achsen x und y, die zueinander und zu der z-Achse senkrecht verlaufen. Da die z-Achse die Hauptträgheitsachse im Punkte C ist, gilt nach dem Bewiesenen

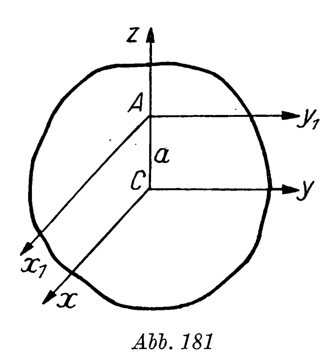


Abb. 181

$$D = \sum m_i y_i z_i = 0,$$

$$E = \sum m_i z_i x_i = 0,$$

wobei x_i, y_i und z_i die Koordinaten des Körperteilchens M_i, bezogen auf die Achsen x, y und z, sind. Wir wollen nun auf der z-Achse irgendeinen Punkt A annehmen und zeigen, daß die z-Achse eine der Hauptträgheitsachsen für den Punkt A ist. Wir legen durch den Punkt A die beiden Achsen x_1 und y_1, die parallel zu den Achsen x bzw. y verlaufen; wir müssen nun beweisen, daß die zentrifugalen Trägheitskräfte in bezug auf die Achsen z, y_1 und z, x_1 (wir bezeichnen sie mit D_1 und E_1) gleich Null sind.

Wir bezeichnen CA mit a. In Anbetracht dessen, daß in bezug auf die Achsen x_1, y_1, z die Koordinaten des Teilchens M_i x_i, y_i, $z_i - a$ sind, erhalten wir:

$$D_1 = \sum m_i y_i (z_i - a)$$
$$= \sum m_i y_i z_i - a \sum m_i y_i = D - M a y_c,$$
$$E_1 = \sum m_i (z_i - a) x_i$$
$$= \sum m_i z_i x_i - a \sum m_i x_i = E - M a x_c,$$

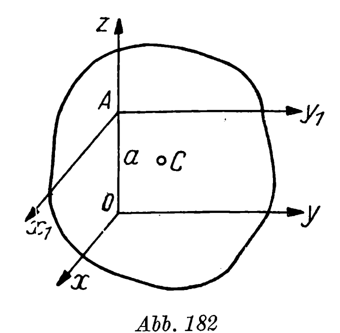


Abb. 182

wobei x_c und y_c die Koordinaten der Schwerpunkte C sind. Gemäß der Bedingung ist jedoch $D = E = 0$; da der Schwerpunkt auf der z-Achse liegt, ist $x_c = y_c = 0$. Folglich gilt

$$D_1 = 0, \qquad E_1 = 0.$$

Das bedeutet, daß die z-Achse die Hauptträgheitsachse im Punkte A ist.

Somit ist die Hauptzentral-Trägheitsachse für alle ihre Punkte Hauptträgheitsachse. *Umgekehrt kann die Hauptträgheitsachse, die nicht durch den Schwerpunkt verläuft, nur für einen ihrer Punkte Hauptträgheitsachse sein.*

Nehmen wir an, daß die z-Achse die Hauptträgheitsachse für den Punkt O ist, wobei der Schwerpunkt C nicht auf dieser Achse liegt (Abb. 182). Wir legen durch den

Punkt O die Achsen x und y, die zueinander und zur z-Achse senkrecht verlaufen. Gemäß der Bedingung gilt:

$$D = \sum m_i y_i z_i = 0, \qquad E = \sum m_i z_i x_i = 0.$$

Wir nehmen nun auf der z-Achse den Punkt A an und legen durch diesen Punkt die Achsen x_1 und y_1, die parallel zu den Achsen x und y verlaufen. Wenn wir OA mit a bezeichnen und die zentrifugalen Trägheitsmomente D_1 und E_1 in bezug auf die Achsen z, y_1 und z, x_1 errechnen, werden wir wie früher

$$D_1 = \sum m_i y_i (z_i - a) = D - M a y_c,$$
$$E_1 = \sum m_i (z_i - a) x_i = E - M a x_c$$

erhalten. Es ist aber $D = E = 0$; folglich gilt

$$D_1 = - M a y_c, \qquad E_1 = - M a x_c.$$

Da der Schwerpunkt C nicht auf der z-Achse liegt, sind die Koordinaten x_c und y_c nicht gleich Null. Folglich sind auch die zentrifugalen Trägheitsmomente D_1 und E_1 nicht gleich Null. Das bedeutet aber, daß die z-Achse nicht die Hauptträgheitsachse für den Punkt A sein kann.

§ 111. Die Trägheitsmomente einiger homogener Körper von einfacher Form

Wir haben im vorhergehenden Paragraphen gesehen, daß das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf eine beliebige Achse als bekannt angesehen werden kann, wenn die Richtung der Hauptzentral-Trägheitsachsen und auch die Trägheitsmomente in bezug auf diese Achsen bekannt sind.

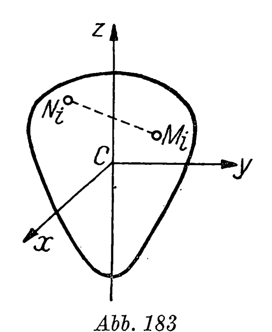


Abb. 183

Was die Richtung der Hauptzentral-Trägheitsachsen anbetrifft, so kann hier die Bemerkung von Nutzen sein, daß, wenn der homogene Körper eine Symmetrieachse besitzt, diese Achse eine der Hauptzentral-Trägheitsachsen des Körpers ist. Wenn der homogene Körper jedoch eine Symmetrieebene besitzt, ist jede zu dieser Ebene senkrechte Gerade Hauptträgheitsachse für den Punkt, in dem sie sich mit der Symmetrieebene schneidet.

Wir wollen uns einen homogenen Körper vorstellen, der die Symmetrieachse z hat (Abb. 183). Natürlich liegt der Schwerpunkt C auf dieser Achse. Wir legen durch den Punkt C die Achsen x und y, die zueinander und zu der z-Achse senkrecht verlaufen; wir wollen zeigen, daß die zentrifugalen Trägheitsmomente D und E in bezug auf die Achsen z, y und x, z gleich Null sind.

Es gilt:

$$D = \sum m_i y_i z_i, \qquad E = \sum m_i z_i x_i.$$

Da die z-Achse die Symmetrieachse des Körpers ist, entspricht jedem Teilchen M_i des Körpers mit den Koordinaten x_i, y_i und z_i das symmetrisch gelagerte Teilchen N_i mit den Koordinaten $-x_i$, $-y_i$ und z_i. Wenn wir (was immer möglich ist) annehmen, daß die Massen der Teilchen M_i und N_i gleich sind, werden sich in den Ausdrücken D und E die dem Teilchen M_i entsprechenden Summanden $m_i y_i z_i$ und $m_i z_i x_i$ gegen die dem Teilchen N_i entsprechenden Summanden $-m_i y_i z_i$ und $-m_i z_i x_i$ aufheben. Entsprechend werden sich in den Ausdrücken D und E alle Summanden paarweise aufheben, und wir erhalten

$$D = 0, \qquad E = 0.$$

Das bedeutet, daß die z-Achse die Hauptzentral-Trägheitsachse ist.

Wir setzen nun voraus, daß der homogene Körper die Symmetrieebene S hat (Abb. 184). Wir nehmen in dieser Ebene den Punkt O an und errichten in demselben die Senkrechte z auf der Ebene S. Wir werden jetzt zeigen, daß die z-Achse Hauptträgheitsachse für den Punkt O ist. Zu dem Zweck legen wir durch den Punkt O in der Ebene S zwei zueinander senkrechte Achsen x und y und berechnen die zentrifugalen Trägheitsmomente

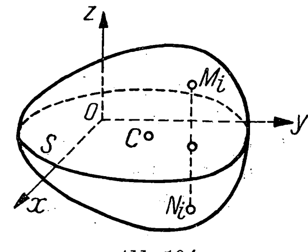


Abb. 184

$$D = \sum m_i y_i z_i, \qquad E = \sum m_i z_i x_i.$$

Da die Ebene S die Symmetriefläche des Körpers ist, zerfallen alle Teilchen des Körpers in Paare symmetrisch gelagerter Teilchen M_i (mit den Koordinaten x_i, y_i, z_i) und N_i (mit den Koordinaten x_i, y_i und $-z_i$). Infolgedessen heben sich in den Ausdrücken D und E alle Summanden paarweise auf, und es gilt

$$D = 0, \qquad E = 0.$$

Das bedeutet, daß die z-Achse die Hauptträgheitsachse im Punkte O ist. Natürlich liegt der Schwerpunkt des Körpers C in der Symmetrieebene S; die im Punkte C auf der Ebene S errichtete Senkrechte ist eine der Hauptzentral-Trägheitsachsen des Körpers. Für homogene Körper von einfacher geometrischer Form können die Hauptzentralträgheitsachsen durch eine unmittelbare Berechnung ermittelt werden. Wir bemerken, daß die Trägheitsmomente A, B und C in bezug auf diese Achsen durch die Gleichungen

$$A = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2), \qquad B = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2), \qquad C = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

gefunden werden können, wenn die Hauptzentral-Trägheitsachsen zugleich die Koordinatenachsen x, y und z sind.

Wir werden die Berechnung der Trägheitsmomente A, B und C an einigen Beispielen zeigen.

1. *Die Kugel*

Jeder Durchmesser der Kugel ist eine Hauptzentral-Trägheitsachse. Wir wählen drei zueinander senkrechte Durchmesser der Kugel als Achsen x, y und z (Abb. 185)

und bezeichnen den Abstand des Teilchens M_i vom Zentrum der Kugel C mit r_i. Wir bilden die Summe:

$$S = \sum m_i r_i^2.$$

Es gilt: $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$, folglich ist

$$S = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

Andererseits gilt:

$$A + B + C = 2 \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2\,S.$$

Da im gegebenen Fall $A = B = C$ ist, folgt hieraus, daß

$$A = B = C = \frac{2}{3} S$$

ist.

Also wird die Berechnung der Größen A, B und C auf die Errechnung der Summe S reduziert.

Zur Bestimmung der Summe S wollen wir auf folgende Art verfahren. Wir betrachten innerhalb der Kugel eine Reihe unendlich naher, konzentrischer, kugelförmiger Flächen mit dem gemeinsamen Zentrum im Punkte C. Durch diese Flächen wird das Volumen der Kugel in eine Reihe unendlich dünner kugelförmiger Schalen zerlegt. Wir wollen den Teil der Summe S berechnen, der dem zu der Kugelschale gehörenden Teilchen entspricht; dieser Teil ist zwischen den Kugelflächen mit den Radien r und $r + dr$ eingeschlossen.

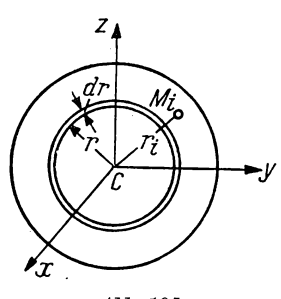


Abb. 185

Für alle diese Teilchen hat die Größe r_i ein und denselben Wert; wir können annehmen, daß $r_i = r$ ist. Setzen wir die Größe r^2 hinter die Klammer, so schließen wir, daß der uns interessierende Teil der Summe S gleich dem Produkt aus r^2 und der Masse der von uns bezeichneten Kugelschale ist. Diese Masse ist gleich

$$4\,\pi \varrho r^2\,dr,$$

wobei ϱ die Dichte ist. Folglich hat der Teil der Summe S, welcher der von uns gewählten Schale entspricht, den Wert

$$4\,\pi \varrho r^4\,dr.$$

Um den Wert der Summe S zu ermitteln, muß nun noch über r in den Grenzen von $r = 0$ bis $r = R$ integriert werden, wobei R der Radius der Kugel ist. Also ist

$$S = 4\,\pi \varrho \int_0^R r^4\,dr = \frac{4}{5} \pi \varrho R^5.$$

Nun gilt, wenn wir die Masse der Kugel mit M bezeichnen,

$$M = \frac{4}{3} \pi \varrho R^2 .$$

Folglich ist $S = \frac{3}{5} M R^2$.

Hieraus erhalten wir endgültig:

$$A = B = C = \frac{2}{5} M R^2 .$$

2. *Die runde Scheibe*

Wir betrachten eine runde Scheibe vom Radius R und der geringfügig kleinen Dicke ε.

Die Hauptzentral-Trägheitsachsen sind die im Zentrum der Scheibe C auf ihrer Ebene errichtete Senkrechte Z und zwei beliebige zueinander senkrechte Durchmesser der Scheibe x und y (Abb. 186). Da man für alle Teilchen der Scheibe $z_i = 0$ annehmen kann, haben wir im gegebenen Fall

$$A = \sum m_i y_i^2 , \qquad B = \sum m_i x_i^2 , \qquad C = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

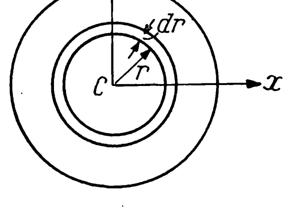


Abb. 186

Hieraus folgt, daß

$$A = B = \frac{1}{2} C$$

ist.

Um das Trägheitsmoment C zu berechnen, legen wir eine Reihe unendlicher naher konzentrischer Kreise in die Scheibe mit dem gemeinsamen Zentrum, das mit dem der Scheibe zusammenfällt. Durch diese Kreise wird die Scheibe in eine Reihe unendlich dünner kreisförmiger Ringe geteilt. Das Trägheitsmoment C finden wir als Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Ringe in bezug auf die z-Achse.

Das Trägheitsmoment eines durch die Kreise mit den Radien r und $r + \mathrm{d}r$ begrenzten Ringes ist gleich der Größe r^2 multipliziert mit der Masse des Ringes. Die Masse des Ringes ist gleich $2 \pi \varrho \varepsilon r \, \mathrm{d}r$, wobei ϱ die Dichte ist; folglich ist das Trägheitsmoment des Ringes gleich

$$2 \pi \varrho \varepsilon r^3 \, \mathrm{d} r .$$

Durch Summieren erhalten wir:

$$C = 2 \pi \varrho \varepsilon \int_0^R r^3 \, \mathrm{d} r = \frac{1}{2} \pi \varrho \varepsilon R^4 .$$

Wenn wir nun beachten, daß die Masse der Scheibe M den Wert

$$M = \pi \varrho \varepsilon R^2$$

hat, erhalten wir endgültig:

$$C = \frac{1}{2} M R^2.$$

Für die Trägheitsmomente A und B erhalten wir den Ausdruck

$$A = B = \frac{1}{4} M R^2.$$

3. *Der Zylinder*

Wir bezeichnen den Radius der Basis des Zylinders mit R, seine Höhe mit $2\,l$. Hauptzentral-Trägheitsachsen sind dann die Zylinderachse z und zwei beliebige zueinander senkrechte Durchmesser x und y seines mittleren Querschnittes (Abb. 187). Wir legen eine Reihe unendlich naher Schnitte durch den Zylinder, die senkrecht zu seiner Achse verlaufen. Durch diese Schnitte wird der Zylinder in eine Reihe unendlich dünner runder Scheiben zerlegt. Wir werden die Trägheitsmomente des Zylinders A, B, C in bezug auf die Achsen x, y und z als Summen der Trägheitsmomente der einzelnen Scheiben finden.

Wir greifen zwei unendlich nahe Schnitte des Zylinders heraus, die den Koordinaten z und $z + dz$ entsprechen. Das Trägheitsmoment der zwischen diesen Schnitten eingeschlossenen Scheibe in bezug auf die z-Achse ist nach dem oben Gesagten gleich

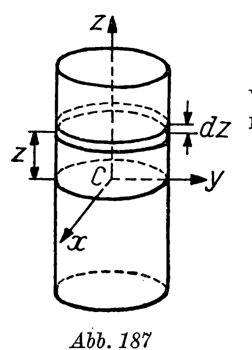


Abb. 187

$$\frac{1}{2} \pi \varrho R^4 \, d z,$$

wobei ϱ die Dichte ist. Hieraus erhalten wir, wenn wir summieren,

$$C = \frac{1}{2} \pi \varrho R^4 \int_{-l}^{l} d z = \pi \varrho R^4 l.$$

Die Masse M des Zylinders ist gleich

$$M = 2 \pi \varrho R^2 l.$$

Folglich ist

$$C = \frac{1}{2} M R^2.$$

Um das Trägheitsmoment der Scheibe in bezug auf die x-Achse zu berechnen, ermitteln wir zuerst ihr Trägheitsmoment in bezug auf die Achse, die parallel zur x-Achse verläuft und durch den Schwerpunkt der Scheibe hindurchgeht; wie weiter oben ermittelt wurde, ist dieses Trägheitsmoment gleich einem Viertel des Produktes aus Masse der Scheibe und dem Quadrat ihres Radius, d. h.

$$\frac{1}{4} \pi \varrho R^4 \, d z.$$

Wenn man im Auge behält, daß die Masse der Scheibe gleich $\pi\,\varrho\,R^2\,\mathrm{d}z$ ist und sich der im § 107 aufgestellten Gleichung bedient, findet man das Trägheitsmoment der Scheibe in bezug auf die x-Achse:

$$\frac{1}{4}\,\pi\,\varrho\,R^4\,\mathrm{d}z + \pi\,\varrho\,R^2 z^2\,\mathrm{d}z.$$

Hieraus erhalten wir, wenn wir summieren,

$$A = \frac{1}{4}\,\pi\,\varrho\,R^4 \int_{-l}^{l} \mathrm{d}z + \pi\,\varrho\,R^2 \int_{-l}^{l} z^2\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\,\pi\,\varrho\,R^4\,l + \frac{2}{3}\,\pi\,\varrho\,R^2 l^3,$$

oder

$$A = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right).$$

Natürlich ist $B = A$.

4. *Das rechtwinklige Parallelepiped*

Wir bezeichnen die Länge der Kanten des Parallelepipeds mit $2a$, $2b$ und $2c$. Als Hauptzentral-Trägheitsachsen x, y und z erscheinen die drei Mittellinien des Parallelepipeds (Abb. 188). Wenn wir die Masse des Parallelepipeds mit M bezeichnen, erhalten wir, was leicht zu zeigen ist:

$$\sum m_i\,x_i^2 = \frac{1}{3}\,M\,a^2, \qquad \sum m_i\,y_i^2 = \frac{1}{3}\,M\,b^2,$$

$$\sum m_i\,z_i^2 = \frac{1}{3}\,M\,c^2.$$

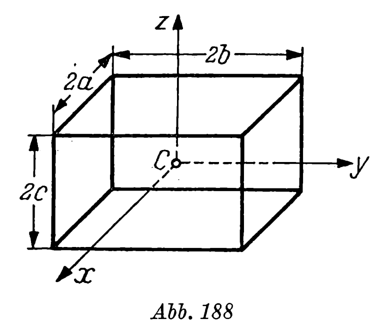


Abb. 188

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$A = \frac{1}{3}\,M\,(b^2 + c^2), \qquad B = \frac{1}{3}\,M\,(c^2 + a^2),$$

$$C = \frac{1}{3}\,M\,(a^2 + b^2).$$

Wir überlassen es dem Leser, diese Gleichungen ausführlich aufzustellen und beschränken uns auf die Bemerkung, daß es bei der Berechnung der Summe $\sum m_i\,x_i^2$ zweckmäßig ist, das Parallelepiped in eine Reihe unendlich dünner rechtwinkliger Scheiben durch senkrecht zur x-Achse verlaufende Ebenen zu zerlegen.

Zum Abschluß dieses Paragraphen erwähnen wir, daß man in den Fällen, in denen die Berechnung der exakten Werte der Trägheitsmomente des Körpers Schwierigkeiten bereitet, die annähernden Werte dieser Größen ermitteln kann, wenn man sich der Verfahren einer angenäherten Berechnung der bestimmten Integrale bedient. In vielen Fällen wird es vorgezogen, die Trägheitsmomente auf experimentellem Wege zu bestimmen; eines dieser Verfahren, die zu diesem Zweck angewandt werden, wurde im § 95 dargelegt.

§ 112. Die reduzierte Länge und das Schwingungszentrum eines physikalischen Pendels

Wir wollen nun zu einigen Fällen der Anwendung der in diesem Kapitel aufgestellten Resultate übergehen.

Wir stellen uns einen starren Körper vor, der eine feste horizontale Gerade besitzt und sich nur unter der Einwirkung des eigenen Gewichtes befindet. Einen solchen Körper bezeichnet man als *physikalisches Pendel.* Die feste Gerade nennen wir Drehachse des Pendels. Wir legen durch den Schwerpunkt des Körpers C eine Ebene, die senkrecht auf der Drehachse steht, und verwenden diese Ebene als Zeichnungsebene. Ihren Schnittpunkt mit der Drehachse bezeichnen wir mit dem Buchstaben O (Abb. 189).

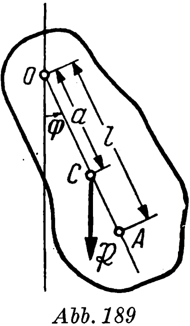


Abb. 189

Wir stellen die Differentialgleichung für die Bewegung des physikalischen Pendels auf. Dabei bedienen wir uns der Differentialgleichung für die Drehung eines starren Körpers.

Wir bezeichnen das Gewicht des Pendels mit $\mathfrak{P}$, den Abstand OC seines Schwerpunktes von der Drehachse mit a und das Trägheitsmoment des Pendels in bezug auf die Drehachse mit J. Die an dem Pendel angreifenden äußeren Kräfte sind die Schwerkraft $\mathfrak{P}$ und die Reaktionen der Lager, in denen sich die Drehachse befindet. Die Momente dieser Reaktionen in bezug auf die Drehachse sind jedoch gleich Null (wir vernachlässigen hierbei die Reibungskräfte in den Lagern); das Moment der Schwerkraft $\mathfrak{P}$ in bezug auf dieselbe Achse ist gleich $-Pa \sin \varphi$, wobei φ der durch den Abschnitt OC mit der Vertikalen gebildete Winkel ist (d. h. der Winkel der Abweichung des Abschnittes OC von seiner vertikalen Gleichgewichtslage). Wählen wir den Winkel φ als Drehwinkel des Pendels, so erhalten wir die Differentialgleichung der Rotation

$$J\ddot{\varphi} = -Pa \sin \varphi$$

oder

$$\ddot{\varphi} + \frac{Pa}{J} \sin \varphi = 0,$$

durch welche die Schwingungen des Pendels bestimmt werden.

Im § 30 war die Differentialgleichung der Schwingungen eines mathematischen Pendels aufgestellt worden; sie hat die Form

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0,$$

wobei φ der Abweichungswinkel des mathematischen Pendels von der vertikalen Gleichgewichtslage und l die Länge des Pendels ist.

Vergleichen wir diese Gleichung mit der Differentialgleichung der Schwingungen des physikalischen Pendels, so sehen wir, daß man die Identität dieser Gleichung

durch eine geeignete Auswahl der Größe l erreichen kann. Das bedeutet, daß man jedem physikalischen Pendel ein mathematisches Pendel von bestimmter Länge gegenüberstellen kann, das mit dem gegebenen physikalischen Pendel identisch schwingt. Die Länge dieses äquivalenten mathematischen Pendels wird durch die Gleichung

$$\frac{g}{l} = \frac{P a}{J}$$

bestimmt, woraus

$$l = \frac{J g}{P a} = \frac{J}{M a}$$

folgt.

Diese Größe l heißt *reduzierte Länge* des physikalischen Pendels. Wir tragen vom Punkt O auf der Geraden OC den Abschnitt $OA = l$ ab; der Punkt A heißt *Schwingungszentrum* des Pendels. Die durch das Schwingungszentrum hindurchgehende Achse, die parallel zu der Drehachse verläuft, heißt *Schwingungsachse* des Pendels. Wir bezeichnen nun das Trägheitsmoment des Pendels in bezug auf die Achse, die parallel zu der Drehachse verläuft und durch den Schwerpunkt C hindurchgeht, mit J_c.

Es ist

$$J = J_c + M a^2.$$

Folglich ist

$$l = \frac{J_c + M a^2}{M a} = \frac{J_c}{M a} + a.$$

Hieraus folgt, daß $l > a$ ist; das bedeutet, daß der Schwerpunkt C stets zwischen dem Drehpunkt O und dem Schwingungszentrum A liegt. Wir wollen die Bezeichnung $l - a = AC = b$ einführen. Es gilt dann:

$$b = \frac{J_c}{M a},$$

woraus wir, wenn wir $J_c = M r_{Ic}^2$ setzen, wobei r_{Ic} der Trägheitsradius des Pendels in bezug auf die Achse ist, die parallel zu der Drehachse verläuft und durch den Schwerpunkt geht,

$$a b = r_{Ic}^2$$

erhalten.

Wir wollen diese Gleichung auf das im § 95 angeführte Zahlenbeispiel anwenden.

In diesem Beispiel war $a = 121{,}55$ cm; die beobachtete Schwingungsdauer der Kurbelstange betrug $T = 2{,}53$ s. Wir berechnen den Trägheitsradius r_{Ic}. Wenn wir die reduzierte Länge der Kurbelstange, die als physikalisches Pendel angesehen wird, aus der Gleichung

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

berechnen, erhalten wir:

$$l = \frac{g\,T^2}{4\,\pi^2} = 159\,\text{cm}.$$

Damit erhalten wir, wenn wir $a = 122$ cm annehmen:

$$b = l - a = 37\,\text{cm}$$

und hieraus

$$r_{Ic} = \sqrt{a\,b} = 67\,\text{cm},$$

was mit dem im § 107 gewonnenen Resultat übereinstimmt.

§ 113. Der Ausgleich der Trägheitskräfte eines rotierenden Körpers

Bei einer schnellen Rotation irgendeines Teiles der Maschine entstehen in demselben bedeutende Trägheitskräfte, die einen zusätzlichen Druck auf die die Rotationsachse des gegebenen Körpers stützenden Lager hervorrufen und Erschütterungen der ganzen Maschine bewirken, wenn sie durch die Lager auf die Widerlager der Maschine übertragen werden. Diese schädlichen Erscheinungen verschwinden in dem Fall, wenn sich die Trägheitskräfte des rotierenden Körpers ausgleichen. Wir wollen klarstellen, welche Bedingungen geschaffen werden müssen, damit ein solcher Ausgleich der Trägheitskräfte stattfindet.

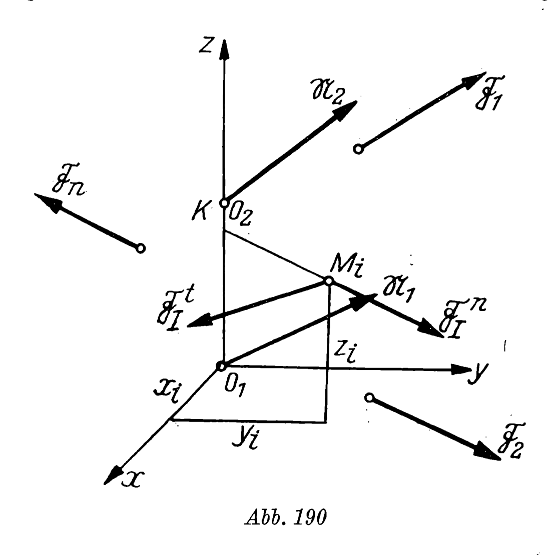


Abb. 190

Wir stellen uns einen starren Körper vor, der unter der Einwirkung der angreifenden äußeren Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ um die feste z-Achse rotiert (Abb. 190). Wir nehmen die beiden Punkte O_1 und O_2 des Körpers, die auf der z-Achse liegen, als unbeweglich befestigt an (zwei Lager, welche die Rotationsachse des Körpers stützen). Wir wollen den vom rotierenden Körper auf diese Stützpunkte ausgeübten Druck bestimmen. Natürlich ist dieser Druck der Größe nach gleich und entgegengesetzt gerichtet den entsprechenden Reaktionen der Stützpunkte O_1 und O_2. Wir wollen diese Reaktionen ermitteln und zu diesem Zweck die Methode der Kinetostatik benutzen.

Wir wissen, daß die gesuchten Reaktionen und die an dem Körper angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ durch die Trägheitskräfte aller Teilchen des Körpers ausgeglichen werden.

Wir legen durch den Punkt O_1 zwei Achsen x und y, die zueinander und zu der z-Achse senkrecht verlaufen, und stellen sechs Gleichungen der Statik auf, wobei wir zu den gegebenen Kräften auch noch die Trägheitskräfte der Körperteilchen hinzufügen.

Wir bezeichnen die Reaktionen der Punkte O_1 und O_2 mit $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ und ihre Komponenten auf den Koordinatenachsen entsprechend mit N_{1x}, N_{1y}, N_{1z}, N_{2x}, N_{2y} und N_{2z}.

Wir betrachten das Teilchen M_i des Körpers. Die Trägheitskraft dieses Teilchens setzt sich aus der zentrifugalen Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^n$ und der tangentialen Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I^t$ zusammen. Bezeichnen wir die Masse des Teilchens mit m_i und den Radius des durch denselben beschriebenen Kreisumfanges mit r_i, so gilt:

$$F_I^n = m_i r_i \omega^2, \qquad F_I^t = m_i r_i \varepsilon,$$

wobei ω und ε die Winkelgeschwindigkeit bzw. die Winkelbeschleunigung des Körpers sind. Die zentrifugale Trägheitskraft verläuft auf dem Rotationsradius KM_i des Punktes M_i, und ihre Richtungscosinus sind

$$\frac{x_i}{r_i}, \qquad \frac{y_i}{r_i}, \qquad 0.$$

Die tangentiale Trägheitskraft verläuft senkrecht zum Radius KM_i und ihre Richtungscosinus sind

$$\frac{y_i}{r_i}, \qquad -\frac{x_i}{r_i}, \qquad 0.$$

Daher können die Komponenten der Trägheitskraft auf den Koordinatenachsen auf folgende Art dargestellt werden:

$$F_{Ix} = m_i r_i \omega^2 \frac{x_i}{r_i} + m_i r_i \varepsilon \frac{y_i}{r_i},$$

$$F_{Iy} = m_i r_i \omega^2 \frac{y_i}{r_i} - m_i r_i \varepsilon \frac{x_i}{r_i},$$

$$F_{Iz} = 0$$

oder

$$F_{Ix} = m_i x_i \omega^2 + m_i y_i \varepsilon,$$

$$F_{Iy} = m_i y_i \omega^2 - m_i x_i \varepsilon,$$

$$F_{Iz} = 0.$$

Zum Aufstellen der Momente der Reaktionen und der Trägheitskräfte in bezug auf die Koordinatenachsen benutzen wir die im § 60 des ersten Teiles aufgestellten Gleichungen, und zwar

$$M_x = yZ - zY,$$

$$M_y = zX - xZ,$$

$$M_z = xY - yX.$$

Wir erhalten sechs Gleichgewichtsgleichungen:

$$N_{1x} + N_{2x} + \sum X_i + \sum m_i x_i \omega^2 + \sum m_i y_i \varepsilon = 0,$$
$$N_{1y} + N_{2y} + \sum Y_i + \sum m_i y_i \omega^2 - \sum m_i x_i \varepsilon = 0,$$
$$N_{1z} + N_{2z} + \sum Z_i = 0,$$
$$-a N_{2y} + \sum M_{ix} - \sum m_i y_i z_i \omega^2 + \sum m_i x_i z_i \varepsilon = 0,$$
$$a N_{2x} + \sum M_{iy} + \sum m_i x_i z_i \omega^2 + \sum m_i y_i z_i \varepsilon = 0,$$
$$\sum M_{iz} + \sum m_i x_i y_i \omega^2 - \sum m_i x_i^2 \varepsilon - \sum m_i x_i y_i \omega^2 - \sum m_i y_i^2 \varepsilon = 0,$$

wobei a die Länge des Abschnittes O_1O_2 ist, und ΣX_i, ΣY_i, ΣZ_i, ΣM_{ix}, ΣM_{iy}, ΣM_{iz} die Summen der Komponenten und die Summen der Momente der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ sind. Die von den Trägheitskräften abhängigen Glieder können umgeformt werden. Es gilt:

$$\sum m_i x_i \omega^2 = \omega^2 \sum m_i x_i = M x_c \omega^2,$$
$$\sum m_i y_i \varepsilon = \varepsilon \sum m_i y_i = M y_c \varepsilon,$$

wobei M die Masse des Körpers ist und x_c und y_c die Koordinaten seines Schwerpunktes sind; entsprechend ist

$$\sum m_i y_i \omega^2 = M y_c \omega^2, \qquad \sum m_i x_i \varepsilon = M x_c \varepsilon.$$

Ferner gilt:

$$\sum m_i y_i z_i \omega^2 = \omega^2 \sum m_i y_i z_i = D \omega^2,$$
$$\sum m_i x_i z_i \varepsilon = \varepsilon \sum m_i x_i z_i = E \varepsilon,$$
$$\sum m_i x_i z_i \omega^2 = E \omega^2, \qquad \sum m_i y_i z_i \varepsilon = D \varepsilon,$$
$$\sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \varepsilon = \varepsilon \sum m_i r_i^2 = J \varepsilon,$$

wobei D und E die zentrifugalen Trägheitsmomente des Körpers in bezug auf die Achsen y, z und x, z sind und J das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die z-Achse ist.

Somit erhalten wir die Gleichungen

$$N_{1x} + N_{2x} + \sum X_i + M x_c \omega^2 + M y_c \varepsilon = 0,$$
$$N_{1y} + N_{2y} + \sum Y_i + M y_c \omega^2 - M x_c \varepsilon = 0,$$
$$N_{1z} + N_{2z} + \sum Z_i = 0,$$
$$-a N_{2y} + \sum M_{ix} - D \omega^2 + E \varepsilon = 0,$$
$$a N_{2x} + \sum M_{iy} + E \omega^2 + D \varepsilon = 0,$$
$$\sum M_{iz} - J \varepsilon = 0.$$

In der letzten Gleichung sind die Auflagerreaktionen nicht enthalten, sie ist nichts anderes als die uns bereits bekannte Differentialgleichung der Rotation des Körpers. Aus den übrigen fünf Gleichungen können die Reaktionen N_{1x}, N_{1y}, N_{2x} und N_{2y} ermittelt werden, die senkrecht zu der Rotationsachse gerichtet sind; diese Reaktionen heißen Seitenreaktionen. Die Reaktionen N_{1z} und N_{2z}, die längs der Drehachse verlaufen (Längsreaktionen), bleiben unbestimmt. Wir erinnern daran, daß wir dieser Unbestimmtheit der Längsreaktionen bereits begegnet sind, als wir die gleiche Frage unter der Voraussetzung, daß sich der Körper in Ruhe befindet, betrachteten (siehe Teil I, § 63). Diese Unbestimmtheit wird beseitigt, wenn man einem der Stützpunkte O_1 und O_2 die Freiheit der Verrückung längs der z-Achse gibt. Wir ersehen aus der dritten Gleichung, daß die Längsreaktionen nicht von den Trägheitskräften abhängen.

Was die Seitenreaktionen N_{1x}, N_{1y}, N_{2x}, N_{2y} anbetrifft, so sehen wir, daß in den diese Reaktionen bestimmenden Gleichungen sowohl die von den gegebenen Kräften $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ abhängigen Glieder als auch die Glieder, die von den Trägheitskräften abhängen, enthalten sind. Hieraus folgt, daß sich jede Seitenreaktion aus der statischen Komponente, die durch die Einwirkung der angreifenden Kräfte hervorgerufen wird, und der dynamischen Komponente, die von den Trägheitskräften abhängt, zusammensetzt; bei einer schnellen Rotation können sich diese dynamischen Komponenten als sehr bedeutend erweisen. Wir bemerken jedoch, daß die dynamischen Glieder in den Seitenreaktionen gleich Null sind, wenn folgende Bedingungen eingehalten werden:

$$x_c \omega^2 + y_c \varepsilon = 0, \qquad y_c \omega^2 - x_c \varepsilon = 0, \tag{1}$$

$$-D \omega^2 + E \varepsilon = 0, \qquad E \omega^2 + D \varepsilon = 0. \tag{2}$$

Bei der Erfüllung dieser Bedingungen hängen die Seitenreaktionen nicht von den Trägheitskräften ab. In diesem Fall sagt man, daß die Trägheitskräfte ausgeglichen sind[1].

Wie aber sind die Bedingungen des Ausgleiches der Trägheitskräfte? Lösen wir die Gln. (1) nach x_c und y_c auf, so finden wir:

$$x_c = 0, \qquad y_c = 0.$$

Das bedeutet, daß sich der Schwerpunkt des Körpers auf der Rotationsachse befinden muß. Lösen wir aber die Gln. (2) in bezug auf D und E, so erhalten wir:

$$D = 0, \qquad E = 0.$$

Das bedeutet, daß die Drehachse z die Hauptträgheitsachse für den Punkt O_1 sein muß. Wenn aber die z-Achse durch den Schwerpunkt des Körpers verläuft, wird sie (nach dem im § 110 Bewiesenen) gleichzeitig die Hauptträgheitsachse auch für den Schwerpunkt sein.

---

[1] Man muß den Vorbehalt machen, daß ein derartiger Wortgebrauch nicht ganz genau ist. Hier gibt es keinen Ausgleich der Trägheitskräfte im buchstäblichen Sinn: Hier bleibt die Summe der Momente der Trägheitskräfte in bezug auf die Rotationsachse verschieden von Null.

Also werden die Trägheitskräfte eines rotierenden Körpers in dem Falle ausgeglichen sein, in dem *die Rotationsachse die Hauptzentralträgheitsachse des Körpers ist.*

Die rotierenden Teile der Maschinen sind gewöhnlich Rotationskörper; sie drehen sich um ihre Symmetrieachse. In einem solchen Fall ist die Bedingung des Ausgleiches der Trägheitskräfte erfüllt. Jedoch kann die Bearbeitung solcher Maschinenteile nie ideal präzise sein; infolge der unvermeidlichen Fehler in der Produktion fällt die Rotationsachse doch nicht ganz genau mit der Hauptträgheitsachse zusammen; es bleiben Trägheitskräfte unausgeglichen, die sich bei einer sehr schnellen Rotation als schädlich erweisen können. Dort, wo eine große Genauigkeit im Ausgleich der Trägheitskräfte gefordert wird (z. B. in Dampfturbinen), müssen die erwähnten Fehler durch Hinzufügen von zusätzlichen Massen an geeigneten Stellen des gegebenen Körpers korrigiert werden. Es gibt Vorrichtungen, die gestatten, auf experimentellem Wege die zusätzlichen Massen zu bestimmen, die zum Ausgleich der Trägheitskräfte benötigt werden.

KAPITEL XIX

DER STOSS

§ 114. Die momentanen Kräfte. Die Wirkung einer momentanen Kraft auf einen materiellen Punkt

Bei den Erscheinungen des Stoßes begegnen wir einer Gruppe von Kräften, bei denen die Berechnung der Wirkung einige Besonderheiten aufweist. Bei einem Zusammenstoß zweier Körper entsteht zwischen ihnen ein sehr großer Druck, der jedoch im Laufe eines sehr kurzen Zeitraumes wirkt. Wir wollen uns eine ruhende Kugel vorstellen, an welche eine andere mit einer gewissen Geschwindigkeit sich bewegende Kugel stößt. Nach dem Zusammenstoß berühren sich die Kugeln während eines sehr kurzen Zeitraumes, der *Stoßdauer* heißt, danach trennen sie sich von einander.

Vom Augenblick der ersten Berührung zwischen den Kugeln an treten gemeinsame Drücke auf, die solange wirken, wie sich die Kugeln gegenseitig berühren. Während der Dauer des Stoßes wachsen diese Drücke von Null bis zu einem Maximum an; danach fallen sie wieder und werden im Augenblick der Beendigung des Stoßes Null.

Experimentelle Untersuchungen[1] zeigen, daß unter gewöhnlichen Bedingungen die Stoßdauer mit Tausendsteln oder sogar Zehntausendsteln einer Sekunde gemessen wird.

Die Größen der bei einem Stoß des Körpers entstehenden Drücke sind sehr bedeutend; unter gewöhnlichen Bedingungen übersteigen sie das Gewicht des stoßenden Körpers um das Hundert- und Tausendfache. Somit werden die bei einem Stoße ent-

[1] Siehe z. B. A. N. Dinnik, „Stoß und Kompression elastischer Körper" (А. Н. Динник, Удар и сжатие упругих тел. Изв. Киевского политехнического института, 1910).

stehenden Drücke dadurch charakterisiert, daß sie im Laufe eines sehr kleinen Zeitraumes wirken, dabei aber sehr große Werte erreichen. Kräfte solcher Art heißen *momentane Kräfte*. Genauer bestimmen wir den Begriff der momentanen Kraft auf folgende Art: *Momentane Kraft heißt eine Kraft, die, wenn sie während eines geringfügig kleinen Zeitraumes wirkt, dabei so große Werte erreicht, daß während der Zeit ihrer Wirkung ihr Impuls eine endliche Größe ist.*

Nun müssen wir noch das Verfahren zur Berechnung der Wirkung einer an irgendeinem Körper angreifenden momentanen Kraft ermitteln. Um diese Frage zu klären, erläutern wir zunächst, wie das Resultat der Wirkung einer momentanen Kraft auf einen einzelnen materiellen Punkt sein wird.

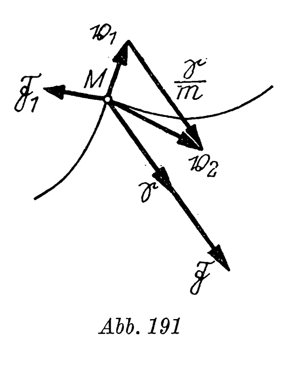


Abb. 191

Wir nehmen an, daß sich der materielle Punkt M unter der Wirkung angreifender Kräfte bewegt; die Resultierende dieser Kräfte bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}_1$ (Abb. 191). Zu einer bestimmten Zeit t_1 beginnt auf den Punkt M die momentane Kraft $\mathfrak{F}$ zu wirken, die ihre Wirkung im Augenblick $t_2 = t_1 + \tau$ abbricht, wobei τ der geringfügig kleine Zeitraum ist. Wir wenden bei der Bewegung des Punktes M in der Zeit τ den Impulssatz an.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeiten des Punktes M zur Zeit t_1 und t_2 mit $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$, die Impulse der Kräfte $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ in der Zeit τ mit $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$, so gilt:

$$m\,\mathfrak{v}_2 - m\,\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{S} + \mathfrak{S}_1 .$$

Wir sehen nun, daß der Impuls der endlichen Kraft $\mathfrak{F}_1$ im geringfügig kleinen Zeitraum τ eine kleine Größe von der Größenordnung τ ist. Der Impuls der momentanen Kraft $\mathfrak{F}$ aber wird von uns in der Zeit τ als endliche Größe vorausgesetzt. Hieraus folgt, daß wir den Impuls $\mathfrak{S}_1$ im Vergleich zum Impuls $\mathfrak{S}$ vernachlässigen können. Vernachlässigen wir den Impuls $\mathfrak{S}_1$, so erhalten wir

$$m\,\mathfrak{v}_2 - m\,\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{S}$$

oder

$$\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1 = \frac{\mathfrak{S}}{m} . \tag{1}$$

Hieraus ist zu ersehen, daß sich die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2$ von der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ um die endliche Größe $\dfrac{\mathfrak{S}}{m}$ unterscheidet. Das bedeutet, daß in dem geringfügig kleinen Zeitraum τ, in dem die momentane Kraft wirkt, eine endliche Veränderung der Größe und der Richtung der Geschwindigkeit des Punktes M vor sich geht. Wir können sagen, daß eine „momentane“ Veränderung der Geschwindigkeit des Punktes das Resultat der Wirkung einer momentanen Kraft auf diesen materiellen Punkt ist.

Da die Geschwindigkeit des Punktes M in der Zeit τ eine endliche Größe ist, so ist die von dem Punkte M in der Zeit τ erhaltene Verrückung eine kleine Größe von der Größenordnung τ; der materielle Punkt hat keine Zeit, sich während der Zeit der

Wirkung der momentanen Kraft merklich zu verschieben. Die geringfügig kleine Verrückung des Punktes M können wir also vernachlässigen. Somit äußert sich das einzige Resultat der Wirkung einer momentanen Kraft auf einen materiellen Punkt in einer momentanen Veränderung seiner Geschwindigkeit.

Aus der Gl. (1) folgt:

$$\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_1 + \frac{\mathfrak{S}}{m}.$$

Folglich können wir die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2$ erhalten, wenn wir die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ und die Größe $\frac{\mathfrak{S}}{m}$ addieren (Abb. 191).

Nach der Zeit t_2 bricht die Wirkung der momentanen Kraft $\mathfrak{F}$ ab, und die endliche Kraft $\mathfrak{F}_1$ wirkt wieder allein: Unter der Wirkung dieser Kraft setzt sich die Bewegung des Punktes M fort. Da sich die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2$ (allgemein gesprochen) von der Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ um eine endliche Größe unterscheidet, ist ihr Verlauf an der Stelle, an der sich der Punkt M unter der Wirkung der momentanen Kraft befand, unstetig.

Wenn wir alles soeben Dargelegte zusammenfassen, erhalten wir als gewonnene Grundresultate:

1. Bei der Berechnung der Wirkung einer momentanen Kraft kann man die Wirkung der endlichen Kräfte vernachlässigen.
2. Man kann die Verrückung des materiellen Punktes während der Zeit der Wirkung einer momentanen Kraft vernachlässigen.
3. Das Resultat der Wirkung einer momentanen Kraft drückt sich in der Veränderung der Geschwindigkeit des Punktes aus; diese Veränderung wird durch die Gl. (1) bestimmt.

§ 115. Die Wirkung der momentanen Kräfte auf den Schwerpunkt eines materiellen Systems

Da jeder Körper von uns als eine Vereinigung von materiellen Punkten betrachtet wird, können wir bei der Anwendung aller in dem vorhergehenden Paragraphen dargelegten Erwägungen auf alle materielle Punkte, die zum Bestande des gegebenen Körpers gehören, die Wirkung der an einem beliebigen Körper angreifenden momentanen Kräfte berechnen.

Wegen der am Ende des vorhergehenden Paragraphen festgestellten Resultate folgern wir: 1., daß man bei der Berechnung der Wirkung von an einem beliebigen Körper oder überhaupt an einem beliebigen materiellen System angreifenden momentanen Kräften die Wirkung der endlichen Kräfte vernachlässigen kann; 2., daß man die Verrückung der Punkte des Systems während der Zeit der Wirkung der momentanen Kräfte vernachlässigen kann und 3., daß als Resultat der Wirkung momentaner Kräfte die Veränderung der Geschwindigkeit der Systempunkte erscheint. Der Umstand, daß man bei der Berechnung der Wirkung der momentanen Kräfte die Verrückungen der Punkte des Körpers vernachlässigen kann, vereinfacht ganz bedeutend die Lösung der mit der Wirkung der momentanen Kräfte verbundenen Fragen.

Wir wollen uns nun mit der Klarstellung dessen befassen, wie sich die Wirkung der an einem materiellen System angreifenden momentanen Kräfte an dem Trägheitszentrum dieses Systems widerspiegelt.

Wir wissen bereits, daß die Verrückungen der Systempunkte während der Wirkung der momentanen Kräfte geringfügig klein sind. Hieraus folgt, daß auch die von dem Trägheitszentrum in diesem Zeitraum erhaltene Verrückung klein sein muß; diese geringfügige Verrückung können wir vernachlässigen. Das Resultat der Wirkung der momentanen Kräfte kann sich nur in der Veränderung der Geschwindigkeit des Trägheitszentrums äußern.

Um diese Veränderung der Geschwindigkeit des Trägheitszentrums zu ermitteln, werden wir vom Gesetz der Bewegung des Trägheitszentrums ausgehen.

Wir wissen, daß sich das Trägheitszentrum des Systems wie ein materieller Punkt bewegt, in dem die ganze Masse des Systems konzentriert ist und an dem alle auf das System wirkenden äußeren Kräfte angreifen. Hieraus folgt, daß die im vorhergehenden Paragraphen bei der Betrachtung der Wirkung der momentanen Kräfte auf einen materiellen Punkt gewonnenen Resultate unmittelbar auch bei der Berechnung der Wirkung momentaner Kräfte auf die Bewegung des Trägheitszentrums des Systems angewandt werden können.

Nehmen wir an, daß zur Zeit t_1 auf das mechanische System momentane Kräfte zu wirken beginnen, die ihre Wirkung im Augenblick $t_2 = t_1 + \tau$ abbrechen, wobei τ ein geringfügig kleiner Zeitraum ist. Wir wissen bereits, daß wir die an den Punkten des Systems angreifenden endlichen Kräfte im Vergleich zu den momentanen Kräften vernachlässigen können. Was die momentanen Kräfte anbetrifft, so können dazu sowohl äußere als auch innere Kräfte gehören. Wir wissen aber, daß die inneren Kräfte keinerlei Einfluß auf die Bewegung des Trägheitszentrums des Systems haben. Bezeichnen wir die äußeren momentanen Kräfte, die an den Punkten des Systems angreifen, mit $\mathfrak{F}_1^E, \mathfrak{F}_2^E, \ldots, \mathfrak{F}_n^E$, ihre Impulse in der Zeit τ mit $\mathfrak{S}_1^E, \mathfrak{S}_2^E, \ldots, \mathfrak{S}_n^E$ und wenden wir bei der Bewegung des Trägheitszentrums in dem Zeitraum τ den Impulssatz an, so erhalten wir

$$M\mathfrak{v}_2 - M\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{S}_1^E + \mathfrak{S}_2^E + \cdots + \mathfrak{S}_n^E,$$

wobei M die Masse des Systems ist und $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ die Geschwindigkeiten des Trägheitszentrums in den Augenblicken t_1 bzw. t_2 sind.

Die gewonnene Gleichung gestattet, die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_2$ zu bestimmen, wenn die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ und die Impulse aller auf das System wirkenden äußeren momentanen Kräfte bekannt sind.

Wenn wir beide Teile der gewonnenen Vektorgleichung auf die Koordinatenachsen x, y und z projizieren, erhalten wir die Gleichungen:

$$M(v_{2x} - v_{1x}) = \sum S_{ix}^E,$$
$$M(v_{2y} - v_{1y}) = \sum S_{iy}^E,$$
$$M(v_{2z} - v_{1z}) = \sum S_{iz}^E.$$

Diese Gleichungen muß man benutzen, wenn man den Einfluß der momentanen Kräfte auf die Bewegung des Trägheitszentrums eines Systems berechnen will.

§ 116. Die Wirkung der momentanen Kräfte auf einen starren Körper, der um eine feste Achse rotiert, und auf einen starren Körper, der sich parallel zu einer festen Ebene bewegt

Wir stellen uns vor, daß auf einen sich um eine feste Achse z drehenden starren Körper im Augenblick t_1 momentane Kräfte zu wirken beginnen, die im Augenblick $t_2 = t_1 + \tau$ ihre Wirkung abbrechen, wobei τ ein geringfügig kleiner Zeitraum ist. Als Ergebnis der Wirkung der momentanen Kräfte wird sich eine Veränderung der Geschwindigkeiten der Punkte des rotierenden Körpers und folglich auch eine Veränderung seiner Winkelgeschwindigkeit ergeben. Wir wollen diese Veränderung der Winkelgeschwindigkeit des Körpers ermitteln.

Nehmen wir an, daß zur Zeit t_1 die Winkelgeschwindigkeit des Körpers ω_1 war; die Winkelgeschwindigkeit ω_2 zur Zeit t_2 wollen wir jetzt ermitteln. Zu diesem Zweck stellen wir die Differentialgleichung der Rotation des Körpers für den Zeitraum vom Augenblick t_1 bis zum Augenblick t_2 auf. Wenn wir die Wirkung der endlichen Kräfte vernachlässigen und bemerken, daß in der Differentialgleichung der Rotation nur äußere momentane Kräfte vorhanden sind, bezeichnen wir die äußeren momentanen Kräfte, die am Körper angreifen, mit $\mathfrak{F}_1^E, F_2^E, \ldots, \mathfrak{F}_n^E$ und deren Momente in bezug auf die Rotationsachse z mit $M_{1z}^E, M_{2z}^E, \ldots, M_{nz}^E$. Bezeichnen wir noch das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Rotationsachse mit J, so gilt

$$J \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum M_{iz}^E.$$

Wir bemerken, daß als Folge der an dem Körper angreifenden momentanen Kräfte $\mathfrak{F}_1^E, \mathfrak{F}_2^E, \ldots, \mathfrak{F}_n^E$ entsprechende Reaktionen in den Punkten auftreten, an welchen die Rotationsachse befestigt ist; diese Reaktionen haben ebenfalls den Charakter von äußeren momentanen Kräften. Diese momentanen Reaktionen aber bilden keinen Bestandteil der aufgestellten Gleichung, da ihre Momente in bezug auf die Rotationsachse z gleich Null sind.

Wenn wir die aufgestellte Gleichung mit $\mathrm{d}t$ multiplizieren und in den Grenzen von t_1 bis t_2 integrieren, erhalten wir:

$$J(\omega_2 - \omega_1) = \sum \int_{t_1}^{t_2} M_{iz}^E \,\mathrm{d}t.$$

Wir bemerken nun, daß

$$M_{iz}^E = x_i Y_i^E - y_i X_i^E$$

ist, wobei X_i^E und Y_i^E die Komponenten der momentanen Kraft $\mathfrak{F}_i^E$ auf den Achsen x und y (die senkrecht zur z-Achse verlaufen), x_i und y_i aber die Koordinaten des Angriffspunktes der Kraft sind. Folglich ist

$$\int_{t_1}^{t_2} M_{iz}^E \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} x_i Y_i^E \,\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} y_i X_i^E \,\mathrm{d}t.$$

Wir wissen, daß die Verrückungen der Punkte des Körpers während der Wirkungszeit der momentanen Kräfte so klein sind, daß man sie vernachlässigen kann. Hieraus folgt, daß man die Koordinaten x_i und y_i während der Zeit $t_2 - t_1$ als konstante Größen betrachten kann. Wenn wir diese Konstanten vor das Integralzeichen setzen, finden wir:

$$\int_{t_1}^{t_2} M_{iz}^E \, \mathrm{d}t = x_i \int_{t_1}^{t_2} Y_i^E \, \mathrm{d}t - y_i \int_{t_1}^{t_2} X_i^E \, \mathrm{d}t.$$

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Integrale sind nichts anderes als die Komponenten des Impulses der momentanen Kraft $\mathfrak{F}_i^E$ auf den Achsen x und y. Bezeichnen wir diesen Impuls mit $\mathfrak{S}_i^E$ und seine Komponenten auf den Achsen x und y mit $\mathfrak{S}_{ix}^E$ und $\mathfrak{S}_{iy}^E$, so gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} M_{iz}^E \, \mathrm{d}t = x_i S_{iy}^E - y_i S_{ix}^E.$$

Nun ist es nicht schwer zu sehen, daß der auf der rechten Seite stehende Ausdruck das Moment des Impulses $\mathfrak{S}_i^E$ in bezug auf die z-Achse ist. Bezeichnen wir das Moment dieses Impulses mit $M_z(\mathfrak{S}_i^E)$, so erhalten wir

$$\int_{t_1}^{t_2} M_{iz}^E \, \mathrm{d}t = M_z(\mathfrak{S}_i^E).$$

Behalten wir dieses Resultat im Auge, so finden wir für die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit ω_2 die endgültige Gleichung

$$J(\omega_2 - \omega_1) = \sum M_z(\mathfrak{S}_i^E).$$

Wir wollen der Kürze halber den Impuls $\mathfrak{S}_i^E$ den „äußeren momentanen Impuls" nennen. Die gewonnene Gleichung besagt, *daß der Zuwachs der Winkelgeschwindigkeit des Körpers, multipliziert mit seinem Trägheitsmoment in bezug auf die Rotationsachse, gleich der Summe der Momente aller äußeren momentanen Impulse in bezug auf dieselbe Achse ist.*

Wenn die momentanen Kräfte auf einen sich parallel zu irgendeiner festen Ebene bewegenden starren Körper wirken, ist das Ergebnis ihrer Wirkung einerseits die Veränderung der Geschwindigkeit des Körperschwerpunktes, andererseits die Veränderung der Winkelgeschwindigkeit des Körpers. Die Veränderung der Geschwindigkeit des Körperschwerpunktes wird mit den im vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Gleichungen bestimmt. Wählen wir die Achsen x und y in der Ebene, in der sich der Körper bewegt, und bezeichnen die Geschwindigkeit des Schwerpunktes im Anfangs- und Endaugenblick der Wirkung der momentanen Kräfte mit $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$, so gilt:

$$M(v_{2x} - v_{1x}) = \sum S_{ix}^E,$$

$$M(v_{2y} - v_{1y}) = \sum S_{iy}^E,$$

wobei S_{ix}^E und S_{iy}^E die Komponenten des äußeren momentanen Impulses $\mathfrak{S}_i^E$ auf den Achsen x und y sind. Was die Veränderung der Winkelgeschwindigkeit des Kör-

pers anbetrifft, so erhalten wir, wenn wir die Differentialgleichung der Rotation des Körpers um seinen Schwerpunkt für den Zeitraum, während dessen auf den Körper momentane Kräfte wirken, betrachten und genauso verfahren, wie soeben dargelegt wurde, die Gleichung

$$J_c(\omega_2 - \omega_1) = \sum M_\zeta(\mathfrak{S}_i^E),$$

wobei ω_1 und ω_2 die Winkelgeschwindigkeit des Körpers im Anfangs- und Endaugenblick der Wirkung der momentanen Kräfte sind, J_c das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Achse ζ ist, die durch den Schwerpunkt geht und senkrecht zu der Ebene xy verläuft, und $\mathfrak{M}_\zeta(\mathfrak{S}_i^E)$ das Moment des äußeren momentanen Impulses $\mathfrak{S}_i^E$ in bezug auf dieselbe Achse ζ ist.

§ 117. Der gerade zentrale Stoß zweier Körper. Der unelastische Stoß. Der elastische Stoß

Die Theorie des Stoßes, die sich die Klärung aller Umstände während des Stoßes zweier Körper zur Aufgabe stellt, muß von der Untersuchung der Deformationen ausgehen, welche die Körper beim Stoß erleiden. Eine solche Theorie des Stoßes wurde von Hertz für den Fall gegeben, in dem die Erscheinung des Stoßes in den Grenzen der Elastizität verläuft. Die von diesem Gelehrten gewonnenen Beziehungen geben die Möglichkeit, die Zeit des Stoßes, den maximalen Wert des Druckes des stoßenden Körpers usw. zu berechnen. Man kann jedoch auch eine Reihe nützlicher Resultate erhalten, ohne auf die Deformationen der stoßenden Körper einzugehen, wenn man bei der Aufgabe vom Stoß die in diesem Kapitel dargelegten Erwägungen anwendet. Natürlich kann man nicht, wenn man diesen Weg einschlägt, den Verlauf des Stoßprozesses zweier Körper selbst klären; man kann bloß Hinweise erhalten, die sich auf das endgültige Resultat dieses Prozesses beziehen.

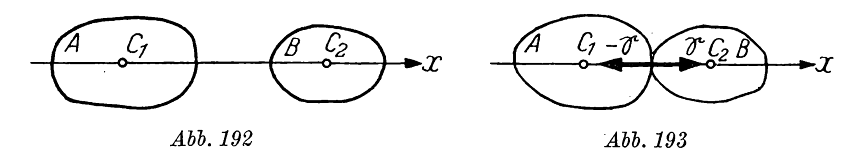


Abb. 192 *Abb. 193*

Wir stellen uns zwei starre Körper A und B vor, die sich fortschreitend und geradlinig bewegen (Abb. 192). Nehmen wir an, daß die Schwerpunkte C_1 und C_2 dieser Körper sich auf der gleichen Geraden bewegen, die wir als x-Achse annehmen. Wir setzen voraus, daß in einem bestimmten Augenblick ein Stoß dieser Körper stattfindet (Abb. 193), und zwar soll der Punkt, in dem sich die Körper A und B berühren, auf der x-Achse liegen, und ebenso soll die gemeinsame Normale zur Fläche dieser Körper im Berührungspunkt mit der x-Achse zusammenfallen. Der unter solchen Bedingungen erfolgende Stoß heißt *gerader zentraler Stoß* zweier Körper.

Wir bezeichnen den Anfangsaugenblick des Stoßes (d. h. den Augenblick der ersten Berührung der stoßenden Körper) mit t_1; den Endzeitpunkt des Stoßes bezeichnen

wir mit $t_2 = t_1 + \tau$, wobei τ die geringfügig kleine Dauer des Stoßes ist. Wir werden die Geschwindigkeiten der Körper A und B im Augenblick t_1 als bekannt ansehen.

Die Aufgabe, die wir uns gestellt haben, besteht in der Ermittlung der Geschwindigkeiten der zusammengestoßenen Körper im Augenblick t_2.

Wir bezeichnen die Geschwindigkeiten der Körper A und B im Augenblick t_1 mit v_1 und v_2; die Geschwindigkeiten dieser Körper im Augenblick t_2 bezeichnen wir mit u_1 und u_2. Wir vereinbaren, im weiteren alle diese Geschwindigkeiten als positiv zu rechnen, wenn sie in Richtung der positiven x-Achse verlaufen, und im entgegengesetzten Fall als negativ.

Während der Dauer des Stoßes τ wirken auf den Körper A und den Körper B gemeinsame Reaktionen, die auf der x-Achse verlaufen; die auf den Körper A wirkende Reaktion verläuft in Richtung der negativen x-Achse; die ihr der Größe nach gleiche, an dem Körper B angreifende Reaktion verläuft in entgegengesetzter Richtung. Diese Reaktionen sind momentane Kräfte. Wir bezeichnen die Größe der Impulse dieser Reaktionen während der Zeit τ mit S; diese Impulse verlaufen ebenso wie die entsprechenden Reaktionen.

Zur Ermittlung der Geschwindigkeiten u_1 und u_2 stellen wir die Gleichungen auf, durch welche die Veränderungen der Geschwindigkeiten der Schwerpunkte C_1 und C_2 unter der Wirkung der an den Körpern A und B angreifenden Impulse S bestimmt werden. Erinnern wir uns an die im § 115 aufgestellten Gleichungen und projizieren die Geschwindigkeiten und Impulse auf die x-Achse, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} M_1(u_1 - v_1) &= -S, \\ M_2(u_2 - v_2) &= S, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wobei M_1 und M_2 die Massen der Körper A und B sind.

Diese beiden Gleichungen genügen nicht zur Lösung der Aufgabe. In diesen Gleichungen sind die drei unbekannten Größen u_1, u_2 und S enthalten. Damit die Lösung der gestellten Aufgabe möglich wird, müssen wir noch eine Gleichung haben. Und das ist begreiflich: Das Resultat des Stoßes hängt wesentlich von den physikalischen Eigenschaften der zusammenstoßenden Körper ab. Wir müssen noch eine Gleichung haben, die diese Eigenschaften charakterisiert.

Wir setzen voraus, daß die Körper A und B keine Elastizität besitzen. Der Stoß derartiger vollständig plastischer Körper wird dadurch charakterisiert, daß die Geschwindigkeiten der zusammenstoßenden Körper nach Beendigung des Stoßes gleich sind; die Körper trennen sich nicht voneinander, sondern bewegen sich wie ein Ganzes fort. Der Fall eines solchen Stoßes heißt *unelastischer Stoß*. In diesem Fall ist

$$u_1 = u_2. \tag{2}$$

Dies ist die fehlende dritte Gleichung im Falle eines Stoßes von unelastischen Körpern. Durch die Gln. (1) und (2) ist die Aufgabe vollständig lösbar.

Der Kürze halber setzen wir $u_1 = u_2 = u$. Dann gilt

$$\left.\begin{aligned} M_1(u - v_1) &= -S, \\ M_2(u - v_2) &= S. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Wenn wir diese Gleichungen nach den Unbekannten u und S auflösen, erhalten wir:

$$u = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2}, \tag{4}$$

$$S = \frac{M_1 M_2 (v_1 - v_2)}{M_1 + M_2}. \tag{5}$$

Der Impuls S muß eine positive Größe sein. Aus der Gl. (5) folgt, daß $v_1 > v_2$ sein muß; nur unter dieser Bedingung findet der Stoß statt.

Nachdem wir die Geschwindigkeit u errechnet haben, die unelastische Körper nach Beendigung des Stoßes erlangen, können wir uns davon überzeugen, daß ein unelastischer Stoß immer von einem Verlust an kinetischer Energie der zusammenstoßenden Körper begleitet ist.

Wir bezeichnen die Summe der kinetischen Energien der Körper A und B im Augenblick t_1 mit T_1 und im Augenblick t_2 mit T_2. Wir werden zeigen, daß $T_2 < T_1$ ist.

Es gilt

$$T_1 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2, \qquad T_2 = \frac{1}{2} M_1 u^2 + \frac{1}{2} M_2 u^2 .$$

Hieraus folgt

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} M_1 (v_1^2 - u^2) + \frac{1}{2} M_2 (v_2^2 - u^2)$$

oder auf Grund der Gln. (3)

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} S (u + v_1) - \frac{1}{2} S (u + v_2) = \frac{1}{2} S (v_1 - v_2).$$

Setzen wir hier den Ausdruck für S aus der Gl. (5) ein, so finden wir

$$T_1 - T_2 = \frac{M_1 M_2 (v_1 - v_2)^2}{2 (M_1 + M_2)}, \tag{6}$$

d. h., es ist $T_1 - T_2 > 0$.

Wir sehen, daß der Ausdruck für den Verlust an kinetischer Energie $T_1 - T_2$ noch auf andere Art ermittelt werden kann. Auf Grund der Gl. (5) gilt

$$T_1 - T_2 = \frac{(M_1 + M_2) S^2}{2 M_1 M_2} = \left(\frac{S^2}{2 M_1} + \frac{S^2}{2 M_2}\right),$$

woraus wir, wenn wir die Gl. (3) beachten,

$$T_1 - T_2 = \left[\frac{1}{2} M_1 (v_1 - u)^2 + \frac{1}{2} M_2 (v_2 - u)^2\right]$$

erhalten.

Die Differenzen $v_1 - u$ und $v_2 - u$ kann man „verlorene“ Geschwindigkeiten der Körper A und B nennen. Das von uns gewonnene Resultat stellt einen Spezialfall des Theorems von CARNOT dar: *Der Verlust der kinetischen Energie eines Systems bei einem unelastischen Stoß ist gleich der kinetischen Energie eines Systems, das den verlorenen Geschwindigkeiten entspricht* (CARNOTscher Energieverlust).

Der Verlust an kinetischer Energie bei einem unelastischen Stoß findet seine Erklärung in dem Umstand, daß der Stoß unelastischer Körper stets von bleibenden Deformationen und einer Erwärmung der zusammenstoßenden Körper begleitet ist. Diese Erscheinungen erfordern den Aufwand einer gewissen Energie, und zwar ist es die kinetische Energie der zusammenstoßenden Körper, die als Energiequelle dient.

Wir wollen die Gl. (6) auf den Fall anwenden, in dem sich der eine Körper, z. B. der Körper B, vor dem Stoß in Ruhe befand. Nehmen wir $v_2 = 0$ an, so gilt:

$$T_1 - T_2 = \frac{M_1 M_2 v_1^2}{2(M_1 + M_2)}$$

oder, wenn wir beachten, daß im gegebenen Falle $T_1 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2$ ist,

$$T_1 - T_2 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} T_1 .$$

Somit bildet der Verlust an kinetischer Energie einen bestimmten Teil der kinetischen Energie des stoßenden Körpers; dieser Teil hängt nur vom Verhältnis der Massen M_1 und M_2 ab. Der Koeffizient $\frac{M_2}{M_1 + M_2}$ nähert sich 1, wenn die Masse M_2 im Vergleich zu der Masse M_1 groß ist; umgekehrt nähert er sich Null, wenn die Masse M_2 im Vergleich zu der Masse M_1 klein ist. Beim Schmieden ist es wünschenswert, daß der Verlust des Hammers an kinetischer Energie und folglich die auf das Schmieden verwandte Arbeit nach Möglichkeit groß ist. Daher ist ein schwerer Amboß notwendig, dessen Gewicht das Gewicht des Hammers um das Mehrfache übersteigt. Umgekehrt ist es beim Einschlagen eines Pfahles wünschenswert, daß der Aufwand an Energie für die Deformation der Pfahles und folglich auch der Verlust an kinetischer Energie beim Schlage nach Möglichkeit klein ist. Hier ist ein schwerer Rammbär zweckmäßig, dessen Masse möglichst groß im Vergleich zu der Masse des Pfahles ist.

Wir wollen nun zu dem Fall übergehen, bei dem die zusammenstoßenden Körper A und B elastisch sind. Der Stoß elastischer Körper oder der *elastische Stoß* wird dadurch charakterisiert, daß der Stoßprozeß nicht in dem Augenblick abgeschlossen ist, in dem die Geschwindigkeiten der zusammenstoßenden Körper gleich werden. Die während des Stoßes deformierten Körper sind bestrebt, ihre ursprüngliche Form wiederherzustellen; daher wirken die gemeinsamen Reaktionen zwischen ihnen auch nach jenem Augenblick, die Geschwindigkeiten der Körper verändern sich weiterhin, und schließlich trennen sich die Körper voneinander, wobei sie dann die verschiedenen Geschwindigkeiten u_1 und u_2 haben.

Wir wollen die ganze Zeit des Stoßes τ in zwei Stadien einteilen: das erste Stadium — vom Anfangsaugenblick des Stoßes t_1 bis zu jenem Augenblick (wir bezeichnen

ihn mit t_3), in dem die Geschwindigkeiten der Körper A und B gleich werden, das zweite Stadium — vom Augenblick t_3 bis zum Augenblick der Beendigung des Stoßes t_2. Um die endgültigen Geschwindigkeiten u_1 und u_2 zu ermitteln, wollen wir die Gleichungen, die die Größe der Geschwindigkeiten der Schwerpunkte C_1 und C_2 bestimmen, für das erste und das zweite Stadium des Stoßes getrennt aufstellen.

Bezeichnen wir die gemeinsame Geschwindigkeit der Körper A und B im Augenblick t_3 mit u, die Größen der Impulse der gemeinsamen Reaktionen für das erste und zweite Stadium entsprechend mit S_1 und S_2, so gilt

$$\left.\begin{aligned} M_1(u - v_1) &= -S_1, \\ M_2(u - v_2) &= S_1, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} M_1(u_1 - u) &= -S_2, \\ M_2(u_2 - u) &= S_2. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Gln. (7) unterscheiden sich in nichts von den Gln. (3), die sich auf einen unelastischen Stoß beziehen. Lösen wir die Gln. (7) nach den Größen u und S_1 auf, so erhalten wir:

$$u = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2}, \qquad S_1 = \frac{M_1 M_2 (v_1 - v_2)}{M_1 + M_2}.$$

Zum Bestande der Gl. (8) gehören drei unbekannte Größen u_1, u_2 und S_2. Zur Lösung der Aufgabe ist noch eine Gleichung notwendig, welche die elastischen Eigenschaften der gegebenen Körper charakterisiert.

Wir führen die Bezeichnungen

$$\frac{S_2}{S_1} = k$$

ein.

Die Erfahrung zeigt, daß man unter gewöhnlichen Bedingungen diese Größe k als nur vom Stoff der zusammenstoßenden Körper abhängig rechnen kann; durch diese Größe werden die elastischen Eigenschaften dieser Körper charakterisiert. Die Größe k hält sich in den Grenzen $0 < k < 1$. Für Körper, die überhaupt keine Elastizität besitzen, ist $k = 0$. Für völlig elastische Körper ist $k = 1$, wenn die Erscheinung des Stoßes in den Elastizitätsgrenzen verläuft. Die Größe k heißt *Stoßzahl.* Wir werden im weiteren sehen, wie dieser Koeffizient experimentell ermittelt werden kann.

Die Beziehung

$$S_2 = k S_1,$$

in der wir die Stoßzahl k als bekannt annehmen, ist jene zusätzliche Gleichung, welche die Lösung unserer Aufgabe möglich macht.

Wir wollen also anstatt S_2 diesen Ausdruck in die Gleichungen (8) einsetzen; dann erhalten wir:

$$M_1(u_1 - u) = -kS_1, \qquad M_2(u_2 - u) = kS_1. \tag{9}$$

Da wir die Größen u und S_1 bereits ermittelt haben, ist es leicht, hieraus u_1 und u_2 zu bestimmen. Ohne alle Berechnungen durchzuführen, wollen wir uns auf das Auf-

stellen der folgenden Beziehungen beschränken. Wir dividieren gliedweise die erste Gl. (9) durch die erste Gl. (7) und auch die zweite Gl. (9) durch die zweite Gl. (7); wir erhalten:

$$\frac{u_1 - u}{u - v_1} = k, \qquad \frac{u_2 - u}{u - v_2} = k.$$

Daraus folgt:

$$u_1 = u + k(u - v_1); \qquad u_2 = u + k(u - v_2). \tag{10}$$

Das erste Stadium des Stoßes ist von einem Verlust an kinetischer Energie der zusammenstoßenden Körper begleitet; dieser Verlust kann nach der Gl. (6) berechnet werden, die sich auf einen unelastischen Stoß bezieht. Bezeichnen wir die Summe der kinetischen Energien der Körper A und B in den Augenblicken t_1 und t_3 entsprechend mit T_1 und T_3, so gilt:

$$T_1 - T_3 = \frac{M_1 M_2 (v_1 - v_2)^2}{2(M_1 + M_2)}.$$

Wir wollen nun zeigen, daß während des zweiten Stadiums des Stoßes eine teilweise Wiederherstellung der kinetischen Energie der zusammenstoßenden Körper vor sich geht.

Bezeichnen wir die Summe der kinetischen Energien der Körper A und B im Augenblick t_2 der Beendigung des Stoßes mit T_2, so erhalten wir

$$T_2 - T_3 = \frac{1}{2} M_1 u_1^2 + \frac{1}{2} M_2 u_2^2 - \frac{1}{2} M_1 u^2 - \frac{1}{2} M_2 u^2$$

$$= \frac{1}{2} M_1 (u_1 - u)(u_1 + u) + \frac{1}{2} M_2 (u_2 - u)(u_2 + u),$$

oder auf Grund der Gl. (9)

$$T_2 - T_3 = -\frac{1}{2} k S_1 (u_1 + u) + \frac{1}{2} k S_1 (u_2 + u) = \frac{1}{2} k S_1 (u_2 - u_1).$$

Nach den Gln. (10) gilt $u_2 - u_1 = k(v_1 - v_2)$ und folglich

$$T_2 - T_3 = \frac{1}{2} k^2 S_1 (v_1 - v_2).$$

Substituieren wir hier den weiter oben ermittelten Wert für S_1, so erhalten wir:

$$T_2 - T_3 = k^2 \frac{M_1 M_2 (v_1 - v_2)^2}{2(M_1 + M_2)},$$

d. h. $T_2 - T_3 \geqq 0$.

Subtrahieren wir die Ausdrücke für die Größen $T_1 - T_3$ und $T_2 - T_3$, so schließen wir, daß der elastische Stoß von einem Verlust an kinetischer Energie begleitet ist, der durch die Gleichung

$$T_1 - T_2 = (1 - k^2) \frac{M_1 M_2 (v_1 - v_2)^2}{2(M_1 + M_2)} \tag{11}$$

bestimmt wird.

Bei $k = 1$ verschwindet dieser Verlust an kinetischer Energie.

Wir wollen nun sehen, auf welche Art die Stoßzahl k experimentell bestimmt werden kann.

Wir nehmen an, daß die aus dem Prüfmaterial hergestellte Kugel A aus der Höhe h_1 (ohne Anfangsgeschwindigkeit) auf die massive Platte B fällt, die aus demselben Material angefertigt ist (Abb. 194).

Beim Stoß auf die Platte hat die Kugel A die Geschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{2 g h_1},$$

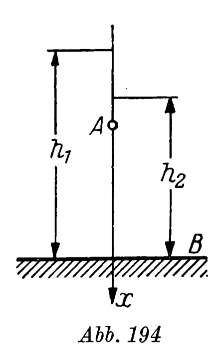


Abb. 194

die vertikal nach unten verläuft. Wir wollen die Geschwindigkeit ermitteln, welche die Kugel nach dem Stoß erhält.

Wir richten die x-Achse vertikal nach unten und wenden die Gln. (10) an. Es ist $v_2 = 0$; nehmen wir die Masse der Platte als sehr groß im Vergleich zu der Masse der Kugel an, so können wir rechnen, daß die Platte während der ganzen Zeit des Stoßes unbeweglich bleibt; in einem solchen Falle ist $u = 0$ und $u_2 = 0$. Die zweite Gl. (10) verwandelt sich in eine Identität, die erste Gleichung aber ergibt

$$u_1 = -k v_1. \tag{12}$$

Nachdem die Kugel eine solche negative (d. h. nach oben verlaufende) Geschwindigkeit erhalten hat, trennt sie sich von der Platte und springt bis in die Höhe h_2, die durch die Gleichung

$$-u_1 = \sqrt{2 g h_2}$$

bestimmt wird.

Setzen wir die Ausdrücke der Geschwindigkeiten u_1 und v_1 in die Gleichung (12) ein, so erhalten wir

$$\sqrt{2 g h_2} = k \sqrt{2 g h_1},$$

woraus

$$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

folgt.

Somit können wir die Stoßzahl k bestimmen, wenn wir die Höhe h_1 kennen, aus der die Kugel fällt, und die Höhe h_2 beobachten, auf welche die Kugel von der Platte aus zurückspringt.

§ 118. Der Schlag eines Hammers auf einen Amboß

Als Beispiel für die Anwendung der im vorhergehenden Paragraphen gewonnenen Resultate wollen wir den Schlag eines Hammers auf einen Amboß betrachten.

Ein Hammer vom Gewicht $P_1 = 2$ t fällt aus der Höhe $h_1 = 80$ cm unter der Wirkung seines Gewichtes auf ein zu bearbeitendes glühendes Metallstück, das auf

dem Amboß liegt. Das Gewicht des Ambosses zusammen mit dem darauf liegenden Metallstück ist gleich $P_2 = 30$ t. Wir wollen den Wirkungsgrad dieses Vorganges ermitteln.

Die kinetische Energie des Hammers T_1 im ersten Augenblick des Schlages ist gleich der Arbeit der Kraft P_1 bei der Verrückung um h_1, d. h.

$$T_1 = P_1 h_1.$$

Das zum Glühen gebrachte Metall kann man als völlig unelastisch betrachten. Wenden wir die Gleichungen für einen unelastischen Stoß an, so folgern wir, daß der Verlust des Hammers an kinetischer Energie beim Schlage gleich

$$T_1 - T_2 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} T_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} P_1 h_1$$

ist, wobei M_1 und M_2 die Masse des Hammers bzw. des Ambosses ist.

Dieser Verlust an kinetischer Energie wird zur Deformation des zu schmiedenden Metallstückes verbraucht. Das Verhältnis dieser Nutzarbeit zu der auf das Aufheben des Hammers aufgewendeten Arbeit kann Wirkungsgrad des Hammers genannt werden. Bezeichnen wir diesen Koeffizienten mit η, so erhalten wir

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} = \frac{P_2}{P_1 + P_2}.$$

Mit den gegebenen Werten P_1 und P_2 erhalten wir:

$$\eta = \frac{30}{32} = 0{,}94.$$

Wenn das zu bearbeitende Metall nicht völlig plastisch ist, verringert sich dieser Wirkungsgrad. Nehmen wir an, daß der Hammer nach dem Schlage um die Höhe $h_2 = 20$ cm vom Amboß abspringt.

Zur Bestimmung der Stoßzahl k benutzen wir die erste der Gln. (10) des vorhergehenden Paragraphen. Wir ermitteln die Geschwindigkeit u des Hammers am Ende des ersten Schlagstadiums:

$$u = \frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2} = \frac{P_1}{P_1 + P_2} v_1.$$

Setzen wir diesen Ausdruck für u in die erwähnte Gleichung ein, so erhalten wir:

$$u_1 = \frac{P_1}{P_1 + P_2} v_1 - k \frac{P_2}{P_1 + P_2} v_1,$$

woraus

$$k = \frac{P_1}{P_2} - \frac{P_1 + P_2}{P_2} \frac{u_1}{v_1}$$

folgt.

Wenn wir hier $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ und $u_1 = -\sqrt{2gh_2}$ annehmen, erhalten wir:

$$k = \frac{P_1}{P_2} + \frac{P_1 + P_2}{P_2}\sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \frac{2}{30} + \frac{32}{30}\sqrt{\frac{20}{80}} = 0{,}6\,.$$

Unter Beachtung der Gl. (11) erhalten wir für den Wirkungsgrad des Hammers den Ausdruck

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = (1 - k^2)\frac{M_2}{M_1 + M_2} = (1 - k^2)\frac{P_2}{P_1 + P_2}\,,$$

woraus sich

$$\eta = 0{,}64 \cdot \frac{30}{32} = 0{,}6$$

ergibt.

§ 119. Das Pendelschlagwerk. Das Stoßzentrum

Im § 77 wurde ein Pendelschlagwerk betrachtet, daß zur Ermittlung der Kerbschlagzähigkeit von Stoffen angewandt wird. Bei der Durchführung des Versuches wird das Pendel auf eine gewisse Höhe gehoben, wobei es aus der vertikalen Gleichgewichtslage um einen gewissen Winkel α abgelenkt wird (Abb. 195); darauf wird es fallen gelassen.

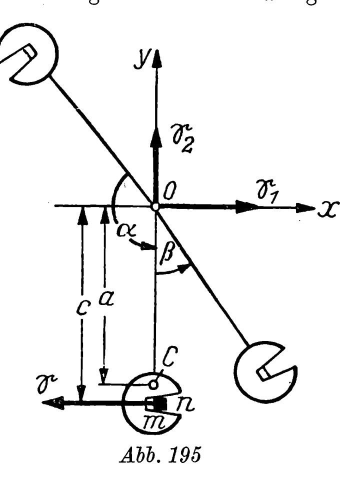


Abb. 195

Beim Schlag auf den zu prüfenden Versuchskörper n zerstört die Schneide m des Pendels denselben; dabei verliert das Pendel einen Teil seiner Winkelgeschwindigkeit. Nach dem Schlage setzt das Pendel seine Bewegung fort und weicht von der Vertikalen bei Bewegungsumkehr um einen gewissen Winkel β ab. Wir bezeichnen die Winkelgeschwindigkeit des Pendels im Anfangsaugenblick des Schlages an den zu prüfenden Versuchskörper mit ω_1; die Winkelgeschwindigkeit des Pendels im Augenblick der Beendigung des Schlages (d. h. im Augenblick der Zerstörung des Versuchskörpers) bezeichnen wir mit ω_2. Kennen wir die Winkel α und β und benutzen die Gesetzmäßigkeiten der kinetischen Energie, so können wir die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 berechnen (so wie im § 77 gezeigt).

Beim Schlag des Pendels auf den Versuchskörper wirkt auf das Pendel (im Berührungspunkt mit dem Versuchskörper) die Reaktion des Versuchskörpers, die ihrem Charakter nach eine momentane Kraft ist. Wir wollen den Impuls $\mathfrak{S}$ dieser momentanen Kraft während des Schlages ermitteln. Im § 116 wurde die Gleichung aufgestellt, durch welche die Veränderung der Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Körpers unter der Wirkung momentaner Kräfte bestimmt wird. Wenden wir diese Gleichung

an und bezeichnen das Trägheitsmoment des Pendels in bezug auf seine Rotationsachse mit J, den Abstand des Angriffspunktes des Impulses $\mathfrak{S}$ von der Rotationsachse mit c, so erhalten wir:

$$J(\omega_2 - \omega_1) = -Sc,$$

woraus

$$S = \frac{J(\omega_1 - \omega_2)}{c}$$

folgt.

Der am Pendel zur Zeit des Stoßes angreifende Impuls $\mathfrak{S}$ ruft momentane Drücke auf die Lager hervor, in denen die Rotationsachse des Pendels befestigt ist, und folglich treten die entsprechenden momentanen Reaktionen in diesen Lagern auf. Wenn die Lager in gleichen Abständen vom Punkte O angeordnet sind, können wir diese Reaktionen durch eine (ihrer Summe nach gleiche) im Punkte O angreifende Reaktion ersetzen. Wir wollen den Impuls dieser momentanen Reaktion während der Zeit des Schlages ermitteln.

Zu diesem Zweck bedienen wir uns der im § 115 aufgestellten Gleichungen, durch welche die Wirkung der momentanen Kräfte auf das Trägheitszentrum des Körpers bestimmt wird. Wir wählen, wie in Abb. 195 gezeigt ist, die Achsen x und y und zerlegen den gesuchten Impuls in eine horizontale und eine vertikale Komponente $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$; wir bezeichnen das Trägheitszentrum des Pendels mit C und setzen $OC = a$.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeiten des Trägheitszentrums C im Anfangsaugenblick des Schlages mit $\mathfrak{v}_1$ und im Augenblick seiner Beendigung mit $\mathfrak{v}_2$, so gilt:

$$M(v_{2x} - v_{1x}) = S_1 - S,$$

$$M(v_{2y} - v_{1y}) = S_2,$$

wobei M die Masse des Pendels ist.

Im gegebenen Fall sind aber $v_{1y} = 0$ und $v_{2y} = 0$, woraus folgt:

$$S_2 = 0.$$

Ferner gilt:

$$v_{1x} = a\,\omega_1, \qquad v_{2x} = a\,\omega_2.$$

Folglich ist

$$S_1 = Ma(\omega_2 - \omega_1) + S = \left(\frac{J}{c} - Ma\right)(\omega_1 - \omega_2).$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß $S_1 = 0$ ist, wenn

$$c = \frac{J}{Ma}$$

ist.

Also kann der momentane Druck auf die Achse, der durch den Impuls $\mathfrak{S}$ hervorgerufen wird, durch eine geeignete Wahl des Abstandes c (d. h. durch eine entsprechende

Lage der Schneide m) zum Verschwinden gebracht werden; natürlich muß das Pendel auf diese Art konstruiert werden. Der Punkt der Geraden OC, an dem der momentane Impuls $\mathfrak{S}$ angreifen muß, damit sich kein momentaner Druck auf die Pendelachse ergibt, heißt *Stoßzentrum.*

Wir wollen noch erwähnen, daß wir im § 112 die Gleichung für die reduzierte Pendellänge

$$l = \frac{J}{M a}$$

aufgestellt haben.

Hieraus folgt, daß der Abstand c des Stoßzentrums von der Pendelachse gleich der reduzierten Pendellänge ist. Mit anderen Worten, das Stoßzentrum fällt mit dem Schwingungszentrum des Pendels zusammen.

Dritter Teil

DIE LAGRANGESCHEN GLEICHUNGEN

KAPITEL XX

VERALLGEMEINERTE KOORDINATEN UND VERALLGEMEINERTE KRÄFTE

§ 120. Die Anzahl der Freiheitsgrade und die verallgemeinerten Koordinaten

Im § 55 hatten wir bereits Gelegenheit, die in der Überschrift dieses Paragraphen stehenden Begriffe zu erwähnen. Doch haben wir dort diese Begriffe nur kurz berührt. Nun aber werden sie im Mittelpunkt unserer Aufmerksamkeit stehen; wir werden sie allen weiteren Ausführungen zugrunde legen.

Wir erinnern daran, daß wir die Koordinaten als *verallgemeinerte Koordinaten* eines materiellen Systems bezeichnet haben, wenn durch ihre Vorgabe die Lage aller Systempunkte eindeutig bestimmt ist (so ist die Lage eines Punktes im Raum durch das Vorgeben seiner drei kartesischen Koordinaten bestimmt). *Anzahl der Freiheitsgrade* eines Systems heißt die Anzahl der unabhängigen verallgemeinerten, die Lage des Systems bestimmenden Koordinaten.

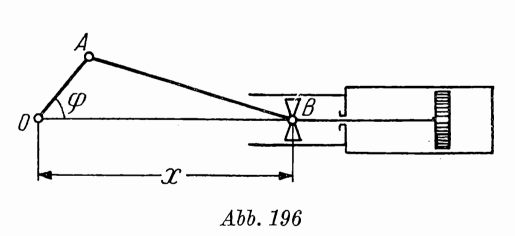


Abb. 196

Wir wollen das Gesagte an einigen Beispielen erläutern.

Wir haben das Beispiel eines Kurbelmechanismus bereits an der oben erwähnten Stelle betrachtet (Abb. 196). Die Lage aller Punkte dieses Systems wird eindeutig durch die Vorgabe des Drehwinkels φ der Kurbel bestimmt (wir setzen dabei natürlich voraus, daß alle Teile des Mechanismus absolut starr sind). Folglich ist der Winkel φ die verallgemeinerte Koordinate des Systems. Da die Lage aller Punkte des gegebenen Systems durch eine verallgemeinerte Koordinate bestimmt wird, stellt der Kurbelmechanismus das Beispiel eines Systems mit *einem Freiheitsgrad* dar.

Als verallgemeinerte Koordinaten des Kurbeltriebes hätten wir an Stelle des Winkels φ irgendeine andere Größe wählen können, welche die Lage aller Punkte des Mechanismus bestimmt, z. B. den Abstand x des Kreuzkopfes B von der Wellenachse O (Abb. 196). Man muß überhaupt bemerken, daß bei der Wahl der verallgemeinerten Koordinaten eines Systems stets eine große Willkür waltet.

Das Vorhandensein von *zwei* verallgemeinerten Koordinaten φ und x berührt nicht im geringsten unsere Schlußfolgerung, daß ein Kurbelmechanismus ein System mit *einem* Freiheitsgrade ist. Wir unterstreichen nochmals, daß die Anzahl der *unabhängigen* verallgemeinerten Koordinaten des Systems gleich der Anzahl der Freiheitsgrade ist. Die Koordinaten φ und x sind aber augenscheinlich nicht voneinander unabhängig; im Gegenteil, die Koordinate x wird durch die Koordinate φ bestimmt, d. h., x ist eine Funktion von φ:

$$x = x(\varphi).$$

Der Ausdruck der Größe x durch den Winkel φ läßt sich leicht aus der Betrachtung des Dreiecks AOB zusammensetzen; er hat folgende Form:[1]

$$x = r \cos \varphi + l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi},$$

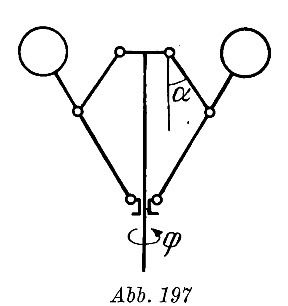


Abb. 197

wobei r die Länge der Kurbel OA, l die Länge der Kurbelstange AB und

$$\lambda = \frac{r}{l}$$

ist.

Danach hat unser Mechanismus nur eine unabhängige Koordinate und folglich nur einen Freiheitsgrad. Bestimmen wir die Lage des Mechanismus durch den Winkel φ, so benötigen wir nicht die zweite Koordinate x; von diesem Gesichtspunkt aus ist die Größe x eine überzählige Koordinate. Wir werden jedoch im folgenden sehen, welchen Vorteil in einigen Fällen die Einführung solcher *überzähliger Koordinaten* bietet.

Stellen wir uns nun einen Zentrifugal-Regulator vor, der um eine vertikale Achse rotiert (Abb. 197). Um die Lage aller Punkte dieses Systems zu bestimmen, muß man zwei Größen vorgeben: z. B. den Drehwinkel φ des Regulators und den Winkel α, der durch einen Stab mit der vertikalen Achse gebildet wird. Hier sind die Koordinaten φ und α voneinander unabhängig. Folglich hat der Zentrifugal-Regulator *zwei Freiheitsgrade.*

Wir wollen uns ein materielles System vorstellen, das aus n materiellen Punkten $M_1, M_2 \ldots, M_n$ besteht. Wir nehmen an, daß dieses System k Freiheitsgrade besitzt und bezeichnen seine unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten mit $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Wir wählen die rechtwinkligen Koordinatenachsen x, y, z und bezeichnen die kartesischen Koordinaten des Punktes M_i mit x_i, y_i, z_i. Wir wissen bereits, daß durch das Vorgeben der Größen $q_1, q_2, \ldots, q_k$ die Lagen aller Punkte des Systems und folglich auch die Werte der kartesischen Koordinaten dieser Punkte vollständig bestimmt sind. Mit anderen Worten: Die kartesischen Koordinaten x_i, y_i, z_i sind Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_k), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_k), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_k). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

[1]) Siehe Teil I „Theoretische Mechanik" (Kinematik), § 78, Beispiel 26.

Wir wollen jedoch bemerken, daß die eben aufgestellten Wechselbeziehungen (1) nur dann gelten, wenn die Zwangsbedingungen, denen das System unterworfen ist, *nicht von der Zeit abhängen.*

Daß Zwangsbedingungen allgemein möglich sind, die sich im Laufe der Zeit verändern, ist bereits im § 53 festgestellt worden. Wählen wir nun ein Beispiel einer solchen Zwangsbedingung. Stellen wir uns ein kleines Gewicht M vor, das an das Ende des Fadens MOA gehängt ist, der durch den festen Ring O hindurchgeht (Abb. 198). Die Last M werden wir als einen materiellen Punkt betrachten und den Faden MOA als undehnbar und gewichtslos ansehen. Wir setzen ferner voraus, daß wir am Fadenende A mit der konstanten Geschwindigkeit c ziehen. Wir haben hiermit ein mathematisches Pendel von wechselnder Länge; wir bezeichnen die Länge OM mit l und erhalten

$$l = l_0 - c\,t, \tag{2}$$

wobei l_0 die Länge des Pendels im Augenblick $t = 0$ ist.

In diesem Beispiel besteht die Zwangsbedingung (d. h. die Bedingung, welche die Bewegungsfreiheit der Masse M einschränkt) darin, daß diese Masse sich im Abstand l von dem festen Punkt O befinden muß, wobei dieser Abstand sich im Laufe der Zeit nach dem Gesetz (2) verändert. Wir haben es hier mit einem Beispiel einer Zwangsbedingung zu tun, die sich im Laufe der Zeit ändert.

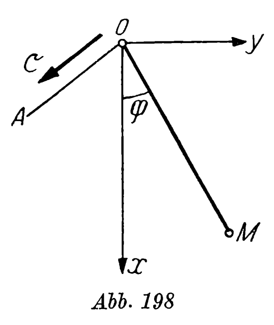


Abb. 198

In jedem Augenblick t wird die Lage des Punktes M durch das Vorgeben des Ausschlagwinkels φ des Fadens OM aus der Vertikalen eindeutig bestimmt. Unser Pendel von wechselnder Länge hat einen Freiheitsgrad, und der Winkel φ kann als seine verallgemeinerte Koordinate gewählt werden.

Wir wählen nun die rechtwinkligen Achsen x und y, wie das auf der Abb. 198 gezeigt ist, und bezeichnen die Koordinaten des Punktes M, bezogen auf diese Achsen, mit x und y. Es gilt:

$$x = l \cos \varphi\,,$$
$$y = l \sin \varphi$$

oder

$$x = (l_0 - c\,t) \cos \varphi\,,$$
$$y = (l_0 - c\,t) \sin \varphi\,.$$

Wie man sieht, sind im gegebenen Falle die kartesischen Koordinaten nicht nur Funktionen der verallgemeinerten Koordinate φ, sondern auch der Zeit t.

Überhaupt sind, wenn unter den Zwangsbedingungen, denen das materielle System unterworfen ist, *von der Zeit abhängige* Zwangsbedingungen vorhanden sind, die kartesischen Koordinaten aller Punkte des Systems Funktionen nicht nur der verallgemeinerten Koordinaten, sondern auch der Zeit. In dem Falle erhalten wir statt der Gln. (1):

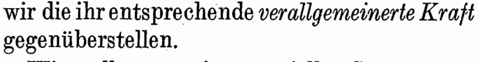
$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t),\\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t),\\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Nach BOLTZMANN vereinbaren wir, die Zwangsbedingungen, die nicht von der Zeit abhängen, *skleronome* Zwangsbedingungen zum Unterschied von den *rheonomen* Zwangsbedingungen zu nennen, d. h. von solchen, die sich im Laufe der Zeit verändern.

Wenn also alle Zwangsbedingungen des Systems skleronom sind, dann sind die kartesischen Koordinaten der Systempunkte mit den verallgemeinerten Koordinaten durch die Beziehungen (1) verbunden; wenn sich jedoch unter den Zwangsbedingungen des Systems rheonome befinden, treten die Gln. (3) an die Stelle der Gln. (1).

§ 121. Die verallgemeinerten Kräfte

Der Begriff der verallgemeinerten Koordinaten eines Systems wurde von LAGRANGE der von ihm geschaffenen *analytischen Mechanik* zugrunde gelegt[1]. Zugleich mit diesem Begriff spielt in der Mechanik von LAGRANGE auch der Begriff der verallgemeinerten Kräfte eine wesentliche Rolle. Jeder verallgemeinerten Koordinate wollen



wir die ihr entsprechende *verallgemeinerte Kraft* gegenüberstellen.

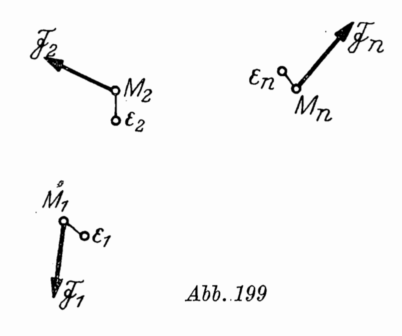


Abb. 199

Wir stellen uns ein materielles System vor, daß aus n materiellen Punkten $M_1, M_2, \ldots, M_n$ besteht (Abb. 199). Wir setzen voraus, daß dieses System k Freiheitsgrade besitzt und bezeichnen seine unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten mit $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Wir setzen weiterhin voraus, daß an den Punkten des Systems die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ angreifen. Wir werden jetzt zeigen, wie die der Koordinate q_1 entsprechende *verallgemeinerte Kraft* berechnet wird.

Um diese verallgemeinerte Kraft zu berechnen, verfahren wir folgendermaßen: Wir geben der Koordinate q_1 einen geringfügigen Zuwachs δq_1, wobei wir die übrigen Koordinaten unverändert lassen. Diese geringfügige Veränderung der Koordinate q_1 wird geringfügig kleine Verrückungen $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$ aller Systempunkte hervorrufen.

Wir sehen, daß die Gesamtheit der Verrückungen $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$ eine der virtuellen Verrückungen des Systems ist, da die Verrückungen $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$ von den im System vorhandenen Zwangsbedingungen zugelassen werden (die Zwangsbedingungen lassen jegliche Verrückungen zu, die den Veränderungen der Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ entsprechen.

Wir wollen die Summe der Arbeiten der Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auf den Verrückungen $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$ berechnen:

$$\sum F_i \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i)$$

[1] J. Lagrange, „Analytische Mechanik", Deutsche Ausgabe, 1897, Berlin.

und setzen diese Arbeit gleich dem Produkt aus einem Faktor Q_1, und dem Zuwachs der verallgemeinerten Koordinate δq_1, d. h., wir setzen

$$\sum F_i \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon_i}) = Q_1 \delta q_1 .$$

Die durch diese Gleichung bestimmte Größe Q_1 erhält den Namen *verallgemeinerte, der Koordinate q_1 entsprechende Kraft.*

Auf die gleiche Art ermitteln wir die verallgemeinerten Kräfte $Q_2, \ldots, Q_k$, die den übrigen Koordinaten $q_2, \ldots, q_k$ entsprechen. Wir wiederholen nochmals, daß zur Berechnung der verallgemeinerten Kraft Q_i, die einer beliebigen Koordinate q_i entspricht, diese Koordinate den geringfügigen Zuwachs δq_i erhalten muß (die übrigen Koordinaten bleiben unverändert). Es muß die Summe der Arbeiten aller angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auf den entsprechenden Verrückungen ihrer Angriffspunkte errechnet werden, und die Summe dieser Arbeiten, dividiert durch δq_i, ergibt die gesuchte verallgemeinerte Kraft.

Auf Grund des Dargelegten kann man sagen, daß jene Größe als verallgemeinerte Kraft, die der Koordinate q_1 entspricht, bezeichnet wird, deren Produkt mit dem Zuwachs δq_i gleich der Arbeit ist, die durch die am System angreifenden Kräfte bei der Verrückung des Systems, die diesem Zuwachs der Koordinate q_i entspricht, geleistet wird.

Die auf diese Art bestimmten verallgemeinerten Kräfte brauchen nicht die Dimension einer Kraft zu haben, d. h., sie brauchen nicht Kräfte im buchstäblichen Sinne dieses Wortes zu sein. Wenn das Produkt $Q_i \delta q_i$ die Dimension der Arbeit haben muß, ist es allerdings leicht zu folgern, daß Q_i die Dimension einer Kraft hat, wenn q_i eine Länge ist. Wenn aber die Koordinate q_i ein Winkel ist, dann hat Q_i die Dimension einer Kraft, multipliziert mit der Länge, d. h. die Dimension eines Momentes; wenn q_i ein Volumen ist, hat Q_i die Dimension einer Kraft, dividiert durch die Fläche, d. h. die Dimension einer Spannung usw.

Somit wird in dem Werk „Analytische Mechanik" von LAGRANGE jeder verallgemeinerten Koordinate die ihr entsprechende verallgemeinerte Kraft gegenübergestellt. Die Zahl der verallgemeinerten Kräfte ist gleich der Zahl der verallgemeinerten Koordinaten des Systems.

In den §§ 51 und 52 wurde darauf hingewiesen, daß alle auf ein materielles System wirkenden Kräfte stets in zwei Gruppen eingeteilt werden können, und zwar auf zweierlei Art: entweder in äußere und innere Kräfte oder in vorgegebene Kräfte und Zwangskräfte. Es versteht sich von selbst, daß übereinstimmend damit auch eine Gruppierung der verallgemeinerten Kräfte vorgenommen werden kann: Die verallgemeinerten Kräfte kann man gleichfalls unterteilen, einerseits in verallgemeinerte äußere und verallgemeinerte innere Kräfte, andererseits in verallgemeinerte vorgegebene Kräfte und verallgemeinerte Zwangskräfte.

Wir wollen nun eine sehr wichtige Anmerkung machen: Wenn die Zwangsbedingungen eines Systems ideell sind, dann sind die *verallgemeinerten Zwangskräfte gleich Null.*

Um die der Koordinate q_i entsprechende verallgemeinerte Reaktion zu ermitteln, müssen wir die Summe der Arbeiten der Zwangskräfte bei der Verrückung des

Systems berechnen, die dem Zuwachs δq_i dieser Koordinate entspricht. Wir haben weiter oben bemerkt, daß diese Verrückung bestimmt eine der virtuellen Verrückungen des Systems ist. Wir wissen aber, daß die Summe der Arbeiten der Zwangskräfte bei jeder virtuellen Verrückung gleich Null ist. Hieraus folgt, daß die uns interessierende verallgemeinerte Reaktion gleich Null sein wird. Durch diese Bemerkung wird es verständlich, daß man bei der Lösung irgendeines Problems durch die Methode der verallgemeinerten Koordinaten die auf das betrachtete System einwirkenden Kräfte in gegebene Kräfte und Zwangskräfte (und nicht in äußere und innere Kräfte) unterteilen muß. Wenn wir es mit ideellen Zwangsbedingungen zu tun haben — wir wissen aber, daß es immer eine Möglichkeit gibt, alle Zwangsbedingungen als ideell aufzufassen, indem man die Reibungskräfte zu den gegebenen Kräften zählt —, fallen die Zwangskräfte beim Übergang zu den verallgemeinerten Kräften automatisch aus unseren Berechnungen fort. Darin besteht der gewaltige Vorzug der Methode von LAGRANGE.

§ 122. Beispiele für die Berechnung verallgemeinerter Kräfte

Wir wollen die Ermittlung der verallgemeinerten Kräfte an einigen Beispielen erklären.

Beispiel 15. An den Enden des Hebels AB, der um die Achse O rotiert, greifen die vertikalen Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ an; es ist $OA = a$, $OB = b$. Der Ausschlagswinkel φ des Hebels von der Vertikalen wird als verallgemeinerte Koordinate angenommen. Es soll die diesem Winkel entsprechende verallgemeinerte Kraft gefunden werden (Abb. 200).

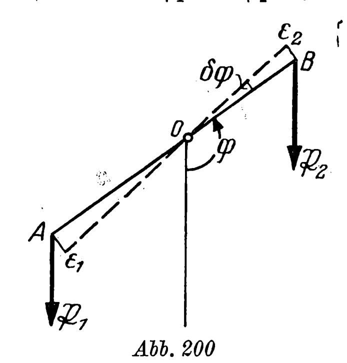


Abb. 200

Das gegebene System hat einen Freiheitsgrad, der Winkel φ kann als verallgemeinerte Koordinate des Systems angenommen werden.

Um die dem Winkel φ entsprechende verallgemeinerte Kraft (wir wollen sie Q nennen) zu ermitteln, geben wir dem Winkel φ den Zuwachs $\delta\varphi$. Der Hebel wird sich um den Winkel $\delta\varphi$ drehen, und die Angriffspunkte der Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ werden entsprechende geringfügig kleine Verrückungen erhalten, die gleich $\varepsilon_1 = a \cdot \delta\varphi$ und $\varepsilon_2 = b \cdot d\varphi$ sind und senkrecht zu der Geraden AB liegen. Wir wollen die Summe der Arbeiten der Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ bei den Verrückungen ε_1 und ε_2 ermitteln und setzen die Summe dem Produkt $Q\delta\varphi$ gleich. Wir erhalten dann:

$$P_1 \varepsilon_1 \sin\varphi - P_2 \varepsilon_2 \sin\varphi = Q \,.\, \delta\varphi$$

oder, wenn wir die Werte ε_1 und ε_2 einsetzen,

$$(P_1 a - P_2 b) \sin\varphi\, \delta\varphi = Q\, \delta\varphi\,,$$

woraus wir die gesuchte verallgemeinerte Kraft

$$Q = (P_1 a - P_2 b) \sin\varphi$$

finden.

Wie man sieht, ist Q nichts anderes als die Summe der Momente der Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ in bezug auf den Punkt O.

Beispiel 16. An den Zentren der Kugeln B_1 und B_2 eines Zentrifugal-Regulators (Abb. 201) greifen vertikale Kräfte an, die gleich $\mathfrak{P}$ (Gewichte der Kugeln) sind; $A_1 B_1 = A_2 B_2 = l$. Die entsprechenden verallgemeinerten Kräfte sind zu berechnen, indem er Winkel α (der durch die Stäbe A_1B_1 und A_2B_2 mit der Vertikalen gebildete Winkel) und φ (Drehwinkel des Regulators) als verallgemeinerte Koordinaten angenommen werden.

Wir bezeichnen die gesuchten, den Winkeln α und φ entsprechenden verallgemeinerten Kräfte mit Q_α und Q_φ und wollen Q_α ermitteln.

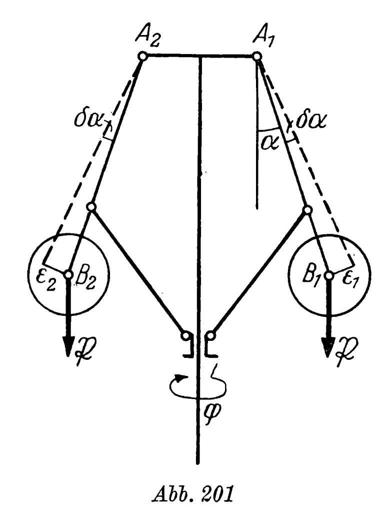


Abb. 201

Wir geben dem Winkel α den Zuwachs $\delta\alpha$, während wir den Winkel φ unverändert lassen; die Punkte B_1 und B_1 werden die Verrückungen ε_1 und ε_2 erhalten, die senkrecht zu den Geraden A_1B_1 bzw. A_2B_2 liegen, wobei $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = l\delta\alpha$ ist. Stellen wir die Summe der Arbeiten der Kräfte $\mathfrak{P}$ bei den Verrückungen ε_1 und ε_2 auf und setzen die Summe ihrem Produkt $Q_\alpha \delta\alpha$ gleich, so erhalten wir:

$$- P\,\varepsilon_1 \sin\alpha - P\,\varepsilon_2 \sin\alpha = Q_\alpha\,\delta\alpha$$

oder

$$- 2\,P\,l \sin\alpha\;\delta\alpha = Q_\alpha\,\delta\alpha\,,$$

woraus

$$Q_\alpha = -\,2\,P\,l \sin\alpha$$

folgt.

Wir gehen nun zu der Bestimmung der verallgemeinerten Kraft Q_φ über. Der Winkel φ erhält den Zuwachs $\delta\varphi$, wobei der Winkel α unverändert bleibt. Das bedeutet, daß wir den Regulator um die vertikale Spindelachse um den kleinen Winkel $\delta\varphi$ drehen und die Stellung der Stäbe unverändert lassen. Dabei leisten die Kräfte $\mathfrak{P}$ keinerlei Arbeit (die Verrückungen ihrer Angriffspunkte verlaufen senkrecht zu der Richtung der Kräfte $\mathfrak{P}$). Folglich gilt

$$Q_\varphi\,\delta\,\varphi = 0\,,$$

woraus

$$Q_\varphi = 0$$

folgt.

Beispiel 17. Der gerade Stab OA von der Länge l_1 ist gelenkig am festen Punkt O aufgehängt; im Punkte A ist an ihn ein zweiter Stab AB von der Länge l_2 gelenkig angeschlossen (Abb. 202). An den Punkten A und B greifen die vertikalen Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ an. Die entsprechenden verallgemeinerten Kräfte sollen ermittelt werden, wobei die Ausschlagswinkel φ_1 und φ_2 der Stäbe OA und AB als verallgemeinerte Koordinaten des Systems gewählt werden sollen.

Wir bezeichnen die den Winkeln φ_1 und φ_2 entsprechenden verallgemeinerten Kräfte mit Q_1 und Q_2 und beginnen mit der Berechnung der Größe Q_1.

Wir geben dem Winkel φ_1 den Zuwachs $\delta\varphi_1$, während wir den Winkel φ_2 unverändert lassen. Der Stab OA dreht sich um den Punkt O um den Winkel $\delta\varphi_1$; der Punkt A erhält eine Verrückung $\varepsilon_1 = l_1\,\delta\varphi_1$, die senkrecht zur Geraden OA verläuft. Da

wir den Winkel φ_2 unverändert lassen, bewegt sich der Stab AB so, daß er parallel zu sich selbst bleibt, d. h. fortschreitend. Dabei erhält der Punkt B die Verrückung ε_2, die gleich und parallel der Verrückung ε_1 des Punktes A ist. Stellen wir die Summe der Arbeiten der Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ auf den Verrückungen ε_1 und ε_2 zusammen, so erhalten wir:

$$- P_1 \varepsilon_1 \sin \varphi_1 - P_2 \varepsilon_2 \sin \varphi_1 = Q_1 \delta \varphi_1$$

oder, wenn wir $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = l_1 \delta\varphi_1$ annehmen,

$$- (P_1 + P_2) l_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 = Q_1 \delta \varphi_1 ,$$

woraus

$$Q_1 = - (P_1 + P_2) l_1 \sin \varphi_1$$

folgt.

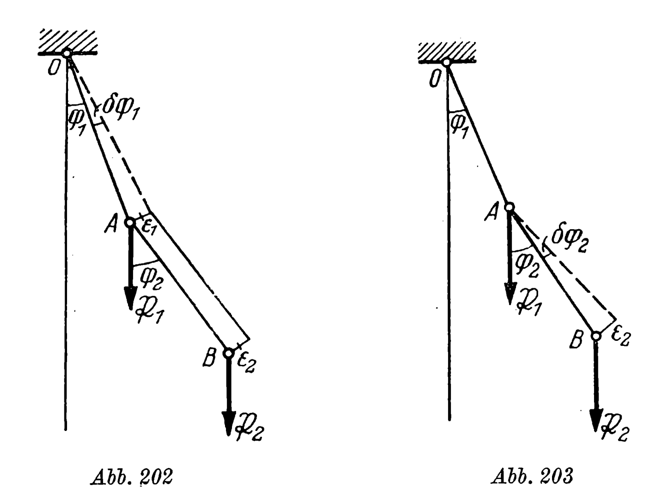


Abb. 202 *Abb. 203*

Wir wenden uns jetzt der Berechnung der zweiten verallgemeinerten Kraft Q_2 zu, die dem Winkel φ_2 entspricht. Jetzt geben wir dem Winkel φ_2 den Zuwachs $\delta\varphi_2$, während wir den Winkel φ_1 unverändert lassen (Abb. 203). Der Stab OA bleibt nun an seinem Platz, und der Stab AB dreht sich um den Punkt A um den Winkel $\delta\varphi_2$. Die Verrückung des Punktes A ist gleich Null, der Punkt B erhält eine Verrückung, die gleich $\varepsilon_2 = l_2 \delta\varphi_2$ ist und senkrecht zur Geraden AB verläuft. Folglich ist die Arbeit der Kraft $\mathfrak{P}_1$ gleich Null. Berechnen wir die Arbeit der Kraft $\mathfrak{P}_2$, so erhalten wir

$$- P_2 \varepsilon_2 \sin \varphi_2 = Q_2 \delta \varphi_2$$

oder

$$- P_2 l_2 \sin \varphi_2 \delta \varphi_2 = Q_2 \delta \varphi_2 ,$$

woraus

$$Q_2 = - P_2 l_2 \sin \varphi_2$$

folgt.

§ 123. Die Darstellung der verallgemeinerten Kräfte durch die Kraftkomponenten auf den Achsen der kartesischen Koordinaten. Kräfte, die ein Potential besitzen

Im weiteren wollen wir die verallgemeinerten Kräfte durch die Komponenten der gegebenen Kräfte auf den Achsen der kartesischen Koordinaten ausdrücken. Wir wollen uns jetzt mit der Aufstellung dieser Beziehungen beschäftigen.

Wir stellen uns ein materielles System vor, das aus n Massenpunkten $M_1, M_2, \ldots, M_n$ besteht. Wir nehmen an, daß dieses System k Freiheitsgrade besitzt und bezeichnen seine unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten mit $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Wir wählen die rechtwinkligen Koordinatenachsen x, y und z und bezeichnen die kartesischen Koordinaten des Punktes M_i mit x_i, y_i und z_i. Im § 120 haben wir gesehen, daß die kartesischen Koordinaten x_i, y_i und z_i mit den verallgemeinerten Koordinaten durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

verknüpft sind.

Um das Problem so allgemein wie möglich darzustellen, haben wir hier angenommen, daß sich unter den Zwangsbedingungen des Systems rheonome (zeitabhängige) Zwangsbedingungen befinden. Wir wissen aber, daß die Zeit t nicht in den Gln. (1) auftritt, wenn alle Zwangsbedingungen des Systems skleronom (zeitunabhängig) sind.

Wir wollen nun annehmen, daß an den Punkten eines Systems die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ angreifen und wollen die verallgemeinerten Kräfte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ berechnen, die den verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ entsprechen.

Wenn wir der Koordinate q_1 den Zuwachs δq_1 geben und die übrigen Koordinaten unverändert lassen (wir sehen, daß bei der Berechnung der verallgemeinerten Kräfte bei Vorhandensein von zeitabhängigen Zwangsbedingungen die Zeit t gleichfalls berücksichtigt werden muß), finden wir die entsprechenden Verrückungen $\vec{\varepsilon}_i$ der Punkte M_i.

Die verallgemeinerte Kraft Q_1 finden wir aus der Gleichung

$$Q_1 \delta q_1 = \sum F_i \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i). \tag{2}$$

Die elementare Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}_i$ können wir aber auch durch die bekannte Gleichung

$$F_i \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i) = X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i \tag{3}$$

ausdrücken, wobei X_i, Y_i, Z_i die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}_i$ auf den Achsen x, y, z und $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ die Zunahmen der Koordinaten x_i, y_i, z_i sind, wenn der Punkt M_i die Verrückung $\vec{\varepsilon}_i$ erhält.

Diese Zunahmen der Koordinaten x_i, y_i und z_i können leicht aus den Gln. (1) errechnet werden. Tatsächlich stellen sich nach den Gln. (1) die Koordinaten x_i, y_i und z_i als Funktionen der unabhängigen Variablen $q_1, q_2, \ldots, q_k, t$ dar; diese Funktionen

erhalten die Zunahmen δx_i, δy_i und δz_i dann, wenn die unabhängige Variable q_1 den Zuwachs δq_1 erhält, während die anderen unabhängigen Variablen unverändert bleiben. Wenden wir die bekannte Formel der Differentialrechnung an, so erhalten wir:

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1, \qquad \delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1, \qquad \delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1.$$

Wir setzen diese Werte der Zunahmen δx_i, δy_i und δz_i in die Gl. (3) ein. Den auf diese Art gewonnenen Ausdruck der elementaren Arbeit der Kraft $\mathfrak{F}_i$ setzen wir in die Gl. (2) ein und erhalten dann:

$$Q_1 \delta q_1 = \sum \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) \delta q_1.$$

Im rechten Teil dieser Gleichung erscheint die Größe δq_1 als gemeinsamer Faktor in allen Summanden der Summe. Setzen wir diesen Faktor vor das Summenzeichen, so finden wir

$$Q_1 \delta q_1 = \delta q_1 \sum \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right),$$

woraus sich nach Kürzung durch δq_1 die erste der nachfolgenden Gleichungen ergibt:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \sum \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right), \\ Q_2 &= \sum \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_2} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_k &= \sum \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die übrigen hier aufgeschriebenen Gleichungen werden ebenso erhalten wie die erste. Sie stellen die Ausdrücke der verallgemeinerten Kräfte durch die Komponenten der gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ auf den Achsen der kartesischen Koordinaten dar.

Die soeben aufgestellten Gln. (4) werden in einem wichtigen Spezialfall bedeutend vereinfacht, und zwar dann, wenn die gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ *ein Potential* besitzen. Wir wissen (siehe § 79), daß in diesem Fall die Beziehungen

$$X_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \qquad Y_i = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \qquad Z_i = -\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

gelten, wobei

$$V = V(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n) \tag{5}$$

die potentielle Energie des Systems ist, die den Kräften $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ entspricht.

Setzen wir die soeben geschriebenen Ausdrücke der Größen X_i, Y_i und Z_i in die erste der Gln. (4) ein, so erhalten wir

$$Q_1 = -\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right). \tag{6}$$

Andererseits erhalten wir, wenn wir in den Ausdruck (5) der potentiellen Energie die Koordinaten nach Gl. (1) einsetzen, den Ausdruck der potentiellen Energie V als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und der Zeit:

$$V = V(q_1, q_2, \ldots, q_k, t).$$

Wenn alle Zwangsbedingungen des Systems zeitunabhängig sind und die Zeit nicht in den Ausdrücken (1) enthalten ist, wird sie auch nicht in dem soeben erhaltenen Ausdruck der potentiellen Energie enthalten sein. In diesem Fall wird die potentielle Energie des Systems als eine Funktion der verallgemeinerten Koordinaten allein dargestellt:

$$V = V(q_1, q_2, \ldots, q_k).$$

Wir betrachten nun die partielle Ableitung der potentiellen Energie V nach der verallgemeinerten Koordinate q_1. Unter Beachtung, daß q_1 in V durch die kartesischen Koordinaten x_i, y_i und z_i enthalten ist, ergibt sich, wenn wir die Differentiation zusammengesetzter Funktionen anwenden:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \sum\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right).$$

Die Gegenüberstellung dieses Resultates mit der Gl. (6) führt zu der ersten der folgenden Beziehungen:

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}. \tag{7}$$

Die übrigen Gleichungen werden auf die gleiche Art erhalten.

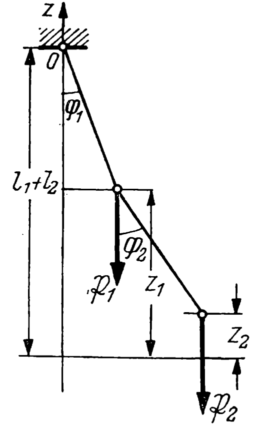


Abb. 204

Die theoretische Bedeutung dieser Gleichungen wird später besprochen. Wir wollen nur ihre praktische Bedeutung angeben: In den Fällen, in denen die potentielle Energie des Systems leicht zu berechnen ist, stellen die Gln. (7) das bequemste Mittel zur Berechnung der verallgemeinerten Kräfte dar.

Wir wollen die Anwendung dieser Beziehungen an einem einfachen Beispiel erklären.

Beispiel 18. Unter der Voraussetzung, daß die Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ im Beispiel 17 konstant sind, soll diese Aufgabe mit Hilfe der Gln. (7) gelöst werden.

Die Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ sind der Größe und Richtung nach konstant. Solche Kräfte (z. B. die Schwerkräfte) haben bekanntlich ein Potential. Wir wählen die durch den Punkt O gehende Vertikale als z-Achse (Abb. 204); der Koordinatenanfang liegt unterhalb des Punktes O im Abstand $l_1 + l_2$, die positive Richtung der z-Achse zeigt nach oben.

Die potentielle Energie des Systems kann durch

$$V = P_1 z_1 + P_2 z_2$$

ausgedrückt werden.

Andererseits gilt

$$z_1 = l_1 + l_2 - l_1 \cos \varphi_1 ,$$

$$z_2 = l_1 + l_2 - l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2 .$$

Setzen wir diese Beziehungen für z_1 und z_2 in die vorhergehende Formel für V ein, so erhalten wir den Ausdruck der potentiellen Energie des Systems abhängig von den verallgemeinerten Koordinaten:

$$V = (P_1 + P_2)(l_1 + l_2 - l_1 \cos \varphi_1) - P_2 l_2 \cos \varphi_2 .$$

Wenn wir nun die Gln. (7) anwenden, erhalten wir:

$$Q_1 = - \frac{\partial V}{\partial \varphi_1}, \qquad Q_2 = - \frac{\partial V}{\partial \varphi_2}.$$

Hieraus finden wir das Ergebnis

$$Q_1 = - (P_1 + P_2) l_1 \sin \varphi_1 , \qquad Q_2 = - P_2 l_2 \sin \varphi_2$$

in Übereinstimmung mit den im § 122 erhaltenen Resultaten.

KAPITEL XXI

DIE LAGRANGESCHEN GLEICHUNGEN DES GLEICHGEWICHTS UND DER BEWEGUNG

§ 124. Die Gleichgewichtsgleichungen in verallgemeinerten Koordinaten

Wie bereits gesagt, sind die im vorhergehenden Kapitel festgelegten Begriffe der verallgemeinerten Koordinaten und der verallgemeinerten Kräfte der von Lagrange geschaffenen analytischen Mechanik zugrunde gelegt worden. Auf diesen Begriffen hat Lagrange seine in ihrer Allgemeinheit bemerkenswerte Methode zur Lösung von mechanischen Problemen aufgebaut. Dieser Methode ist das vorliegende Kapitel gewidmet, in dem wir die von Lagrange angegebenen Gleichgewichts- und Bewegungsgleichungen betrachten werden. Wir beginnen mit den Gleichungen der Statik.

Wir stellen uns ein materielles System vor, das k Freiheitsgrade besitzt, und setzen voraus, daß die Lage aller Punkte des Systems durch k Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ bestimmt wird. Wir wollen ferner annehmen, daß sich das System unter der Wirkung der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ befindet. Die Bindungen des Systems werden wir als ideell ansehen. Wir wollen nun die Frage stellen: Welche Bedingungen müssen die gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ erfüllen, damit unser System im Gleichgewicht bleibt?

Wir wissen, daß die allgemeinste Antwort auf die Frage nach den Gleichgewichtsbedingungen eines beliebigen Systems durch den Grundsatz der virtuellen Verrückungen gegeben wird. Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen befindet sich ein System unter der Wirkung angreifender gegebener Kräfte im Gleichgewicht, wenn die Summe der Arbeiten dieser Kräfte bei jeder virtuellen Verrückung des Systems aus der Gleichgewichtslage gleich Null ist. Folglich wird unser System unter der Wirkung der angreifenden Kräfte in dem Falle im Gleichgewicht bleiben, wenn die Gleichung

$$\sum F_i \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon}_i) = 0$$

für alle virtuellen (d. h. durch die Bindungen zugelassenen) Verrückungen $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$ der Angriffspunkte der gegebenen Kräfte erfüllt ist.

Ersetzen wir in der letzten Gleichung den eingliedrigen Ausdruck der elementaren Arbeit durch den bekannten dreigliedrigen Ausdruck, so können wir die Gleichgewichtsbedingungen unseres Systems auch so formulieren, daß die Gleichung

$$\sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0 \tag{1}$$

für jede virtuelle Verrückung des Systems erfüllt ist. Hier sind X_i, Y_i, Z_i die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}_i$ auf den Achsen der kartesischen Koordinaten und δx_i, δy_i, δz_i die Zunahmen der kartesischen Koordinaten des Angriffspunktes der Kraft $\mathfrak{F}_i$ bei der virtuellen Verrückung des Systems.

Wir wissen aber bereits, daß die Koordinaten x_i, y_i und z_i der Angriffspunkte der Kräfte $\mathfrak{F}_i$ Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ und (bei Vorhandensein von rheonomen Bedingungen) der Zeit sind:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2 \ldots, q_k, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2 \ldots, q_k, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2 \ldots, q_k, t). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die allgemeinste virtuelle (d. h. durch die Bindungen zugelassene) Verrückung eines Systems erhalten wir, wenn wir den unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ beliebige geringfügig kleine Zuwüchse $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ geben. Wir finden die allgemeinsten Ausdrücke der Zunahmen δx_i, δy_i und δz_i, wenn wir die Gln. (2) differenzieren; wir bemerken, daß dabei die Zeit t, die im Ausdruck (2) enthalten ist, als *konstanter Parameter* betrachtet werden muß. Schon im § 53 wurde festgestellt, daß im Fall von rheonomen (d. h. sich im Laufe der Zeit verändernden) Bindungen unter der Bezeichnung „virtuelle Verrückung“ des Systems die geringfügig kleinen Verrückungen zu verstehen sind, die von den Bindungen für einen *bestimmten Zeitpunkt* zugelassen werden. Also gilt:

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k,$$

$$\delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k,$$

$$\delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k.$$

Wir setzen diese Ausdrücke in die Gl. (1) ein. Fassen wir die Glieder, die als Faktor die Größen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ enthalten, zusammen, so erhalten wir:

$$\delta q_1 \sum \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) + \delta q_2 \sum \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_2} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \right)$$
$$+ \ldots + \delta q_k \sum \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = 0 .$$

Wenn wir uns nun der Gln. (4) im § 123 erinnern, sehen wir, daß beim Übergang auf die verallgemeinerten Koordinaten die Arbeitsgleichung (1), die den Satz der virtuellen Verrückungen ausdrückt, folgende einfache Form erhält:

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots + Q_k \delta q_k = 0 , \tag{3}$$

wobei $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ die verallgemeinerten Kräfte sind, die den verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ entsprechen. Im Fall des Gleichgewichts des Systems muß diese Gleichung bei jeder möglichen Verrückung des Systems, d. h. bei *beliebigen Werten* von $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$, erfüllt sein.

Da wir die Möglichkeit haben, nach Belieben die Werte der Größen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ zu wählen, nehmen wir $\delta q_1 \neq 0$, $\delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_k = 0$ an. Bei einer solchen Wahl der Zunahmen der verallgemeinerten Koordinaten erhalten wir aus der Gl. (3)

$$Q_1 \delta q_1 = 0$$

und daraus

$$Q_1 = 0 .$$

Wir wollen nun die Größen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ anders wählen: Wir nehmen an, daß $\delta q_1 = 0$, $\delta q_2 \neq 0$, $\delta q_3 = \ldots = \delta q_k = 0$ ist, dann erhalten wir aus der Gl. (3):

$$Q_2 \delta q_2 = 0 ,$$

woraus

$$Q_2 = 0$$

folgt.

Indem wir so fortfahren, überzeugen wir uns, daß die Gl. (3) bei beliebigen Werten der Größen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ nur in dem Fall befriedigt werden kann, wenn die Gleichungen

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \ldots, \quad Q_k = 0 \tag{4}$$

gelten.

Folglich erscheinen diese Gleichungen als notwendige Gleichgewichtsbedingungen unseres Systems. Andererseits, wenn die Gln. (4) erfüllt werden, wird auch die Gl. (3) bei beliebigen Werten $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ befriedigt werden. Folglich sind die Gln. (4) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend zur Sicherstellung des Gleichgewichts des Systems.

Somit wird die Gleichgewichtslage eines Systems dadurch bestimmt, daß *in der Gleichgewichtslage alle verallgemeinerten Kräfte gleich Null sein müssen.*

Die Gleichgewichtsbedingungen (4) hat LAGRANGE angegeben[1]. Diese *Gleichgewichtsgleichungen in verallgemeinerten Koordinaten* sind die allgemeinste Form der Gleichungen der Statik. Alle aus der elementaren Statik eines starren Körpers bekannten Gleichgewichtsgleichungen können aus den Gln. (4) als Spezialfälle erhalten werden.

Wir wollen die Anwendung der Gln. (4) an einem einfachen Beispiel erläutern.

Beispiel 19. Die Gleichgewichtslagen des Hebels AOB, der um die Achse O drehbar ist und sich unter der Wirkung der an den Punkten A und B angreifenden vertikalen Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ befindet, sind zu ermitteln (Abb. 205).

Wir bezeichnen $AO = a$, $BO = b$. Der Hebel hat einen Freiheitsgrad; als verallgemeinerte Koordinate wählen wir den durch die Gerade OB mit der Vertikalen gebildeten Winkel φ. Die entsprechende verallgemeinerte Kraft Q ist bereits im § 122 (Beispiel 15) errechnet worden. Es war

$$Q = (P_1 a - P_2 b) \sin \varphi .$$

Wir erhalten die Gleichgewichtsbedingungen unseres Hebels, wenn wir Q gleich Null setzen:

$$(P_1 a - P_2 b) \sin \varphi = 0 .$$

Hieraus finden wir zwei Lösungen

$$1.\ \sin \varphi = 0 , \qquad 2.\ P_1 a - P_2 b = 0 .$$

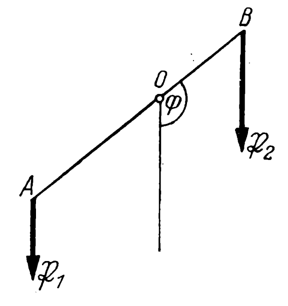


Abb. 205

Im ersten Fall muß $\varphi = 0$ oder $\varphi = 180°$ sein, was der vertikalen Lage des Hebels entspricht. Im zweiten Fall wird die Gleichgewichtsbedingung durch jeden Wert des Winkels φ befriedigt. Wenn die Kräfte P_1 und P_2 umgekehrt proportional den Hebelarmen sind, bleibt der Hebel in jeder Lage im Gleichgewicht.

§ 125. Das Gleichgewicht eines Systems unter der Einwirkung von Kräften, die ein Potential besitzen

Wir setzen nun voraus, daß die an den Punkten unseres Systems angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ ein Potential besitzen; der Einfachheit halber wollen wir auch voraussetzen, daß alle Bindungen des Systems zeitunabhängig sind.

Wir haben im § 123 gesehen, daß in einem solchen Fall die potentielle Energie des Systems als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten

$$V = V(q_1, q_2, \ldots, q_k)$$

dargestellt werden kann.

Wir wissen auch, daß die den Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ entsprechenden verallgemeinerten Kräfte durch die Gleichungen

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial q_1}, \qquad Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial q_2}, \qquad \ldots, \qquad Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

bestimmt werden.

[1] J. Lagrange, „Analytische Mechanik", Deutsche Ausgabe, 1897, Berlin.

Wir wollen nun die Gleichgewichtslagen unseres Systems ermitteln. Setzen wir die verallgemeinerten Kräfte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ gleich Null, so haben wir

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0.$$

Wie aus der Differentialrechnung bekannt ist, werden aus diesen Gleichungen die Werte der unabhängigen Variablen $q_1, q_2, \ldots, q_k$ bestimmt, bei denen die Funktion V einen Extremwert annimmt. Wir kommen zu dem folgenden Theorem: *Wenn sich ein System* (mit skleronomen Bindungen) *unter der Wirkung von Kräften befindet, die ein Potential haben, dann sind diejenigen Lagen die Gleichgewichtslagen, in denen die potentielle Energie des Systems Extremwerte ergibt.*

Befindet sich das System unter der Wirkung von Schwerkräften, so ist bekanntlich (siehe § 76) die potentielle Energie des Systems gleich dem Produkt aus seinem Gewicht und der Höhe des Schwerpunktes; die Höhe wird von einem beliebigen Niveau gezählt. Hieraus folgt, daß für ein *unter der Wirkung von Schwerkräften* befindliches System dann Gleichgewicht herrscht, wenn die *Höhe seines Schwerpunktes einen Extremwert erreicht* hat.

So befindet sich z. B. ein Pendel dann im Gleichgewicht, wenn sein Schwerpunkt auf der Vertikalen liegt, die durch den Aufhängepunkt geht. Solche Lagen gibt es zwei: In der einen befindet sich der Schwerpunkt des Pendels unterhalb des Aufhängepunktes, in der anderen oberhalb dieses Punktes. Im ersten Fall nimmt der Schwerpunkt des Pendels die tiefste, im zweiten die höchste Lage ein. Folglich hat die potentielle Energie des Pendels in der ersten Gleichgewichtslage ein Minimum, in der zweiten dagegen ein Maximum.

Gleichzeitig ist es klar, daß die Gleichgewichtslage des Pendels in der niedrigsten Lage seines Schwerpunktes stabil ist, in der höchsten Lage des Schwerpunktes aber ist das Gleichgewicht des Pendels labil. Das gibt Veranlassung zu der Voraussetzung, daß die Gleichgewichtslagen eines Systems, in denen seine potentielle Energie das Minimum erreicht, und jene, in denen die potentielle Energie ein Maximum ist, sich in bezug auf die Stabilität des Gleichgewichtes unterscheiden. Im folgenden Kapitel werden wir uns ausführlicher mit der Frage der Stabilität des Gleichgewichts befassen; dort werden wir eine Bestätigung der soeben geäußerten Vermutung erhalten.

§ 126. Die allgemeine Gleichung der Dynamik

Wir wenden uns nun den Fragen der Dynamik zu.

Wir setzen wieder voraus, daß das von uns betrachtete System k Freiheitsgrade besitzt und werden die Lage des Systems durch k verallgemeinerte Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ bestimmen. Bei der Bewegung des Systems bleiben die Koordinaten nicht konstant, sie verändern sich im Laufe der Zeit und sind folglich Zeitfunktionen:

$$q_1 = f_1(t), \qquad q_2 = f_2(t), \qquad \ldots, \qquad q_k = f_k(t). \tag{1}$$

Die Bewegung des Systems wird dann eindeutig bestimmt sein, wenn wir die verallgemeinerten Koordinaten des Systems als Zeitfunktionen kennen. Folglich kann

die Frage, wenn die an dem System angreifenden Kräfte gegeben sind und wenn die von dem System unter der Wirkung dieser Kräfte ausgeführte Bewegung gefunden werden soll, auf die Lösung folgender Aufgabe reduziert werden: *Gesucht ist die Ermittlung der verallgemeinerten Koordinaten des Systems als Zeitfunktionen, wenn die Kräfte gegeben sind.* Gerade so ist auch die Aufgabe der Dynamik in der analytischen Mechanik von LAGRANGE gestellt worden; zur Lösung dieser Aufgabe hat LAGRANGE Differentialgleichungen angegeben, die durch die Funktionen (1) befriedigt werden müssen und die wir die LAGRANGEschen Differentialgleichungen der Bewegung in verallgemeinerten Koordinaten nennen wollen. Der Aufstellung dieser bemerkenswerten Gleichungen widmen wir den vorliegenden und die folgenden Paragraphen. Dem Beispiel von LAGRANGE folgend, werden wir allen weiteren Schlußfolgerungen das Prinzip der virtuellen Verrückungen zugrunde legen. In diesem Paragraphen werden wir uns mit der Formulierung befassen, die LAGRANGE dem Prinzip der virtuellen Verrückungen bei der Bewegung eines Systems gegeben hat.

Wir haben bereits im § 71 über die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückung bei der Lösung von Aufgaben der Dynamik gesprochen. Wir wissen, daß jede Aufgabe der Dynamik durch Einführung von Trägheitskräften an den materiellen Punkten des Systems auf die entsprechende Aufgabe der Statik zurückgeführt werden kann; bekanntlich stehen diese Trägheitskräfte mit den angreifenden Kräften im Gleichgewicht.

Wenn wir bei der auf diese Art gewonnenen statischen Aufgabe das Prinzip der virtuellen Verrückungen anwenden, kommen wir zu der Schlußfolgerung, daß bei einer Bewegung eines Systems, das Zwangsbedingungen unterworfen ist, die Summe der Arbeiten der gegebenen Kräfte und der Trägheitskräfte bei jeder virtuellen Verrückung des Systems gleich Null sein muß.

Wir stellen uns ein System vor, daß aus den materiellen Punkten $M_1, M_2, \ldots, M_n$ besteht; alle Bindungen des Systems setzen wir als zweiseitig und ideell voraus. Wir bezeichnen die Massen der Punkte des Systems mit $m_1, m_2, \ldots, m_n$ und nehmen an, daß sich das System unter der Wirkung der angreifenden gegebenen Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ in Bewegung befindet. Führen wir die Trägheitskräfte der Punkte des Systems $\mathfrak{F}_{I1}, \mathfrak{F}_{I2}, \ldots, \mathfrak{F}_{In}$ ein, so erhalten wir die Arbeitsgleichung

$$\sum F_i\, \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon_i}) + \sum F_{I\,i}\, \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_{I\,i}, \vec{\varepsilon_i}) = 0\,, \tag{2}$$

die für jede virtuelle Verrückung des Systems $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$ gelten muß.

Wir wollen diese Gleichung umschreiben, wobei wir den dreigliedrigen Ausdruck der elementaren Arbeit einführen. Wir haben bereits gesehen, daß

$$F_i\, \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_i, \vec{\varepsilon_i}) = X_i\, \delta x_i + Y_i\, \delta y_i + Z_i\, \delta z_i$$

ist, wobei X_i, Y_i, Z_i die Komponenten der Kraft $\mathfrak{F}_i$ auf den Achsen der kartesischen Koordinaten x, y, z sind und $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ die Zunahmen, welche die Koordinaten des Punktes M_i bei einer virtuellen Verrückung des Systems erhalten.

Ganz ebenso ist

$$F_{I\,i}\, \varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_{I\,i}, \vec{\varepsilon_i}) = X_{I\,i}\, \delta x_i + Y_{I\,i}\, \delta y_i + Z_{I\,i}\, \delta z_i\,,$$

wobei $X_{I\,i}, Y_{I\,i}, Z_{I\,i}$ die Komponenten der Trägheitskraft $\mathfrak{F}_{I\,i}$ auf den Achsen x, y, z sind.

Die Trägheitskraft ist gleich dem Produkt aus der Masse und der Beschleunigung, sie verläuft entgegengesetzt der Beschleunigung.

Es gilt also

$$X_{Ii} = -m_i \ddot{x}_i; \qquad Y_{Ii} = -m_i \ddot{y}_i; \qquad Z_{Ii} = -m_i \ddot{z}_i.$$

Folglich ist

$$F_{Ii}\,\varepsilon_i \cos(\mathfrak{F}_{Ii}, \vec{\varepsilon_i}) = -(m_i \ddot{x}_i\,\delta x_i + m_i \ddot{y}_i\,\delta y_i + m_i \ddot{z}_i\,\delta z_i).$$

Setzen wir die Ausdrücke der elementaren Arbeiten der Kräfte $\mathfrak{F}_i$ und $\mathfrak{F}_{Ii}$ in die Arbeitsgleichung (2) ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\sum [(X_i - m_i \ddot{x}_i)\,\delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i)\,\delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i)\,\delta z_i] = 0, \tag{3}$$

die für jede virtuelle Verrückung des Systems gilt.

Die Gl. (3) wurde von LAGRANGE seiner analytischen Mechanik zugrunde gelegt; LAGRANGE hat dieser Gleichung den Namen der *allgemeinen Gleichung der Dynamik* gegeben[1].

§ 127. Die allgemeine Gleichung der Dynamik in verallgemeinerten Koordinaten

Im § 124 haben wir die Gleichgewichtsbedingungen in verallgemeinerten Koordinaten aus der Arbeitsgleichung (8) gewonnen, indem wir in dieser Gleichung eine Umbildung der kartesischen Koordinaten in verallgemeinerte Koordinaten vornahmen. Genauso erhalten wir die Differentialgleichungen der Bewegung in verallgemeinerten Koordinaten aus der allgemeinen Gleichung der Dynamik (3), wenn wir in dieser Gleichung denselben Übergang von den kartesischen Koordinaten in verallgemeinerte Koordinaten vornehmen. Im vorliegenden Paragraphen werden wir uns mit dieser Umbildung der allgemeinen Gleichung der Dynamik beschäftigen.

Im § 124 sahen wir, daß auf Grund der Abhängigkeiten

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

welche die kartesischen Koordinaten der Systempunkte mit ihren verallgemeinerten Koordinaten verbinden, die Arbeitsgleichung (8) im § 124 in die Gleichung

$$Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \cdots + Q_k\,\delta q_k = 0 \tag{2}$$

umgebildet wird, die bei beliebigen Werten der Größen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ erfüllt sein muß.

Die Gl. (3) im § 126 unterscheidet sich von der Gl. (8) im § 124 nur dadurch, daß in der ersten zu den gegebenen Kräften, unter deren Wirkung sich das System befindet, Trägheitskräfte der Systempunkte hinzugefügt sind. Hieraus folgt, daß auch die umgebildete Gleichung sich von der Gl. (2) nur durch die Hinzufügung von

[1] J. Lagrange, „Analytische Mechanik", Deutsche Ausgabe, 1897, Berlin.

ergänzenden, den Trägheitskräften entsprechenden Gliedern zu den verallgemeinerten Kräften $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ unterscheiden wird; diese zusätzlichen Glieder werden wir *verallgemeinerte Trägheitskräfte* des Systems nennen. Bezeichnen wir die verallgemeinerten Trägheitskräfte mit $S_1, S_2, \ldots, S_k$, so erhalten wir die umgebildete allgemeine Gleichung der Dynamik in folgender Form:

$$(Q_1 + S_1)\,\delta q_1 + (Q_2 + S_2)\,\delta q_2 + \cdots + (Q_k + S_k)\,\delta q_k = 0. \tag{3}$$

Nun sind noch die verallgemeinerten Trägheitskräfte $S_1, S_2, \ldots, S_k$ zu berechnen.

Wir wollen hier die von Lagrange gegebenen, hervorragenden Gleichungen aufstellen, welche die verallgemeinerten Trägheitskräfte des Systems mit seiner kinetischen Energie verbinden.

Wir berechnen zunächst die Größe S_1. Wenn wir uns die Gln. (4) im § 123 für die verallgemeinerten Kräfte ins Gedächtnis zurückrufen, haben wir:

$$S_1 = \sum \left(X_{Ii} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_{Ii} \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_{Ii} \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right),$$

wobei X_{Ii}, Y_{Ii}, Z_{Ii} die Komponenten der Trägheitskraft $\mathfrak{F}_I$ auf die Achsen x, y, z sind.

Andererseits ist:

$$X_{Ii} = -m_i \ddot{x}_i; \qquad Y_{Ii} = -m_i \ddot{y}_i; \qquad Z_{Ii} = -m_i \ddot{z}_i.$$

Folglich gilt:

$$S_1 = -\sum m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right). \tag{4}$$

Hier sind $\frac{\partial x_i}{\partial q_1}, \frac{\partial y_i}{\partial q_1}, \frac{\partial z_i}{\partial q_1}$ partielle Ableitungen der Größen x_i, y_i, z_i (ausgedrückt durch $q_1, q_2, \ldots, q_k, t$ gemäß Gln. (1)) nach q_1 und $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$ die totalen zweiten Ableitungen von x_i, y_i, z_i nach t, sofern diese Koordinaten bei einer Bewegung des Systems Zeitfunktionen sind. Bei der weiteren Aufstellung benötigen wir auch die Ableitungen erster Ordnung von x_i, y_i, z_i nach t; wir werden diese mit $\dot{x}_i, \dot{y}_i$ und $\dot{z}_i$ bezeichnen.

Nun sehen wir, daß

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \dot{x}_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \right)$$

ist, woraus

$$\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \right) - \dot{x}_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \right) \tag{5}$$

folgt.

Ferner sehen wir, daß bei einer Bewegung des Systems nicht nur die kartesischen Koordinaten x_i, y_i und z_i als Funktionen der Zeit erscheinen, sondern daß sich auch die verallgemeinerten Koordinaten mit der Zeit verändern. Wir haben:

$$q_1 = q_1(t), \qquad q_2 = q_2(t), \qquad \ldots, \qquad q_k = q_k(t).$$

Wir setzen diese Ausdrücke $q_1, q_2, \ldots, q_k$ in die rechten Seiten der Gln. (1) ein und differenzieren beide Seiten der Gleichungen nach der Zeit. Benutzen wir die Regel der Differentiation zusammengesetzter Funktionen, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \\ \dot{y}_i &= \frac{\partial y_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial y_i}{\partial t}, \\ \dot{z}_i &= \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial z_i}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wobei $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k$ die Ableitungen von $q_1, q_2, \ldots, q_k$ nach der Zeit sind.

Die kinematische Bedeutung der Ableitungen $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$ und $\dot{z}_i$ ist bekannt: Es sind die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes M_i auf den Achsen der kartesischen Koordinaten. Wegen der Analogie vereinbaren wir, die Ableitungen $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k$ *verallgemeinerte Geschwindigkeiten* des Systems zu nennen. Wenn wir im Auge behalten, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial q_1}, \frac{\partial x_i}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial z_i}{\partial t}$ Funktionen von q_1, $q_2, \ldots, q_k$, t sind, schließen wir auf Grund der Gln. (6), daß die Geschwindigkeitskomponenten eines beliebigen Systempunktes als lineare Funktionen der verallgemeinerten Geschwindigkeiten dargestellt werden können, wobei die Koeffizienten selbst in den Ausdrücken dieser linearen Funktionen als Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten und der Zeit erscheinen.

Wir wollen zugleich erwähnen, daß in dem speziellen, jedoch vom Gesichtspunkt der Anwendung wichtigsten Falle, in dem alle Bindungen des Systems zeitunabhängig sind, die Zeit t nicht in den rechten Teilen der Gln. (1) enthalten ist und daher

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial y_i}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial z_i}{\partial t} = 0$$

gilt.

Die Gln. (6) nehmen in diesem Fall die Form

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k, \\ \dot{y}_i &= \frac{\partial y_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\dot{q}_k, \\ \dot{z}_i &= \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

an, wobei die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial q_1}, \frac{\partial x_i}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial z_i}{\partial q_k}$ Funktionen von q_1, q_2, $\ldots, q_k$ sind (aber nicht explizite von t abhängen). Folglich werden im Fall von zeitunabhängigen Bindungen die Geschwindigkeitskomponenten eines beliebigen Systempunktes als *lineare und homogene Funktionen der verallgemeinerten Geschwindigkeiten* mit Koeffizienten, die nur von den verallgemeinerten Koordinaten abhängen, dargestellt.

Wir kehren zu den Gln. (6) zurück. Nach diesen Gleichungen werden die Größen $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$ und $\dot{z}_i$ als Funktionen von $q_1, q_2, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k, t$ dargestellt (wobei $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k$ auf den rechten Seiten der Gln. (6) explizite vorhanden sind, $q_1, q_2, \ldots, q_k, t$ dagegen in den partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial q_1}$ usw. enthalten sind). Wir nehmen die partiellen Ableitungen von $\dot{x}_i$ nach $\dot{q}_1$; durch unmittelbare Differentiation der ersten Gl. (6) erhalten wir die Identität

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}. \tag{8}$$

Diese Identität benutzen wir zur Umbildung der Gl. (5); wir benötigen auch noch die zweite Identität

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_1}, \tag{9}$$

die wir sogleich beweisen werden.

Betrachten wir die partielle Ableitung $\frac{\partial x_i}{\partial q_1}$ als Funktion von $q_1, q_2, \ldots, q_k$, und leiten diese Ableitung total nach der Zeit ab, so erhalten wir nach der Regel der Differentiation von zusammengesetzten Funktionen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1^2}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial t}.$$

Andererseits gilt, unter Verwendung der ersten Gl. (6),

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1^2}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial t}.$$

Der Vergleich der soeben gewonnenen beiden Ausdrücke überzeugt uns von der Richtigkeit der Identität (9).

Die Gln. (8) und (9) gestatten, die Gl. (5) auf folgende Art umzuschreiben:

$$\ddot{x}_1 \frac{\partial x_i}{\partial q_1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_1} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial q_1}.$$

Ebenso erhalten wir:

$$\ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \dot{y}_i^2}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{y}_i^2}{\partial q_1},$$

$$\ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \dot{z}_i^2}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{z}_i^2}{\partial q_1}.$$

Addieren wir gliedweise die gewonnenen drei Gleichungen und bemerken, daß

$$\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 = \dot{v}_i^2 \tag{10}$$

ist, wobei v_i die Geschwindigkeit des Punktes M_i ist, so erhalten wir

$$\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial q_1}. \tag{11}$$

Hier muß die Geschwindigkeit v_i als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten, der verallgemeinerten Geschwindigkeiten und der Zeit durch Substitution der Größen (6) in Gl. (10) dargestellt werden.

Wir wenden uns nun der Gl. (4) zu. Wenn wir (9) in (4) einsetzen und im Auge behalten, daß die Summe der Ableitungen gleich der Ableitung der Summe ist weshalb das Summierungszeichen und das Differentiationszeichen die Plätze vertauschen können, erhalten wir für die verallgemeinerte Trägheitskraft S_1, den Ausdruck

$$S_1 = -\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \Sigma m_i v_i^2}{\partial \dot{q}_1} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma m_i v_i^2}{\partial q_1}.$$

Wir bezeichnen nun die kinetische Energie unseres Systems mit T, d. h., wir nehmen

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

an.

Führen wir diese Bezeichnung ein, so erhalten wir endgültig:

$$S_1 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial T}{\partial q_1}.$$

Verfahren wir weiterhin entsprechend, so erhalten wir:

$$S_2 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} + \frac{\partial T}{\partial q_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_k = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

Wir tragen die gewonnenen Ausdrücke der resultierenden Trägheitskräfte in die Gl. (3) ein und erhalten dann die Gleichung

$$\left(Q_1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \left(Q_2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} + \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) \delta q_2 + \\ + \cdots + \left(Q_k - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0, \tag{12}$$

die für *beliebige* Werte der Größen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ erfüllt werden muß. Dies ist die allgemeine Gleichung der Dynamik, umgebildet in verallgemeinerte Koordinaten.

§ 128. Die LAGRANGEschen Differentialgleichungen der Bewegung in verallgemeinerten Koordinaten

Wir erwähnten bereits am Anfang des vorhergehenden Paragraphen, daß die Differentialgleichungen der Bewegung in verallgemeinerten Koordinaten aus der allgemeinen Gleichung der Dynamik ebenso aufgestellt werden können, wie im § 124 die Gleichgewichtsgleichungen in verallgemeinerten Koordinaten aus den Arbeitsgleichungen gewonnen wurden. Am Ende des § 127 erhielten wir die allgemeine Gleichung der Dynamik in verallgemeinerten Koordinaten, und aus Gl. (12) werden wir nun die Differentialgleichungen der Bewegung unseres Systems aufstellen.

Wir wollen nochmals unterstreichen, daß die Gl. (12) für *willkürliche* Werte der Größen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ erfüllt werden muß. Wenn wir das im Auge haben und genauso folgern wie im § 124 bei der Aufstellung der Gln. (4), überzeugen wir uns davon, daß die Erfüllung der Gl. (12) bei willkürlichen Werten von $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ dann und nur dann möglich ist, wenn alle Faktoren bei diesen Größen in der Gl. (12) einzeln gleich Null sind. Auf diese Art erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2,\\
\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= Q_k.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Dies sind die LAGRANGEschen Differentialgleichungen der Bewegung, die durch die verallgemeinerten Koordinaten als Zeitfunktionen befriedigt werden müssen.

Wenn die am System angreifenden Kräfte ein Potential haben, nehmen die Gleichungen von LAGRANGE folgende Form an:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= -\frac{\partial V}{\partial q_1},\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= -\frac{\partial V}{\partial q_2},\\
\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= -\frac{\partial V}{\partial q_k}.
\end{aligned}$$

Wir wollen uns die Struktur der Gln. (1) näher ansehen. Auf den rechten Seiten stehen verallgemeinerte Kräfte, die den Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ entsprechen. Die linken Seiten unserer Gleichungen ergeben sich aus der kinetischen Energie des

Systems durch einfache Differentiation; dabei muß die kinetische Energie T als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten, der verallgemeinerten Geschwindigkeiten und der Zeit dargestellt werden:

$$T = T(q_1, q_2, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k, t).$$

Dieser Ausdruck der kinetischen Energie kann durch Substitution der Ausdrücke (6) oder, im Fall von zeitunabhängigen Bindungen, der Ausdrücke (7) des § 127 in die Gleichung

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

gewonnen werden.

Wir bemerken hierzu, daß nach den Gln. (7) im § 127 die Ableitungen $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$ und $\dot{z}_i$ als lineare und homogene Funktionen der verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k$ mit von $q_1, q_2, \ldots, q_k$ abhängigen Koeffizienten dargestellt werden. In einem solchen Falle werden die Quadrate dieser Ableitungen und folglich auch die kinetische Energie des Systems als homogene Funktionen zweiten Grades der verallgemeinerten Geschwindigkeiten mit Koeffizienten, die gleichfalls von den verallgemeinerten Koordinaten abhängen, dargestellt. Also wird der allgemeine Ausdruck der kinetischen Energie eines Systems, das zeitunabhängigen Bindungen unterworfen ist, in verallgemeinerten Koordinaten folgende Form haben:

$$T = \frac{1}{2} (A_{11} \dot{q}_1^2 + A_{22} \dot{q}_2^2 + \cdots + A_{kk} \dot{q}_k^2 + 2 A_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2 A_{13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \cdots + 2 A_{k-1,k} \dot{q}_{k-1} \dot{q}_k),$$

wobei $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{k-1,k}$ Funktionen von $q_1, q_2, \ldots, q_k$ sind.

Diese Gl. (2) kann kurz in Form einer doppelten Summe geschrieben werden:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=k} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

wobei die Bedingung $A_{ij} = A_{ji}$ gilt.

Wenn es unter den Bindungen des Systems zeitabhängige Bindungen gibt, müssen die Gln. (7) im § 127 durch die Gln. (6) des gleichen Paragraphen ersetzt werden.

Da in diesem Falle die Ableitungen $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ als inhomogene lineare Funktionen der verallgemeinerten Geschwindigkeiten dargestellt werden, wird auch die kinetische Energie T die Form einer inhomogenen Funktion zweiten Grades derselben verallgemeinerten Geschwindigkeit haben. Das bedeutet, daß bei Vorhandensein von zeitabhängigen Bindungen auf der rechten Seite der Gl. (2) zusätzliche Glieder von der Form

$$B_1 \dot{q}_1 + B_2 \dot{q}_2 + \cdots + B_k \dot{q}_k + C$$

auftreten, wobei in diesem Falle alle Ausdrücke $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{k-1,k}, B_1, B_2, \ldots, B_k, C$ sowohl von den verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ als auch von der Zeit t abhängen.

Wenn wir im Auge haben, daß sich die kinetische Energie T als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten (im Fall von zeitabhängigen Bindungen aber auch noch von der Zeit) darstellt und bemerken, daß in den linken Teilen der Gln. (1) die partiellen Ableitungen der kinetischen Energie nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten auch noch einer Differentiation nach der Zeit unterliegen, müssen wir schließen, daß die linken Seiten der Gln. (1) nicht nur erste, sondern auch zweite Ableitungen der verallgemeinerten Koordinaten nach der Zeit enthalten. Somit liefern die Bewegungsgleichungen (1) von LAGRANGE ein System von k Differentialgleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung von k verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

Die Lösung einer Aufgabe der Dynamik in der Fassung von LAGRANGE wird auf die Integration eines Gleichungssystems zurückgeführt. Es versteht sich von selbst, daß wir im Ergebnis der Integration der Gl. (1) die verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ als Funktionen der Zeit mit $2k$ willkürlichen Konstanten erhalten. Diese Integrationskonstanten müssen aus den Anfangsbedingungen der Aufgabe bestimmt werden. Die Anfangsbedingungen sind im gegebenen Fall die ursprünglichen Werte der verallgemeinerten Koordinaten (welche die Anfangslage des Systems bestimmen) und die ursprünglichen Werte der verallgemeinerten Geschwindigkeiten (welche die Anfangsgeschwindigkeiten aller Systempunkte bestimmen). Wie man sieht, ist die Zahl der Anfangsbedingungen gleich der Zahl der einer Bestimmung unterliegenden willkürlichen Konstanten.

§ 129. Die Bestimmung von Trägheitsmomenten nach dem Verfahren der fallenden Last

Wir wollen die Anwendung der Bewegungsgleichungen von LAGRANGE an einigen Beispielen erläutern. Vorher wollen wir aber noch eine Bemerkung machen.

Wir wissen bereits, daß vor allem die kinetische Energie des Systems berechnet und als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten dargestellt werden muß, wenn wir eine Differentialgleichung der Bewegung nach der Methode von LAGRANGE aufstellen wollen. Im vorhergehenden Paragraphen wurde ein allgemeines Verfahren aufgezeigt, daß zu diesem Ziel führt. Es muß jedoch nicht immer dieser Weg beschritten werden, der sich in der Praxis zuweilen als zu umfangreich und umständlich erweisen kann. Wenn z. B. zu einem gegebenen System sich bewegende starre Körper gehören, muß ihre kinetische Energie unmittelbar nach den im § 72 gegebenen Gleichungen berechnet werden.

Wir wollen uns diese Gleichungen für die kinetische Energie eines starren Körpers ins Gedächtnis zurückrufen.

Wenn sich ein starrer Körper fortschreitend bewegt, wird seine kinetische Energie durch die Gleichung

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2$$

ausgedrückt, wobei M die Masse des Körpers und v_c die Geschwindigkeit seines Schwerpunktes ist (die in diesem Falle auch die Geschwindigkeit jedes anderen Punktes des Körpers ist).

Für einen um eine feste Achse rotierenden Körper ergibt sich

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2,$$

wobei J das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Rotationsachse ist und ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers.

Im Fall einer zusammengesetzten ebenen Bewegung des Körpers erhalten wir nach dem Theorem von KÖNIG

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2,$$

wobei M die Masse des Körpers und J_c sein Trägheitsmoment in bezug auf die Achse ist, die durch den Schwerpunkt hindurchgeht und senkrecht zur Bewegungsebene verläuft; v_c und ω sind die Geschwindigkeit des Schwerpunktes und die Winkelgeschwindigkeit des Körpers.

Wir beginnen mit den einfachsten Aufgaben. Dabei muß man sogleich unterstreichen, daß die Anwendungsmöglichkeiten und die allgemeine Gültigkeit der Methode von LAGRANGE erst dann im vollen Licht erscheint, wenn wir diese Methode bei komplizierteren Aufgaben anwenden, bei denen es sich um die Bewegung komplizierter Systeme handelt, die mehrere Freiheitsgrade besitzen. Bei der Anwendung an einfachen Aufgaben kann die Methode von LAGRANGE als unnötig umfangreich erscheinen. Um sich aber erstmalig mit der Anwendung der Gleichungen von LAGRANGE bekanntzumachen, ist es von Nutzen, mit den einfachsten Aufgaben zu beginnen; komplizierteren Fällen werden wir in der weiteren Darlegung begegnen.

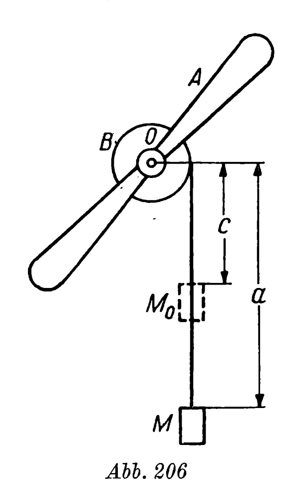


Abb. 206

Als erstes Beispiel wollen wir eines der Verfahren zur experimentellen Bestimmung der Trägheitsmomente betrachten.

Der Körper A, dessen Trägheitsmoment bestimmt werden soll, ist auf der durch den Schwerpunkt des Körpers A hindurchgehenden Achse O befestigt (Abb. 206). Auf die Achse O ist auch der Zylinder B aufgesetzt, auf den ein Faden aufgewickelt ist, an dessen freiem Ende die Last M hängt. Anfänglich befindet sich das ganze System in Ruhe, wobei die Last M in der Lage M_0 gehalten wird. Danach sinkt die Last, wenn wir ihr die Möglichkeit geben. Beim Niedersinken setzt die Last den Zylinder B und den Körper A in Rotation. Die Bewegung des Systems soll bestimmt werden.

Wir bezeichnen das Gewicht der Last M mit P, das gemeinsame Trägheitsmoment des Körpers A und des Zylinders B in bezug auf die Achse O mit J und den Radius des Zylinders B mit r. Die Masse des Fadens sowie die Reibung auf der Achse O und den Luftwiderstand werden wir vernachlässigen.

Das aus dem Körper A, dem Zylinder B und der Last M bestehende System hat einen Freiheitsgrad. Wir nehmen als verallgemeinerte Koordinate des Systems den Abstand x des an der Last M befestigten Fadenendes von der horizontalen Geraden, die durch den Punkt O gezogen ist. Die Aufgabe wird auf die Bestimmung der Größe x als Zeitfunktion reduziert.

Wir wollen die Methode von LAGRANGE anwenden und beginnen daher mit der Berechnung der kinetischen Energie T unseres Systems, wobei wir diese kinetische Energie als Funktion von x und seiner Ableitung $\dot{x}$ darstellen.

Die kinetische Energie T_1 der Last M ist gleich

$$T_1 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2,$$

wobei $m = \frac{P}{g}$ die Masse der Last M ist. Die kinetische Energie T_2 des Körpers A und des Zylinders B wird durch die Gleichung

$$T_2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

ausgedrückt, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers A und des Zylinders B ist. Folglich ist

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \omega^2.$$

Wenn wir nun bemerken, daß

$$\omega = -\frac{\dot{x}}{r}$$

ist, erhalten wir endgültig

$$T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\dot{x}^2.$$

Wir gehen zur Berechnung der verallgemeinerten Kraft O_x über, die der Koordinate x entspricht.

Wir geben der Koordinate x den Zuwachs δx und berechnen die Summe der Arbeiten der angreifenden Kräfte bei der entsprechenden Verrückung des Systems. Als angreifende Kräfte erscheinen das Gewicht des Körpers A, des Zylinders B und der Last M. Wenn die Koordinate x den Zuwachs δx erhält, senkt sich die Last M um die Größe δx, der Körper A und der Zylinder B aber drehen sich um den Winkel $\delta \varphi = \frac{\delta x}{r}$. Da die Schwerpunkte des Körpers A und des Zylinders B mit dem festen Punkt O zusammenfallen, führen die Gewichte des Körpers A und des Zylinders B bei dieser Verrückung des Systems keine Arbeit aus, die Arbeit des Gewichtes der Last M jedoch ist gleich $P\delta x$. Gleichen wir diese Arbeit dem Produkt $Q_x \delta x$ an, so gilt

$$P\,\delta x = Q_x\,\delta x,$$

woraus

$$Q_x = P$$

folgt.

Nach der Regel von LAGRANGE wird die Differentialgleichung der Bewegung unseres Systems folgende Form haben:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x .$$

Es ist:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \left(m + \frac{J}{r^2}\right)\dot{x}, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 .$$

Endgültig erhalten wir die Differentialgleichung der Bewegung

$$\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\ddot{x} = P .$$

Wenn wir integrieren, finden wir:

$$x = \frac{P}{2\left(m + \frac{J}{r^2}\right)} t^2 + C_1 t + C_2 ,$$

wobei C_1 und C_2 beliebige Konstanten sind. Wir bezeichnen die Länge des freien Fadenabschnittes in der Anfangslage des Systems mit c und bestimmen die Konstanten C_1 und C_2 aus den Anfangsbedingungen: Für $t = 0$ ist $x = c$, $\dot{x} = 0$.

Wir haben:

$$C_1 = 0 , \qquad C_2 = c .$$

Endgültig erhalten wir:

$$x = c + \frac{P}{2\left(m + \frac{J}{r^2}\right)} t^2 .$$

Die Last M durchlaufe beim Herabsinken die Strecke s in der Zeit τ. Führen wir in die vorhergehende Gleichung $x = c + s$, $t = \tau$ ein, so erhalten wir

$$s = \frac{P}{2\left(m + \frac{J}{r^2}\right)} \tau^2 .$$

Lösen wir diese Gleichung nach J auf, so erhalten wir:

$$J = \frac{P r^2}{g}\left(\frac{g \tau^2}{2 s} - 1\right).$$

Nach dieser Formel kann das Trägheitsmoment J nach den gegebenen P, r und s und nach dem durch Experiment gewonnenen τ ermittelt werden. Ziehen wir von der Größe J das Trägheitsmoment des Zylinders B (das wir als bekannt voraussetzen) ab, so finden wir das gesuchte Trägheitsmoment des Körpers A.

In der dargelegten Aufstellung haben wir die Masse des Fadens, an dem die Last M aufgehängt war, vernachlässigt. Wir wollen nun die gleiche Aufgabe unter Berücksichtigung des Einflusses dieser Masse lösen.

Wir bezeichnen die Länge des Fadens mit l. Im gegebenen Augenblick ist die Länge des freien Fadenabschnittes gleich x, die Länge des Abschnittes, der auf dem Zylinder aufgewickelt ist, beträgt $l - x$. Das Gewicht des Fadens bezeichnen wir mit P_1.

Wir beginnen wieder mit der Berechnung der kinetischen Energie des Systems. Zu der bereits früher errechneten kinetischen Energie des Körpers A, des Zylinders B und der Last M muß die kinetische Energie des Fadens hinzugefügt werden. Da alle Punkte des Fadens sich mit der gleichen Geschwindigkeit $\dot{x}$ bewegen, wird die kinetische Energie des Fadens aus der Beziehung

$$\frac{1}{2}\sum \mu_i v_i^2 = \frac{\dot{x}^2}{2}\sum \mu_i = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2$$

gefunden, wobei μ_i die Masse des Fadenelementes und $m_1 = \frac{P_1}{g}$ die Masse des ganzen Fadens ist.

Somit erhalten wir für die kinetische Energie des Systems den Ausdruck

$$T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{r^2} + m_1\right)\dot{x}^2.$$

Wir gehen nun zur Berechnung der verallgemeinerten Kraft über und geben wieder der Koordinate x den Zuwachs δx. Da man den Schwerpunkt jenes Fadenteiles, der auf dem Zylinder aufgewickelt ist, mit einem hinreichenden Grade von Genauigkeit als mit dem festen Punkt O zusammenfallend rechnen kann, führt das Gewicht dieses Fadenteiles bei Betrachtung der Verrückung des Systems keine Arbeit aus. Es bleibt das Gewicht des freien Fadenteiles übrig, das gleich $P_1 \frac{x}{l}$ ist und die Arbeit $P_1 \frac{x}{l} \delta x$ ausführt.

Hieraus folgt, daß wir bei der Berücksichtigung des Fadengewichts zu der früher errechneten verallgemeinerten Kraft die Größe $P_1 \frac{x}{l}$ hinzufügen müssen. Somit erhalten wir

$$Q_x = P + P_1 \frac{x}{l}.$$

Verfahren wir wie früher, so finden wir die Differentialgleichung der Bewegung

$$\left(m + \frac{J}{r^2} + m_1\right)\ddot{x} = P + P_1 \frac{x}{l}.$$

Wenn wir der Kürze halber die Bezeichnungen

$$\frac{P_1}{l\left(m + \frac{J}{r^z} + m_1\right)} = \alpha^2, \qquad \frac{P}{m + \frac{J}{r^z} + m_1} = \beta$$

einführen, haben wir

$$\ddot{x} = \alpha^2 x + \beta.$$

Integrieren wir, so ergibt sich

$$x = -\frac{\beta}{\alpha^2} + C_1 \operatorname{Cos} \alpha t + C_2 \operatorname{Sin} \alpha t,$$

wobei C_1 und C_2 beliebige Konstanten sind. Wir bestimmen diese Konstanten aus den Anfangsbedingungen bei $t = 0$:

$$x = c, \qquad \dot{x} = 0$$

und finden

$$C_1 = c + \frac{\beta}{\alpha^2}, \qquad C_2 = 0.$$

Folglich ist

$$x = -\frac{\beta}{\alpha^2} + \left(c + \frac{\beta}{\alpha^2}\right) \operatorname{Cos} \alpha t.$$

Wir wollen wieder annehmen, daß der Weg s von der sich senkenden Last in der Zeit τ durchlaufen wird. Substituieren wir in der gewonnenen Gleichung

$$x = c + s, \qquad t = \tau,$$

so erhalten wir:

$$s = \left(c + \frac{\beta}{\alpha^2}\right)(\operatorname{Cos} \alpha \tau - 1).$$

Wenn das Gewicht des Fadens klein im Vergleich zu dem Gewicht der übrigen Teile des Systems ist, dann ist auch die Größe α klein $\left(\text{im Vergleich zu } 1 \frac{1}{\text{s}}\right)$. Nehmen wir an, daß die Größe τ gleichfalls klein ist, so können wir annähernd setzen:

$$\operatorname{Cos} \alpha \tau = 1 + \frac{\alpha^2 \tau^2}{2}.$$

In diesem Falle erhalten wir die angenäherte Gleichung

$$s = \frac{1}{2}(c\alpha^2 + \beta)\tau^2.$$

Substituieren wir hier die Ausdrücke α^2 und β und lösen diese Gleichung nach J auf, so können wir die Gleichung für das Trägheitsmoment erhalten, die den Einfluß der Fadenmasse berücksichtigt. Nach einfachen Umrechnungen erhalten wir die angenäherte Gleichung

$$J = \frac{P r^2}{g}\left\{\frac{g \tau^2}{2 s} - 1 + \frac{P_1}{P}\left(\frac{g \tau^2}{2 s}\,\frac{c}{l} - 1\right)\right\},$$

nach welcher das Trägheitsmoment des Körpers ermittelt werden kann.

§ 130. Der Pallograph von Schlick

Pallograph heißt ein Apparat, der von O. Schlick zum Aufzeichnen der Schwingungen eines Schiffskörpers konstruiert wurde. Im Apparat von Schlick gibt es zwei Pendel, die zur Aufzeichnung der vertikalen und horizontalen Schwingungen dienen. Im Augenblick wird uns von diesen Pendeln nur dasjenige interessieren, das die horizontalen Schwingungen des Schiffes aufzeichnet.

Dieses Pendel bildet eine eigenartige Vereinigung eines gewöhnlichen Pendels mit einem astatischen Pendel, von dem im § 34 die Rede war. Die schwere Masse M (Abb. 207), die eine Zylinderform besitzt, ist an dem Ende des Stabes AB befestigt, der in einer um die Achse O schwenkbaren Führung gleiten kann. (In Wirklichkeit sind es zwei Stäbe, von denen je einer an einer Seite des Zylinders angebracht ist.) Im Punkte C ist der Stab AB gelenkig mit dem Schwenkhebel CO_1 verbunden, der sich um die feste Achse O_1 dreht. Wir führen die Bezeichnungen $OO_1 = a$, $CO_1 = b$, $AC = c$ ein; wir bezeichnen das Gewicht des Zylinders M mit P, seine Masse mit m, das Trägheitsmoment des Zylinders in bezug auf seine Achse A mit J. Wir wollen die Eigenschwingungen des Apparates untersuchen, wobei wir seine Schwingungen als klein annehmen. Dabei werden wir die Massen der Stäbe AB und CO_1 sowie die Reibung in den Lagerstellen des Apparates vernachlässigen. Wir werden sehen, daß die Konstruktion des Pendels gestattet, in weiten Grenzen seine Eigenfrequenz zu verändern.

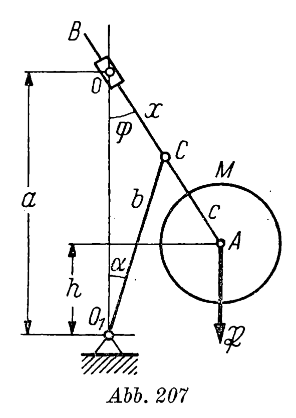


Abb. 207

Unser System hat einen Freiheitsgrad; wir wählen als verallgemeinerte Koordinate den Ausschlagswinkel des Stabes AB von der Vertikalen und bezeichnen diesen Winkel mit φ. Wir stellen die Differentialgleichung der Bewegung des Apparates auf, indem wir den Winkel φ und auch seine Ableitung $\dot{\varphi}$ als kleine Größe ansehen.

Die Schwingungen des Apparates gehen unter der Wirkung der Schwerkraft vor sich. Da die Schwerkraft ein Potential hat, werden wir, wenn wir die potentielle

Energie des Systems mit V und die dem Winkel φ entsprechende verallgemeinerte Kraft mit Q bezeichnen,

$$Q = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

setzen.

Folglich hat die Differentialgleichung der Bewegung des Apparates die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

Nun sind noch die kinetische Energie T und die potentielle Energie V unseres Systems zu berechnen.

Es ist wichtig, zugleich festzustellen, mit welchem Genauigkeitsgrade diese beiden Größen berechnet werden müssen. Wir werden den Winkel φ und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ als kleine Größen erster Ordnung annehmen und die Differentialgleichung der Bewegung unseres Apparates mit einer Genauigkeit bis zu den kleinen Größen erster Ordnung aufstellen. In einem solchen Fall müssen die Ableitungen $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$, $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$ und $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ auch mit einer Genauigkeit bis zu den kleinen Größen erster Ordnung berechnet werden. Da aber beim Differenzieren nach φ und nach $\dot{\varphi}$ die Ordnung um Eins sinkt, müssen die Größen T und V mit einer Genauigkeit bis zu den kleinen Größen zweiter Ordnung (einschließlich) berechnet werden.

Wir bemerken als allgemeine Regel, daß man bei der Aufstellung von Differentialgleichungen der Bewegung mit einer Genauigkeit bis zu den Größen erster Ordnung (oder, wie man sagt, der „linearisierten" Differentialgleichungen) *die kinetische Energie des Systems und seine potentielle Energie mit einer Genauigkeit bis zu den Größen zweite Ordnung berechnen muß.*

Wir gehen nun an die Berechnung der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie V und führen zwei Hilfsvariable ein, und zwar den Winkel α, der durch den Stab CO_1 mit der Vertikalen gebildet wird, und den veränderlichen Abstand $CO = x$. Die kinetische Energie der Masse M ist gleich

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2,$$

wobei v die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Masse M, d. h. die Geschwindigkeit des Punktes A und ω die Winkelgeschwindigkeit dieser Masse ist.

Wir sehen, daß man die Größen $AO = c + x$ und φ als polare Koordinaten des Punktes A (mit dem Pol im Punkte O) betrachten kann. Nach der bekannten Beziehung der Kinematik (siehe Teil I, § 98) gilt

$$v^2 = \dot{x}^2 + (c + x)^2 \dot{\varphi}^2.$$

Andererseits ist $\omega = \dot{\varphi}$. Folglich erhalten wir

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + (c + x)^2 \dot{\varphi}^2\right] + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2. \tag{1}$$

Hierin ist noch die Größe x durch φ auszudrücken. Aus dem Dreieck OCO_1 finden wir:

$$\left.\begin{aligned} x\cos\varphi + b\cos\alpha - a = 0\,, \\ x\sin\varphi - b\sin\alpha = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hieraus kann man die Größen x und α als Funktionen von φ erhalten. Wenn wir beachten, daß die Berechnung der kinetischen Energie T und auch der potentiellen Energie V von uns mit einer Genauigkeit bis zu kleinen Größen zweiter Ordnung durchgeführt wird, vereinfachen wir die Gln. (2), indem wir nur die Glieder, die nicht über die zweite Ordnung hinausgehen, beibehalten.

Aus der zweiten Gl. (2) ist ersichtlich, daß die Größe α von derselben Ordnung ist wie φ, d. h., sie ist eine kleine Größe erster Ordnung. Folglich können wir in der ersten Gl. (2)

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \qquad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

annehmen.

Substituieren wir diese Ausdrücke in die Gln. (2), so erhalten wir

$$x - \frac{1}{2}\,x\,\varphi^2 + b - \frac{1}{2}\,b\,\alpha^2 - a = 0$$

oder

$$x - \frac{1}{2}\,x\,\varphi^2 = a - b + \frac{1}{2}\,b\,\alpha^2.$$

Wir sehen, daß sich x von $(a - b)$ um eine Größe unterscheidet, die nicht niedriger als zweiter Ordnung ist. Wollen wir in dieser Gleichung nur Glieder der zweiten Ordnung behalten, so können wir im Gliede $\frac{1}{2}\,x\,\varphi^2$ den Ausdruck $x = a - b$ einführen. Also ist mit einer Genauigkeit bis zu den Größen zweiter Ordnung

$$x = a - b + \frac{1}{2}(a - b)\,\varphi^2 + \frac{1}{2}\,b\,\alpha^2. \tag{3}$$

Wenden wir uns nun der zweiten Gl. (2) zu und setzen in ihr

$$\sin\varphi = \varphi\,, \qquad \sin\alpha = \alpha\,,$$

so erhalten wir

$$x\,\varphi - b\,\alpha = 0\,.$$

Wollen wir hierin nur Glieder zweiter Ordnung behalten, so können wir $x = a - b$ setzen. Folglich gilt mit einer Genauigkeit bis zu den Größen zweiter Ordnung

$$(a - b)\,\varphi - b\,\alpha = 0;$$

daraus folgt

$$\alpha = \frac{a-b}{b}\,\varphi\,. \tag{4}$$

Setzen wir dies in die Gl. (3) ein, so erhalten wir:

$$x = a - b + \frac{1}{2}(a-b)\,\varphi^2 + \frac{1}{2}\,\frac{(a-b)^2}{b}\,\varphi^2$$

oder

$$x = a - b + \frac{1}{2}\,\frac{a\,(a-b)}{b}\,\varphi^2. \tag{5}$$

Durch die Gln. (4) und (5) werden die Größen α und x als Funktionen von φ mit einer Genauigkeit bis zu den kleinen Größen zweiter Ordnung (einschließlich) ausgedrückt.

Wir kehren nun zu der weiter oben gewonnenen Gl. (1) zurück. Nach der Gl. (5) ist

$$\dot{x} = \frac{a\,(a-b)}{b}\,\varphi\,\dot{\varphi}\,.$$

Wie ersichtlich, ist die Ableitung $\dot{x}$ eine Größe zweiter Ordnung. Folglich ist das Quadrat dieser Ableitung eine kleine Größe vierter Ordnung, und man kann also das Glied $\dot{x}^2$ im Ausdruck der kinetischen Energie (1) vernachlässigen. Ferner können wir, wenn wir in der Gl. (1) nur die Glieder zweiter Ordnung behalten wollen, im Gliede $(c + x)^2\dot{\varphi}^2$ den Ausdruck $x = a - b$ einsetzen. Endgültig erhalten wir mit einer Genauigkeit bis zu den Größen zweiter Ordnung

$$T = \frac{1}{2}\left[m\,(c + a - b)^2 + J\right]\dot{\varphi}^2. \tag{6}$$

Beim Übergang zu der Berechnung der potentiellen Energie V ist

$$V = Ph,$$

wobei h die Höhe des Schwerpunktes der Masse M (d. h. des Punktes A) über dem Niveau des festen Punktes O_1 ist. Wir berechnen die Größe h als Funktion von φ mit einer Genauigkeit bis zu den Größen zweiter Ordnung. Es gilt

$$h = b\cos\alpha - c\cos\varphi\,.$$

Setzen wir hier

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2},$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} = 1 - \frac{(a-b)^2}{2\,b^2}\,\varphi^2,$$

so finden wir

$$h = b - c + \frac{1}{2}\left[c - \frac{(a-b)^2}{b}\right]\varphi^2.$$

Folglich ist

$$V = P\left\{b - c + \frac{1}{2}\left[c - \frac{(a-b)^2}{b}\right]\varphi^2\right\}. \tag{7}$$

Nachdem wir die Ausdrücke (6) und (7) der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie V ermittelt haben, stellen wir die Differentialgleichung der Bewegung unseres Systems auf. Es gilt:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = \left[m(c + a - b)^2 + J\right]\dot\varphi, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = P\left[c - \frac{(a-b)^2}{b}\right]\varphi.$$

Die LAGRANGEsche Gleichung lautet damit:

$$\left[m(c + a - b)^2 + J\right]\ddot\varphi = -P\left[c - \frac{(a-b)^2}{b}\right]\varphi.$$

Wenn wir der Kürze halber

$$\lambda^2 = \frac{P\left[b\,c - (a-b)^2\right]}{b\left[m(c + a - b)^2 + J\right]} \tag{8}$$

setzen, ergibt sich

$$\ddot\varphi + \lambda^2\varphi = 0.$$

Durch Integration erhalten wir:

$$\varphi = C_1 \cos\lambda t + C_2 \sin\lambda t, \tag{9}$$

wobei C_1 und C_2 beliebige Konstanten sind. Wie wir sehen, haben wir harmonische Schwingungen erhalten, deren Frequenz λ durch die Gl. (8) bestimmt wird.

Jedoch wird die Frequenz λ nur in dem Fall eine reelle Größe sein, wenn, wie aus der Gl. (8) ersichtlich, die Bedingung

$$b\,c - (a-b)^2 > 0$$

erfüllt ist.

Nur in diesem Fall wird das Pendel, nachdem es aus dem Gleichgewichtszustand gebracht ist, schwingende Bewegungen um die Gleichgewichtslage ausführen.

Wenn die Konstanten des Apparates die Bedingung

$$b\,c - (a-b)^2 < 0$$

erfüllen, wird die Größe λ imaginär, und in der Gl. (9) werden die trigonometrischen Funktionen durch hyperbolische Funktionen ersetzt. In diesem Fall wächst der Winkel φ mit der Zeit unbeschränkt an. Der aus der Gleichgewichtslage gebrachte

Apparat führt um diese Lage keine Schwingungen aus; die kleinste Abweichung von der Gleichgewichtslage läßt den Ausschlag unbeschränkt anwachsen. Das bedeutet, daß im gegebenen Fall der Gleichgewichtszustand des Pendels (bei einer vertikalen Lage der Stäbe AB und CO_1) labil ist.

Somit ist für die Stabilität des Gleichgewichtszustandes des Pendels die Erfüllung der Bedingung

$$b\,c - (a - b)^2 > 0$$

notwendig.

Bei Erfüllung dieser Bedingung wird die Frequenz der Eigenschwingungen des Apparates durch die Gl. (8) bestimmt. Wie aus dieser Gleichung ersichtlich ist, kann man, wenn man die Konstanten a, b und c verändert, in weiten Grenzen die Eigenfrequenz des Apparates verändern. Die Konstruktion des Apparates von SCHLICK gestattet es, durch Veränderung der Größe a beliebige Eigenfrequenzen des Apparates zu erzielen. Das ist sehr wichtig bei Apparaten, die zur Aufzeichnung von Schwingungen dienen.

§ 131. Die Bewegungsgleichungen von LAGRANGE für ein System mit überzähligen Koordinaten. Die LAGRANGEschen Multiplikatoren

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir die Differentialgleichungen der Pendelbewegung des Pallographen von SCHLICK aufgestellt. Im Verlauf dieser Aufstellung mußten wir bei der Berechnung der kinetischen und potentiellen Energie zwei variable Hilfsgrößen x und α einführen. Diese beiden Variablen sind überzählige Koordinaten unseres Systems in dem Sinne, den wir diesem Ausdruck im § 120 gaben. Jede dieser Variablen hätte als verallgemeinerte Koordinate des Systems bezeichnet werden können; sie sind überzählig, da die Lage des Systems bereits eindeutig durch die Grundkoordinate φ bestimmt wird.

Die überzähligen Koordinaten x und α sind mit der Grundkoordinate φ durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x\cos\varphi + b\cos\alpha - a = 0\,, \\ x\sin\varphi - b\sin\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

verbunden.

Im Verlauf der Berechnung der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie V mußten wir die Variablen x und α aus den Ausdrücken T und V eliminieren, da unsere Aufgabe darin bestand, diese Ausdrücke als Funktionen von φ und $\dot\varphi$ zu erhalten. Zur Eliminierung der überzähligen Koordinaten dienten uns die Gleichungen (1).

Wir wollen nun uns die Frage stellen: Kann man die Differentialgleichungen der Bewegung im Fall eines Systems mit überzähligen Koordinaten so in der Form verändern, daß die Notwendigkeit, die Operation der Eliminierung der überzähligen Koordinaten auszuführen, vermieden werden kann? Können nicht solche Bewegungsgleichungen aufgestellt werden, in denen die überzähligen Koordinaten eingeschlossen bleiben?

Die Antwort auf diese Frage finden wir bei LAGRANGE: Eine solche Form der Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems mit überzähligen Koordinaten ist

vom Verfasser der „Analytischen Mechanik" gegeben worden. Diese neue Form der Bewegungsgleichungen steht im Zusammenhang mit der Einführung der sogenannten LAGRANGEschen Multiplikatoren.

Wir stellen uns ein System vor, das k Freiheitsgrade besitzt, und bezeichnen k unabhängige verallgemeinerte Koordinaten, welche die Lage dieses Systems bestimmen, mit $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Wir führen in die Betrachtung weitere m überzählige Koordinaten $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_{k+m}$ ein, die mit den Grundkoordinaten durch m Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} f_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+m}) = 0, \\ f_2(q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+m}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+m}) = 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

verbunden sind.

Wenn die Gln. (2) nicht gültig wären, d. h., wenn alle $k + m$ Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}$ unabhängig wären, hätte unser System $k + m$ Freiheitsgrade. Das Vorhandensein der Gln. (2) engt die Bewegungsfreiheit des Systems ein, indem es m Freiheitsgrade vernichtet. Jede die Bewegungsfreiheit des Systems beschränkende Bedingung nennen wir Zwangsbedingung. Folglich werden unserem System durch die Gln. (2) m Zwangsbedingungen auferlegt; die Gln. (2), die analytisch diese Zwangsbedingungen ausdrücken, werden wir *Gleichungen der Zwangsbedingungen* nennen.

Nehmen wir an, daß unser System sich unter der Wirkung angreifender Kräfte bewegt, und stellen wir die Differentialgleichungen der Bewegung des Systems auf.

Wir beginnen damit, daß wir in Gedanken die durch die Gleichungen (2) ausgedrückten Zwangsbedingungen vernichten, d. h., wir machen alle Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}$ unabhängig, indem wir das gegebene System in ein System mit $k + m$ Freiheitsgraden umwandeln. Unter dieser Voraussetzung berechnen wir die kinetische Energie T des Systems und auch die verallgemeinerten Kräfte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k+m}$, die den Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}$ entsprechen.

Der Einfachheit halber werden wir alle Zwangsbedingungen des Systems als zeitunabhängig voraussetzen. In einem solchen Falle erscheint die kinetische Energie T als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}$ und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{k+m}$

$$T = T(q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}, \quad \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{k+m}).$$

Wenn die am System angreifenden Kräfte ein Potential haben, kann man die verallgemeinerten Kräfte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k+m}$ ermitteln, indem man die potentielle Energie V des Systems berechnet, die als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}$ auftritt:

$$V = V(q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}).$$

Wir haben dann:

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial q_1}, \qquad Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial q_2}, \qquad \ldots, \qquad Q_{k+m} = -\frac{\partial V}{\partial q_{k+m}}.$$

Wir wollen nun die allgemeine Gleichung der Dynamik aufschreiben; in den Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}$ hat sie folgende Form:

$$\sum_{i=1}^{i=k+m} \left(Q_i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0, \tag{3}$$

wobei δq_i der geringfügig kleine Zuwachs der Koordinate q_i ist. Diese Gleichung muß bei jeder virtuellen Verrückung des Systems gelten.

Wenn alle Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}$ unabhängig wären, müßte die Gl. (3) bei *beliebigen* Werten der Größen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_{k+m}$ erfüllt sein. Wenn wir wie im § 128 folgern, kämen wir von hier aus zu den uns bereits bekannten Bewegungsgleichungen von LAGRANGE.

In Wirklichkeit aber sind die Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}$ durch die Gln. (2) gebunden. Wir wissen bereits, daß diese Gleichungen unserem System m zusätzliche Zwangsbedingungen auferlegen. Wir wollen sehen, wie sich das Vorhandensein dieser neuen Zwangsbedingungen in der Gl. (3) widerspiegelt.

Zunächst ist es wichtig zu bemerken, daß das Vorhandensein dieser Zwangsbedingungen nicht das Auftreten irgendwelcher neuer Glieder in der Gl. (3) hervorruft. In der Tat ist das Auftreten neuer Zwangsbedingungen mit dem Erscheinen der entsprechenden Reaktionen der auf die Systempunkte wirkenden Zwangsbedingungen verbunden. Wir wissen aber, daß die Summe der Arbeiten der Reaktionen der Zwangsbedingungen bei jeder virtuellen Verrückung dieses Systems gleich Null ist. Hieraus folgt, daß das Vorhandensein neuer Zwangsbedingungen nicht das Erscheinen irgendwelcher neuer Glieder in der Arbeitsgleichung (3) hervorruft.

Worin äußert sich nun das Vorhandensein jener neuen Zwangsbedingungen, die durch die Gln. (2) ausgedrückt sind? Es äußert sich darin, daß beim Vorhandensein dieser Zwangsbedingungen die Gl. (3) nicht bei jedem Wert der Größen δq_1, $\delta q_2, \ldots, \delta q_{k+m}$ erfüllbar ist, sondern nur bei solchen Werten, die *mit den Gleichungen der Zwangsbedingungen* (2) *vereinbar sind.*

Tatsächlich muß die Gl. (3) bei jeder virtuellen Verrückung des Systems erfüllt sein. Wenn wir den Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}$ die Zunahmen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots$, δq_{k+m} geben, rufen wir eine Verrückung des Systems hervor. Diese Verrückung wird nur in dem Fall virtuell sein, d. h. eine von den Zwangsbedingungen zugelassene sein, wenn die Koordinatenwerte $q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \ldots, q_{k+m} + \delta q_{k+m}$ ebenso die Gleichungen der Zwangsbedingungen (2) befriedigen wie $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}$, d. h., wenn außer den Gln. (2) auch die Gleichungen:

$$\begin{gathered}
f_1(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \ldots, q_{k+m} + \delta q_{k+m}) = 0 \\
f_2(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \ldots, q_{k+m} + \delta q_{k+m}) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_m(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \ldots, q_{k+m} + \delta q_{k+m}) = 0
\end{gathered}$$

erfüllt werden.

Diesen Gleichungen geben wir eine einfachere Form, indem wir ihre linken Seiten nach Potenzen der kleinen Größen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_{k+m}$ entwickeln und in diesen Ausdrücken nur die Glieder erster Ordnung behalten. Unter Beachtung, daß die ersten Glieder in diesen Ausdrücken (die nicht von $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_{k+m}$ abhängen) auf Grund der Gln. (2) Null werden, gilt:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial q_{k+m}}\delta q_{k+m} = 0, \\
&\frac{\partial f_2}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial f_2}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial q_{k+m}}\delta q_{k+m} = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{\partial f_m}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial f_m}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial q_{k+m}}\delta q_{k+m} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dies sind die Bedingungen, welche die Größen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_{k+m}$ erfüllen müssen, damit die linke Seite der Gl. (3) verschwindet. Die Zunahmen der überzähligen Koordinaten δq_{k+1} $\delta q_{k+2}, \ldots, \delta q_{k+m}$ aus diesen m Gleichungen könnte man als lineare Funktionen der Zunahmen der unabhängigen Koordinaten $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ die selbst völlig willkürlich bleiben, darstellen.

Wir wollen nun folgendermaßen verfahren. Wir multiplizieren die Glieder der Gln. (4) entsprechend mit den unbestimmten Faktoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ und addieren diese Gleichungen zu der Gl. (3). Fassen wir die mit der Größe δq_i multiplizierten Glieder zusammen, so haben wir

$$\sum_{i=1}^{i=k+m}\left(Q_i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial q_i} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_m\frac{\partial f_m}{\partial q_i}\right)\delta q_i = 0. \tag{5}$$

Diese Gleichung muß ebenso wie die Gl. (3) von allen Werten der Größen δq_i, die die Gleichungen (4) befriedigen, erfüllt sein.

Wir wollen nun über die unbestimmten Faktoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ so verfügen, daß jene Größen, die in der Gleichung (5) mit den Zunahmen der überzähligen Koordinaten $\delta q_{k+1}, \delta q_{k+2}, \ldots, \delta q_{k+m}$ multipliziert worden sind, sich zu Null ergeben, d. h., wir setzen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial q_i} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_m\frac{\partial f_m}{\partial q_i}, \tag{6}$$

wobei $i = k+1, k+2, \ldots, k+m$ ist. Aus diesen m Gleichungen werden die m Faktoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ bestimmt.

Wenn auf diese Art die Faktoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ gewählt sind, haben wir automatisch in der Gl. (5) jene Glieder abgeschnitten, in denen die Zunahmen der überzähligen Koordinaten vorhanden sind; in dieser Gleichung verbleiben nur die Glieder, die mit den Zunahmen der unabhängigen Koordinaten $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ multipliziert werden; die Gleichung (5) nimmt folgende Form an:

$$\sum_{i=1}^{i=k}\left(Q_i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial q_i} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_m\frac{\partial f_m}{\partial q_i}\right)\delta q_i = 0.$$

In Anbetracht der willkürlichen Zunahmen der unabhängigen Koordinaten $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ sind bei dieser Gleichung die Erwägungen anwendbar, deren wir uns in den §§ 124 und 128 bedient haben. Wir folgern, daß die letzte Gleichung durch die willkürlichen Werten $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ nur in dem Fall befriedigt werden kann, wenn alle Größen, die in dieser Gleichung mit den Zunahmen der unabhängigen Koordinaten multipliziert werden, einzeln für sich gleich Null sind. Damit erhalten wir die zweite Gruppe der Gleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial q_i}$$

mit $i = 1, 2, \ldots, k$.

Wenn wir die Gln. (6) anschließen, erhalten wir endgültig ein System von $k + m$ Gleichungen:

$$\text{wie } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial q_i} \tag{7}$$

mit $i = 1, 2, \ldots, k + m$.

Fügen wir zu diesen Gleichungen noch m Gleichungen der Zwangsbedingungen (2) hinzu, so haben wir im ganzen $k + 2m$ Gleichungen, die der Bestimmung von $k + 2m$ Unbekannten dienen, und zwar von $k + m$ Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}$ und m Faktoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Die Größen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ heißen Lagrangesche Multiplikatoren. Die Gln. (7) werden wir Lagrangesche *Differentialgleichungen der Bewegung mit Multiplikatoren* nennen. Wie wir sehen, haben wir Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems erhalten, in denen die überzähligen Koordinaten nicht eliminiert wurden.

Es ist wichtig zu bemerken, daß alle Koordinaten, sowohl die Grundkoordinaten als auch die überzähligen, auf gleiche Weise in der Gl. (7) enthalten sind; in diesen Gleichungen ist der Unterschied zwischen den Grundkoordinaten und den überzähligen Koordinaten gleichsam weggewischt. Hieraus folgt, daß die Gln. (7) auch in dem Fall gelten, wenn wir als Grundkoordinaten des Systems nicht $q_1, q_2, \ldots, q_k$ wählen, sondern beliebige k andere aus der Gesamtzahl $k + m$ der Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}$.

§ 132. Der Pallograph als System mit überzähligen Koordinaten

Als Beispiel zur Erklärung der Anwendung der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren wollen wir uns noch einmal mit der Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung des Pendels im Pallographen von Schlick beschäftigen.

Wir haben hier die drei Koordinaten φ, x und α, die durch die beiden Gleichungen der Zwangsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} x\cos\varphi + b\cos\alpha - a = 0\,,\\ x\sin\varphi - b\sin\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

miteinander verbunden sind. Die Gleichungen wurden im § 130 aus der Betrachtung des Dreiecks OCO_1 gefunden (Abb. 207). Wir wollen die Differentialgleichungen der

Bewegung des Apparates nach der im vorhergehenden Paragraphen dargelegten Methode aufstellen und beginnen damit, daß wir in Gedanken die durch die Gln. (1) ausgedrückten Zwangsbedingungen vernichten, d. h. die gelenkige Verbindung der Stäbe AB und CO_1 im Punkte C unterbrechen (Abb. 208).

Wenn wir diese Stäbe auseinandernehmen, machen wir alle drei Koordinaten φ, x und α voneinander unabhängig und verwandeln unser System in ein System mit drei Freiheitsgraden.

Unter dieser Voraussetzung berechnen wir die kinetische Energie T und die potentielle Energie V unseres Systems. Verfahren wir so wie im § 130 und betrachten $c + x$ und φ als Polarkoordinaten des Punktes A, so gilt

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + (c + x)^2 \dot{\varphi}^2\right] + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2.$$

Andererseits ist

$$V = Ph = P\left[a - (c + x)\cos\varphi\right].$$

Hieraus finden wir die verallgemeinerten Kräfte Q_φ, Q_x und Q_α, die den Koordinaten φ, x und α entsprechen:

$$Q_\varphi = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -P(c + x)\sin\varphi,$$

$$Q_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = P\cos\varphi,$$

$$Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0.$$

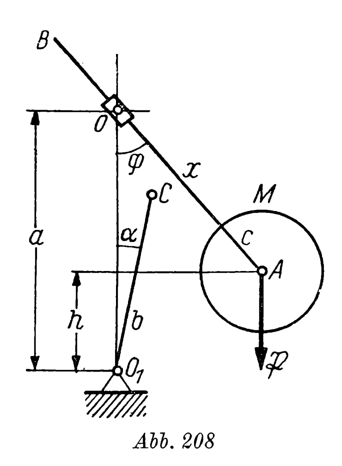


Abb. 208

Wir wollen nun die Verbindung zwischen den Stäben AB und CO_1 wiederherstellen. Da wir die soeben aufgestellten Ausdrücke der kinetischen Energie und der verallgemeinerten Kräfte besitzen, bezeichnen wir die linken Seiten der Gleichungen der Zwangsbedingungen (1) mit f_1 und f_2, d. h., wir schreiben

$$f_1 = x\cos\varphi + b\cos\alpha - a,$$

$$f_2 = x\sin\varphi - b\sin\alpha$$

und können die Bewegungsgleichungen unseres Apparates nun nach folgendem Schema aufstellen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_\alpha + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}.$$

Wenn wir alle durch dieses Schema vorgeschriebenen Differentiationen ausführen erhalten wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} [m(c+x)^2+J]\,\ddot{\varphi}+2m(c+x)\dot{x}\,\dot{\varphi} &= -P(c+x)\sin\varphi-\lambda_1 x\sin\varphi+\lambda_2 x\cos\varphi\,, \\ m\ddot{x}-m(c+x)\dot{\varphi}^2 &= P\cos\varphi+\lambda_1\cos\varphi+\lambda_2\sin\varphi\,, \\ 0 &= -\lambda_1 b\sin\alpha+\lambda_2 b\cos\alpha\,. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Mit diesen Gleichungen müssen die Gleichungen der Zwangsbedingungen (1) vereinigt werden. Dies sind die genauen Differentialgleichungen der Bewegung des Pendels im Pallographen von Schlick.

Die weiteren Berechnungen werden wir mit demselben Genauigkeitsgrade wie im § 130 durchführen, und zwar werden wir die Bewegungsgleichungen unseres Systems mit einer Genauigkeit bis zu den kleinen Größen erster Ordnung aufstellen.

Nehmen wir die Gln. (1) und behalten in diesen nur die kleinen Glieder, die nicht größer als erster Ordnung sind, so gilt:

$$x+b-a=0\,,$$

$$x\varphi-b\alpha=0\,,$$

woraus

$$x=a-b\,,\qquad \alpha=\frac{a-b}{b}\varphi$$

folgt.

Ferner erhalten wir, wenn wir die kleinen Glieder zweiter und höherer Ordnungen in den Gln. (2) vernachlässigen und $x=a-b$ annehmen:

$$\left.\begin{aligned} [m(c+a-b)^2+J]\,\ddot{\varphi} &= -P(c+a-b)\varphi-\lambda_1(a-b)\varphi+\lambda_2(a-b)\,, \\ 0 &= P+\lambda_1+\lambda_2\varphi\,, \\ 0 &= \lambda_1\alpha+\lambda_2\,. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen finden wir mit einer Genauigkeit bis zu den Größen erster Ordnung:

$$\lambda_2=-\lambda_1\alpha\,;\qquad \lambda_1=-P\,,$$

woraus

$$\lambda_2=P\alpha$$

folgt.

Setzen wir die soeben gewonnenen Ausdrücke λ_1 und λ_2 in die erste Gl. (3) ein, so erhalten wir:

$$[m(c+a-b)^2+J]\,\ddot{\varphi}=-Pc\varphi+P(a-b)\alpha\,.$$

Nehmen wir hier

$$\alpha=\frac{a-b}{b}\varphi$$

an, so erhalten wir endgültig die Gleichung zur Bestimmung von φ:

$$[m(c+a-b)^2+J]\,\ddot{\varphi}+P\left[c-\frac{(a-b)^2}{b}\right]\varphi=0,$$

in der wir die Bewegungsgleichung des Pendels erkennen, die wir im § 130 aufgestellt haben.

Ob die Anwendung der Methode der LAGRANGEschen Multiplikatoren in der soeben besprochenen Aufgabe irgendwelche wesentlichen Vorzüge vor der im § 130 dargelegten Lösung bietet, überlassen wir dem Leser zu entscheiden; betreffs dieser Frage kann es verschiedene Meinungen geben. Im folgenden Paragraphen werden wir uns mit einem Fall befassen, wo die Anwendung der LAGRANGEschen Multiplikatoren durch das Wesen der Aufgabenstellung entschieden wird.

§ 133. Die nichtholonomen Zwangsbedingungen und die LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen für nichtholonome Systeme

Im § 131 setzten wir voraus, daß die überzähligen Koordinaten mit den (unabhängigen) Grundkoordinaten durch die Gln. (2) verbunden sind, die wir die Gleichungen der Zwangsbedingungen nannten. Durch diese Gleichungen werden den Koordinaten des Systems bestimmte Abhängigkeiten auferlegt. Da aber die Lagen der Systempunkte durch die verallgemeinerten Koordinaten bestimmt sind, beschränken folglich die durch die Gln. (2) im § 131 ausgedrückten Zwangsbedingungen die Bewegungsfreiheit des Systems dadurch, daß sie den Lagen der Systempunkte bestimmte Forderungen auferlegen. So z. B. legen im Fall des Pallographen von SCHLICK (§ 132) die durch die Gln. (1) ausgedrückten Zwangsbedingungen dem System die Forderung auf, daß das Ende des Schwenkhebels CO_1 gelenkig mit dem Stabe AB im Punkte C verbunden ist.

Es bestehen jedoch auch Zwangsbedingungen anderer Art, nämlich Zwangsbedingungen, die bestimmte Bedingungen nicht den Lagen, sondern den Geschwindigkeiten der Systempunkte auferlegen. Wir wollen uns einen beweglichen starren Körper vorstellen, der ohne zu gleiten auf der Oberfläche eines anderen unbeweglichen Körpers rollt. Die Bedingung des Rollens ohne zu gleiten besteht darin, daß die Geschwindigkeit des beweglichen Körpers im Berührungspunkt mit der Oberfläche des unbeweglichen Körpers gleich Null sein muß. Hier haben wir das Beispiel einer Zwangsbedingung, die eine Forderung betreffs der Verteilung der Geschwindigkeiten in den Punkten des Körpers stellt.

In ähnlichen Fällen wird die Gleichung, die eine Zwangsbedingung ausdrückt, nicht nur verallgemeinerte Koordinaten, sondern auch verallgemeinerte Geschwindigkeiten enthalten. Mit anderen Worten, wenn die Zwangsbedingungen nicht den Lagen, sondern den Geschwindigkeiten der Systempunkte Bedingungen auferlegt, erweist sich die Gleichung der Zwangsbedingung nicht als endlich, sondern als *Differentialgleichung* zwischen den Koordinaten des Systems. Dabei enthält in den meisten Fällen (insbesondere im Fall des Rollens ohne zu gleiten) diese Differentialgleichung nur verallgemeinerte Geschwindigkeiten ersten Grades; wir werden uns im weiteren nur auf diese Fälle beschränken.

Stellen wir uns nun ein System mit $k + m$ verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}$ vor, und nehmen wir an, daß dieses System m Zwangsbedingungen unterworfen ist, die den Geschwindigkeiten der Systempunkte Bedingungen auferlegen. Nehmen wir an, daß die Gleichungen dieser Zwangsbedingungen die Form

$$\left.\begin{aligned} M_{11}\dot{q}_1 + M_{12}\dot{q}_2 + \cdots + M_{1,k+m}\dot{q}_{k+m} &= 0, \\ M_{21}\dot{q}_1 + M_{22}\dot{q}_2 + \cdots + M_{2,k+m}\dot{q}_{k+m} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{m,1}\dot{q}_1 + M_{m,2}\dot{q}_2 + \cdots + M_{m,k+m}\dot{q}_{k+m} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

haben, wobei M_{ij} Funktionen von $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}$ sind.

Multiplizieren wir die Gln. (1) mit $\mathrm{d}t$, so können wir sie in folgende Form bringen:

$$\left.\begin{aligned} M_{11}\,\mathrm{d}q_1 + M_{12}\,\mathrm{d}q_2 + \cdots + M_{1,k+m}\,\mathrm{d}q_{k+m} &= 0, \\ M_{21}\,\mathrm{d}q_1 + M_{22}\,\mathrm{d}q_2 + \cdots + M_{2,k+m}\,\mathrm{d}q_{k+m} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{m,1}\,\mathrm{d}q_1 + M_{m,2}\,\mathrm{d}q_2 + \cdots + M_{m,k+m}\,\mathrm{d}q_{k+m} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Gleichungen von der Form (2) heißen *Gleichungen in vollständigen Differentialen oder* PFAFFsche *Gleichungen.* Es kann vorkommen, daß es mit Hilfe der entsprechenden Umbildungen gelingt, die Gln. (2) in die Form

$$\mathrm{d}f_1 = 0, \qquad \mathrm{d}f_2 = 0, \qquad \ldots, \mathrm{d}f_m = 0$$

zu bringen, wobei $f_1, f_2, \ldots, f_m$ Funktionen von $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}$ sind. In einem solchen Falle erhalten wir, wenn wir integrieren:

$$\left.\begin{aligned} f_1(q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}) &= C_1, \\ f_2(q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}) &= C_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}) &= C_m, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wobei $C_1, C_2, \ldots, C_m$ beliebige Konstanten sind. In diesem Falle heißen die Gln. (2) integrierbar; die Gleichungen (3) werden ihre Integrale genannt. Die Differentialgleichungen (2) sind den endlichen Gln. (3) gleichwertig; wir haben hier einen Fall, der sich nicht wesentlich von dem im § 131 betrachteten unterscheidet.

Es läßt sich jedoch nicht jedes Gleichungssystem von PFAFF von der Form (2) in dem soeben erwähnten Sinne integrieren[1].

Eine Zwangsbedingung, die analytisch durch die nichtintegrierbare PFAFFsche Gleichung ausgedrückt ist, heißt *nichtholonome* Zwangsbedingung[2]; die durch end-

---

[1] Siehe A. Voß, „Über die Differentialgleichungen der Mechanik", Math. Ann., Bd. 25 (1885), S. 258.

[2] Dieser Ausdruck stammt von Hertz (H. Hertz, „Die Prinzipien der Mechanik", 1894). Beispiele von nichtholonomen Zwangsbedingungen sind schon früher von verschiedenen Verfassern betrachtet worden, ihre systematische Erforschung wurde zuerst von Voß in der oben zitierten Arbeit durchgeführt. Ein Passus in der „Analytischen Mechanik" (J. L. Lagrange, „Analytische Mechanik", Bd. I) läßt vermuten, daß bereits Lagrange der Begriff der nichtholonomen Zwangsbedingungen bekannt war.

liche Gleichungen ausgedrückten Zwangsbedingungen (oder integrierbare Gleichungen von PFAFF) erhalten den Namen *holonome* Zwangsbedingungen. Ein System, das unter den Zwangsbedingungen auch nur eine nichtholonome Zwangsbedingung hat, werden wir ein *nichtholonomes System* nennen.

Wir wenden uns nun der Aufstellung von Differentialgleichungen der Bewegung für ein nichtholonomes System zu.

Wir wollen uns ein nichtholonomes System mit den Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}$ vorstellen, das Zwangsbedingungen unterworfen ist, die durch die nichtintegrierbaren Gln. (1) und (2) ausgedrückt sind. Wir wollen ebenso wie im § 131 vorgehen. Wir vernichten in Gedanken die Zwangsbedingungen (1) und berechnen, nachdem wir alle Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}$ unabhängig gemacht haben, die kinetische Energie T des Systems und die verallgemeinerten Kräfte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k+m}$ und stellen die allgemeine Gleichung der Dynamik

$$\sum_{i=1}^{i=k+m} \left(Q_i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \tag{4}$$

auf, die für beliebige Werte der Größen δq_i gelten muß.

Wir wollen nun die Bedingungen (1) wiederherstellen. Dann muß die soeben aufgeschriebene allgemeine Gleichung der Dynamik nur bei solchen Werten der Zuwüchse der Koordinaten δq_i erfüllbar sein, die mit den Gleichungen der Zwangsbedingungen (1) zu vereinbaren sind. Welches sind aber diese Werte?

Wenn wir die Gleichungen der Zwangsbedingungen (1) in der Form (2) aufschreiben, erhalten wir Gleichungen, die durch die Koordinaten des Systems befriedigt werden müssen und die durch die Zwangsbedingungen der Zunahmen dieser Koordinaten zugelassen sind. Also müssen auch die Zunahmen δq_i diese Gleichungen befriedigen; wir erhalten die Bedingungen, die durch die Gln. (1) den Zunahmen der Koordinaten δq_i auferlegt werden, aus den Gln. (2) durch eine einfache Vertauschung des Buchstabens d mit δ. Somit muß bei Vorhandensein der Zwangsbedingungen (1) die Gleichung (4) bei allen Werten der Größen δq_i erfüllt werden, welche die Gln.

$$\left.\begin{aligned} M_{11}\,\delta q_1 + M_{12}\,\delta q_2 + \cdots + M_{1,k+m}\,\delta q_{k+m} &= 0, \\ M_{21}\,\delta q_1 + M_{22}\,\delta q_2 + \cdots + M_{2,k+m}\,\delta q_{k+m} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{m,1}\,\delta q_1 + M_{m,2}\,\delta q_2 + \cdots + M_{m,k+m}\,\delta q_{k+m} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

befriedigen.

Wenden wir nun die Methode der LAGRANGEschen Multiplikatoren an und folgern wir wie im § 131, so erhalten wir die Differentialgleichungen der Bewegung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda_1 M_{1i} + \lambda_2 M_{2i} + \cdots + \lambda_m M_{mi} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k+m), \tag{6}$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ unbestimmte Faktoren sind. Fügen wir die Gleichungen der Zwangsbedingungen (1) hinzu, so erhalten wir ein System von $k + 2m$ Gleichungen zur Bestimmung von $k + 2m$ Unbekannten $q_1, q_2, \ldots, q_{k+m}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Dies sind die Differentialgleichungen der Bewegung eines nichtholonomen Systems; wie man sieht, unterscheiden sie sich nicht wesentlich von den im § 131 aufgestellten Gleichungen.

Man könnte versuchen, auch im Fall eines nichtholonomen Systems die überzähligen Koordinaten und ihre Ableitungen bei der Berechnung der kinetischen Energie des Systems und der verallgemeinerten Kräfte zu eliminieren, um Bewegungsgleichungen von der Form (1) § 128 zu erhalten, die nur unabhängige Koordinaten enthalten. Wenn dies auch gelingen würde, zeigt eine ausführliche Betrachtung, daß wir Gleichungen erhalten würden, die nicht der wirklichen Bewegung des Systems entsprechen. Für nichtholonome Systeme ist die Eliminierung der überzähligen Koordinaten bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen falsch[1].

[1] Genaueres darüber siehe Appell, „Handbuch der theoretischen Mechanik" („Traité de la méchanique rationelle", Paris 1919).

Vierter Teil

DIE THEORIE DER KLEINEN SCHWINGUNGEN

KAPITEL XXII

DIE GLEICHGEWICHTS-STABILITÄT

134. Die kleinen Schwingungen eines Systems um die Gleichgewichtslage. Die stabilen und labilen Gleichgewichtszustände

Der vierte Teil dieses Buches wird der Untersuchung der Schwingungsbewegungen von materiellen Systemen gewidmet sein. Die einfachsten Resultate, die sich auf die Schwingungen eines materiellen Punktes beziehen, haben wir bereits im Kapitel VII kennengelernt. Hier beabsichtigen wir, diese Resultate zu vertiefen und sie auf die Schwingungsbewegungen beliebiger materieller Systeme auszudehnen.

Mit Schwingungsbewegungen mehr oder weniger komplizierter Systeme haben wir es in den verschiedenartigsten Gebieten der Technik zu tun. Alle (oder fast alle) sogenannten starren Körper besitzen in höherem oder niedrigerem Grade eine Elastizität. Ein jeder derartiger Körper beginnt zu schwingen, nachdem er deformiert und darauf der Wirkung elastischer Kräfte überlassen ist; dabei führen seine einzelnen Teilchen schwingende Bewegungen um ihre Gleichgewichtslage aus. Hieraus wird die außerordentliche Verbreitung der Schwingungsbewegungen in der Natur und ihre ungeheure Wichtigkeit bei der technischen Anwendung verständlich. Mit Schwingungserscheinungen muß man auch im Maschinenbau, im Bauwesen und in Transportfragen rechnen; Torsionsschwingungen der Kurbelwellen von Motoren, Schwingungen von Turbinenscheiben und -schaufeln, Schwingungen von Maschinenfundamenten und Mauern von Gebäuden, verschiedenartige Schwingungserscheinungen in Lokomotiven, Schiffen, Automobilen und Flugzeugen — das sind einige hierhergehörige Beispiele. Ein aufmerksames Studium der Schwingungserscheinungen und Beherrschung derselben, der Kampf mit den schädlichen Folgen dieser Erscheinungen und eine geschickte Ausnutzung dieser Erscheinungen dort, wo es möglich ist — das sind die Aufgaben, die auf diesem Gebiete die Gedanken des Ingenieurs nachdrücklich beschäftigen. Die Schwingungstechnik ist in unserer Zeit zu einem selbständigen und wichtigen Zweige der Ingenieurwissenschaft geworden.

In diesem Teil unseres Lehrbuches setzen wir uns das Studium der Grundgesetze, durch welche die *Schwingungen eines materiellen Systems* um seine Gleichgewichtslage bestimmt werden, zum Ziel. Wir bemerken, daß jeder sich deformierende feste Körper als ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden betrachtet werden muß. Daher

gehört jede Aufgabe, in der von Schwingungen eines festen Körpers die Rede ist, wobei sowohl die Elastizität als auch die Masse des Körpers berücksichtigt werden, in das Gebiet der Schwingungen eines Systems mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Wenn jedoch zu dem Bestande des schwingenden Systems deformierbare Körper gehören, deren Massen man im Vergleich zu den Massen anderer Körper — die als absolut starr behandelt werden — vernachlässigen kann, dann verwandelt sich das System in ein solches mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden, und die Frage vereinfacht sich. Im weiteren werden wir nur die Schwingungen von Systemen mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden betrachten; die Aufgaben über Schwingungen von Systemen mit einer unendlichen Anzahl von Freiheitsgraden gehören in einen Spezial-lehrgang über elastische Schwingungen. Wir wollen übrigens sofort erwähnen, daß sich die Grundgesetzmäßigkeiten, die wir hier beim Studium der Schwingungen von Systemen mit einer endlichen Zahl von Freiheitsgraden feststellen werden, in ihrem vollen Umfang auch auf Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden übertragen lassen.

Die Ursache für die Schwingungsbewegungen bei den oben aufgezählten Beispielen sind äußere Erregerkräfte, die sich periodisch im Laufe der Zeit verändern, oder unausgeglichene Trägheitskräfte von Maschinenteilen, die ebenfalls einen periodischen Charakter haben. In diesen Beispielen (und ebenso in allen analogen Fällen) haben wir es mit *erzwungenen* Schwingungen des Systems zu tun. Bereits aus dem Kapitel VII ist uns die Erscheinung der *Resonanz* bekannt, in welcher sich die enge Verbindung der erzwungenen Schwingungen mit den *Eigenschwingungen* äußert. Wir werden hier sowohl die Eigenschwingungen als auch die erzwungenen Schwingungen eines Systems studieren. Die Erscheinung der Resonanz wird auch hier im Mittelpunkt unserer Aufmerksamkeit stehen.

Es ist wichtig zu bemerken, daß wir es bei technischen Anwendungen gewöhnlich mit Schwingungen von äußerst kleiner Amplitude zu tun haben. In einigen Fällen sind die Schwingungen so klein, daß sie einer oberflächlichen Beobachtung entgehen und nur von empfindlichen Apparaten aufgedeckt werden (was nicht verhindert, daß unerwünschte und manchmal sogar für die Dauerfestigkeit der Anlage oder für das regelrechte Funktionieren der Maschine verhängnisvolle Folgen entstehen). Wie kann man eine hinreichend kleine und in jedem Fall ungefährliche Größe der Schwingungsamplitude garantieren? Mit dieser Frage geht in den meisten Fällen der Ingenieur an die Erforschung der Schwingungen eines Systems heran. Somit bieten die Schwingungen mit kleiner Amplitude oder, kürzer gesagt, die *kleinen Schwingungen* ein besonderes Interesse vom Gesichtspunkt der Anwendung aus. Andererseits bringt die Voraussetzung der Kleinheit der Amplituden eine große Vereinfachung in der Theorie dieser Frage mit sich: Sie gestattet, wie wir weiter unten sehen werden, die entsprechenden Differentialgleichungen zu *linearisieren.* Aus diesen Erwägungen heraus werden wir uns im weiteren auf die Betrachtung der *Theorie der kleinen Schwingungen* eines Systems beschränken.

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir noch bemerken, daß man nur in dem Fall von einer schwingenden Bewegung des Systems um die Gleichgewichtslage sprechen kann, wenn die Gleichgewichtslage des Systems *stabil* ist. Wenn das Gleichgewicht des Systems *labil* ist, d. h., wenn das System bei der geringsten Abweichung

von der Gleichgewichtslage die Tendenz zeigt, sich immer mehr von derselben zu entfernen, kann keine Rede von kleinen Schwingungen des Systems um eine solche Gleichgewichtslage sein. Hiernach ist es klar, daß wir uns, wenn wir an das Studium der Theorie der kleinen Schwingungen eines Systems herangehen, vor allem mit der Frage der Stabilität des Gleichgewichts beschäftigen müssen, damit wir die Möglichkeit bekommen, die stabilen Gleichgewichtszustände von den labilen zu unterscheiden. Dieser Frage wird der ganze übrige Teil dieses Kapitels gewidmet sein.

§ 135. Das Theorem von Lagrange-Dirichlet. Die Theoreme von Ljapunow

Wir wollen uns vor allem mit der genauen Bestimmung dessen befassen, was wir unter einem stabilen Gleichgewicht verstehen. Wir stellen uns ein System vor, das aus den materiellen Punkten $M_1, M_2, \ldots, M_n$ besteht. Wir nehmen an, daß sich dieses System im Gleichgewicht unter der Wirkung angreifender Kräfte befindet. Um die Frage zu entscheiden, ob dieses Gleichgewicht stabil ist oder nicht, wollen wir folgendermaßen verfahren: Wir geben den Punkten des Systems unbedeutende Abweichungen von ihrer Gleichgewichtslage und verleihen ihnen unbedeutende Anfangsgeschwindigkeiten. Nachdem wir auf diese Art den Gleichgewichtszustand des Systems gestört haben, beobachten wir den Charakter der Bewegung, die das System unter der Wirkung der angreifenden Kräfte ausführt. Die Gleichgewichtslage des Systems nennen wir *stabil*, wenn jeder Punkt des Systems sich während der ganzen Zeit, die auf die Störung des Gleichgewichts folgt, so bewegt, daß er in unmittelbarer Nähe seiner Gleichgewichtslage bleibt; im entgegengesetzten Fall heißt die Gleichgewichtslage des Systems *labil*. Wie man sieht, beurteilen wir die Stabilität oder Labilität des Gleichgewichts nach dem Charakter der Bewegung, die das System nach der Störung des Gleichgewichts ausführt.

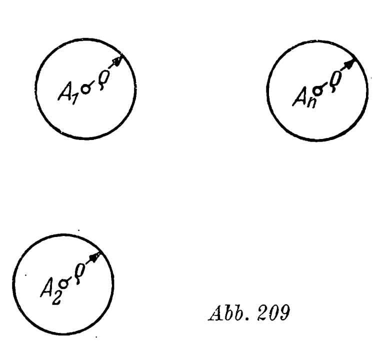


Abb. 209

Die soeben geäußerte Definition der Stabilität des Gleichgewichts kann man auch noch folgendermaßen formulieren: Wir bezeichnen die Gleichgewichtslagen der Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ mit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und beschreiben von diesen Punkten aus als Zentren sphärische Flächen mit dem kleinen Radius ϱ (Abb. 209). Wir geben wieder den Punkten des Systems unbedeutende Abweichungen von ihren Gleichgewichtslagen und verleihen ihnen ebenfalls unbedeutende Anfangsgeschwindigkeiten. Wir nennen die Gleichgewichtslage des Systems in dem Fall *stabil*, wenn *bei hinreichend kleinen Anfangsabweichungen und Anfangsgeschwindigkeiten* die Bewegung des Systems so verläuft, daß jeder Punkt des Systems *während der ganzen Zeit der Bewegung* innerhalb der Kugel bleibt, die seine Gleichgewichtslage umgibt, *ganz gleich, wie klein auch die von uns gewählte Größe des Radius ϱ sein mag.*

Wir wollen nun voraussetzen, daß die Kräfte, unter deren Wirkung sich unser System befindet, ein Potential besitzen und daß alle Zwangsbedingungen des Systems zeitunabhängig sind; ein solches System nennt man *konservativ*. Wir haben bereits im § 125 gesehen, daß diejenigen Lagen eines Systems als konservative Gleichgewichtslagen erscheinen, in denen die potentielle Energie des Systems ein Extremum erreicht. Nun werden wir zeigen, daß die *Gleichgewichtslagen eines konservativen Systems stabil ist, wenn die potentielle Energie des Systems das Minimum erreicht.*

Dieses Theorem wurde von LAGRANGE[1] aufgestellt, dessen Beweisführung jedoch nicht ganz vollständig ist; die erschöpfende Beweisführung des Theorems stammt von DIRICHLET[2].

Wir kehren zur Abbildung 209 zurück und nehmen an, daß in der Gleichgewichtslage $A_1, A_2, \ldots, A_n$ die potentielle Energie unseres Systems ein Minimum erreicht. Das bedeutet, daß die potentielle Energie des Systems in der Lage $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (wir nennen diesen Wert V_a) kleiner ist als in jeder benachbarten Lage. Wir wollen die Werte betrachten, welche die potentielle Energie erhält, wenn sich zumindest einer der Punkte M_i auf der Fläche der Kugel vom Radius ϱ befindet, die den entsprechenden Punkt A_i umgibt. Natürlich sind alle diese Beträge größer als V_a; wir nehmen den kleinsten derselben und bezeichnen ihn mit $V_a + \varepsilon$. Natürlich ist die Größe ε um so kleiner, je kleiner die von uns angenommene Größe des Radius ϱ ist, jedoch ist in jedem Fall $\varepsilon > 0$. Wenn sich auch nur ein Punkt M_i auf der Fläche der entsprechenden Kugel vom Radius ϱ befindet, muß die potentielle Energie des Systems V die Bedingung

$$V \geqq V_a + \varepsilon$$

erfüllen.

Wir erteilen nun den Punkten unseres Systems kleine Anfangsabweichungen von ihren Gleichgewichtslagen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und verleihen ihnen kleine Anfangsgeschwindigkeiten.

Wenn die von uns angenommenen Anfangsabweichungen der Systempunkte kleiner als die Größe ϱ sind, wird sich im Anfangsaugenblick jeder Punkt innerhalb der Kugel befinden, die seine Gleichgewichtslage umgibt.

Wir werden zeigen, daß bei hinreichend kleinen Anfangsabweichungen und Anfangsgeschwindigkeiten die Punkte des Systems auch während der ganzen Zeit der nachfolgenden Bewegung nicht aus den Grenzen der entsprechenden Kugeln heraustreten, ganz gleich, wie klein auch die Größe ϱ sein mag. Auf Grund des soeben Gesagten genügt es zu beweisen, daß während der ganzen Zeit der Bewegung die potentielle Energie des Systems kleiner als $V_a + \varepsilon$ bleiben wird.

Das aber folgt unmittelbar aus dem Gesetz der Energieerhaltung, das, wie wir wissen (siehe § 80), bei der Bewegung eines konservativen Systems Geltung hat. Wir bezeichnen die Werte der kinetischen und der potentiellen Energie eines Systems in einem gewissen Augenblick der Bewegung mit T und V sowie ihre Werte im Anfangsaugenblick der Bewegung mit T_0 und V_0. Nach dem Gesetz der Energieerhaltung gilt:

$$T + V = T_0 + V_0 .$$

---

[1] J. L. Lagrange, „Analytische Mechanik“, Bd. I.

[2] Lejeune-Dirichlet, „Über die Stabilität des Gleichgewichtes“, Journ. f. Math., Bd. 32 (1846), S. 85, oder Werke, Bd. 2, S. 5.

Da $T \geqslant 0$ ist, folgt hieraus, daß die potentielle Energie während der ganzen Zeit der Bewegung die Ungleichung

$$V \leqslant T_0 + V_0$$

befriedigt.

Wir nehmen nun die Anfangsabweichungen so klein an, daß

$$V_0 < V_a + \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Darauf wählen wir die Anfangsgeschwindigkeiten so klein, daß

$$T_0 < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist.

Dann gilt während der ganzen Zeit der Bewegung:

$$V < V_a + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = V_a + \varepsilon .$$

Wir wissen aber, daß in dem Augenblick, in dem auch nur einer der Systempunkte die Oberfläche der ihm entsprechenden Kugel erreicht,

$$V \geqslant V_a + \varepsilon$$

sein muß.

Wie ersichtlich, kann es einen solchen Augenblick nicht geben. Also werden sich die Punkte des Systems während der ganzen Zeit der Bewegung innerhalb der entsprechenden Kugeln befinden, die deren Gleichgewichtslagen umgeben, wobei der Radius ϱ dieser Kugeln beliebig klein angenommen werden kann.

Damit ist die Stabilität der Gleichgewichtslage des Systems bewiesen.

Die Theorie von LAGRANGE-DIRICHLET gibt ein geeignetes Kriterium für die Beurteilung der Stabilität der Gleichgewichtslage eines konservativen Systems. Können wir aber dieses Kriterium auch umgekehrt anwenden? Kann man behaupten, daß alle Gleichgewichtslagen eines konservativen Systems, in denen die potentielle Energie nicht das Minimum erreicht, labil sind?

Die Antwort auf diese Frage — und zwar eine positive Antwort — wurde von A. M. LJAPUNOW[1] gegeben, allerdings mit einem gewissen Vorbehalt. LJAPUNOW zeigte, daß die *Gleichgewichtslage eines konservativen Systems, in der die potentielle Energie des Systems das Minimum nicht erreicht, labil ist, wenn das Fehlen des Minimums bereits durch die Glieder zweiter Ordnung bestimmt wird bei der Entwicklung der potentiellen Energie nach den Potenzen der kleinen Koordinatenzuwüchse.* Durch den letzten Vorbehalt werden solche Fälle von der Betrachtung ausgeschlossen, wo die Entwicklung der potentiellen Energie nach kleinen Koordinatenzuwüchsen keine Glieder zweiter Ordnung enthält (ebenso wie auch die Glieder erster Ordnung) und

[1] A. M. Ljapunow, „Die allgemeine Aufgabe von der Stabilität der Bewegung". A. M. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, М.— Л., 1950.

wo das Vorhandensein oder Fehlen des Minimums durch Glieder höherer Ordnungen in dieser Entwicklung bestimmt wird. Solchen Fällen begegnet man in der Praxis verhältnismäßig selten. Daher hat der erwähnte Vorbehalt vom praktischen Gesichtspunkt aus keine große Bedeutung und schränkt faktisch die Allgemeingültigkeit des Theorems von LJAPUNOW wenig ein.

Als Beispiel kehren wir nochmals zum Pallographen von SCHLICK zurück. Im §130 erhielten wir den Ausdruck (7) der potentiellen Energie des Apparates mit einer Genauigkeit bis zu den kleinen Größen zweiter Ordnung. Auf Grund dieser Gleichung hat die Zerlegung der potentiellen Energie nach Potenzen von φ die Form

$$V = P(b-c) + \frac{1}{2}\,\frac{P}{b}\left[b\,c - (a-b)^2\right]\varphi^2 + \cdots,$$

wobei die Auslassungspunkte die Glieder der dritten und der höheren Ordnungen ersetzen.

Bei $\varphi = 0$ haben wir die Gleichgewichtslage des Apparates; wir wollen die Stabilität dieser Gleichgewichtslage untersuchen. Aus der soeben aufgeschriebenen Gleichung sehen wir: Wenn

$$b\,c - (a-b)^2 > 0$$

ist, hat die potentielle Energie bei $\varphi = 0$ das Minimum, und folglich ist das Gleichgewicht nach dem Theorem von LAGRANGE-DIRICHLET stabil.

Wenn jedoch

$$b\,c - (a-b)^2 < 0$$

ist, haben wir bei $\varphi = 0$ das Maximum der potentiellen Energie; da dabei das Fehlen des Minimums durch das Glied zweiter Ordnung in der Entwicklung der potentiellen Energie bedingt ist, so ist in diesem Fall das Gleichgewicht nach dem Theorem von LJAPUNOW labil.

Zweifelhaft bleibt nur der dazwischenliegende Fall

$$b\,c - (a-b)^2 = 0,$$

wo das Glied zweiter Ordnung in der Entwicklung der potentiellen Energie verschwindet. Dieser Fall erfordert eine besondere Untersuchung. Wir erwähnen, daß in ähnlichen Fällen die Frage häufig mit Hilfe des folgenden, gleichfalls von A. M. LJAPUNOW[1] stammenden Theorems gelöst werden kann: *Das Gleichgewicht ist labil, wenn die potentielle Energie in der Gleichgewichtslage das Maximum hat, wobei dieses Maximum durch Glieder niederer* (aber nicht unbedingt der zweiten) *Ordnung in der Entwicklung der potentiellen Energie bedingt ist*[2].

---

[1] A. M. Ljapunow, l. c.

[2] Es versteht sich von selbst, daß die Glieder der Null-Ordnung (d. h. die konstanten Glieder) in der Entwicklung der potentiellen Energie nicht in Betracht kommen.

Wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen, daß in unserem Beispiel die bis zu den Gliedern vierter Ordnung geführte Entwicklung der potentiellen Energie folgende Form hat:

$$V = P(b-c) + \frac{P}{2b}\left[b\,c - (a-b)^2\right]\varphi^2 - \frac{P}{24\,b}\left[b\,c + 2\,b\,(a-b) + \frac{(a-b)^4}{b^2}\right]\varphi^4 + \cdots.$$

Nehmen wir hier $b\,c = (a-b)^2$ an, so erhalten wir

$$V = \frac{P\,a\,(2\,b-a)}{b} - \frac{P\,a\,(a-b)}{24\,b^3}(a^2 - 3\,a\,b + 4\,b^2)\,\varphi^4 + \cdots \qquad (1)$$

Bemerken wir, daß

$$a^2 - 3\,a\,b + 4\,b^2 > 0$$

ist und beachten wir, daß gemäß der Konstruktion des Apparates (siehe Abb. 207) $b < a$ ist, so schließen wir auf Grund der Gl. (1), daß bei $\varphi = 0$ die potentielle Energie das Maximum besitzt. Da dieses Maximum durch das Glied der niedrigsten Ordnung (das konstante Glied nicht mitgerechnet) in der Entwicklung der potentiellen Energie bedingt ist, so erweist sich das Gleichgewicht unseres Apparates in dem Zwischenfall $b\,c = (a-b)^2$ nach dem zweiten Theorem von LJAPUNOW als labil.

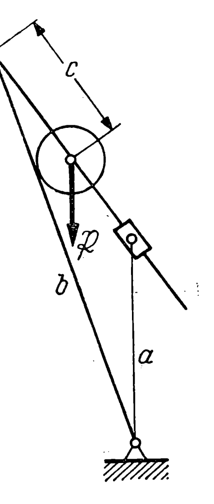


Abb. 210

Wenn wir die Konstruktion des Apparates so abändern, daß $b > a$ ist (Abb. 210), dann gelten die von uns gezogenen Schlußfolgerungen über die Stabilität des Gleichgewichts in den Fällen $b\,c - (a-b)^2 > 0$ und $b\,c - (a-b)^2 < 0$ ebenfalls; in dem dazwischenliegenden Fall $b\,c = (a-b)^2$ aber wird die potentielle Energie bei $\varphi = 0$, wie aus der Gl. (1) ersichtlich ist, schon nicht mehr ein Maximum, sondern ein Minimum haben. Folglich wird nach dem Theorem von LAGRANGE-DIRICHLET das Gleichgewicht in dem Zwischenfall bei einer solchen Konstruktion des Apparates stabil sein.

Abschließend unterstreichen wir nochmals, daß sowohl das Theorem von LAGRANGE-DIRICHLET als auch das Theorem von LJAPUNOW sich auf den Fall des Gleichgewichts eines konservativen Systems beziehen. Die Frage von der Stabilität des Gleichgewichts eines nichtkonservativen Systems muß gelöst werden, indem in jedem gegebenen Fall der Charakter derjenigen Bewegung des Systems untersucht wird, die auf die Störung seines Gleichgewichts folgt. Gewöhnlich benutzt man dabei die Theorie der kleinen Schwingungen; manchmal wird diese Methode auch im Fall eines konservativen Systems angewandt (wie wir es im § 130 in bezug auf den Pallographen von SCHLICK getan haben).

KAPITEL XXIII

DIE KLEINEN SCHWINGUNGEN DES SYSTEMS MIT EINEM FREIHEITSGRAD

§ 136. Die Eigenschwingungen

Wir wollen uns nun dem Studium der kleinen Schwingungen zuwenden, die von einem System um seine stabile Gleichgewichtslage ausgeführt werden. Wir beginnen mit der Betrachtung der Schwingungen eines Systems, das einen Freiheitsgrad besitzt. In diesem Paragraphen werden wir die Eigenschwingungen oder freien Schwingungen eines solchen Systems betrachten.

Wir stellen uns ein System vor, daß aus den materiellen Punkten $M_1, M_2, \ldots, M_n$ besteht (Abb. 211). Wir setzen voraus, daß dieses System konservativ ist, d. h., daß alle Bindungen des Systems zeitunabhängig sind, und daß die angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ ein Potential besitzen. Wir nehmen ferner an, daß unser System nur einen Freiheitsgrad besitzt; die verallgemeinerte Koordinate des Systems bezeichnen wir mit q.

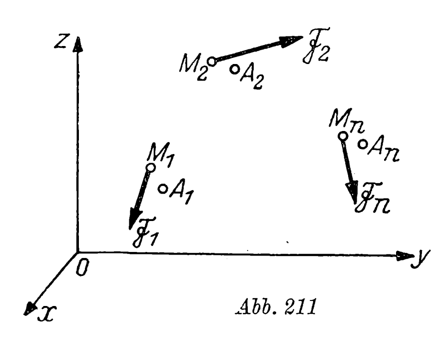


Abb. 211

Wir bezeichnen die Gleichgewichtslage des Systems mit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und setzen voraus, daß diese Gleichgewichtslage stabil ist. Wenn wir das Gleichgewicht stören, indem wir dem System eine unbedeutende Auslenkung von seiner Gleichgewichtslage geben, den Punkten des Systems unbedeutende Anfangsgeschwindigkeiten erteilen und darauf das System der Wirkung der angreifenden Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ überlassen, dann wird jeder Punkt M_i während der nachfolgenden Bewegung in der Nähe seiner Gleichgewichtslage A_i bleiben. Die Aufgabe, die wir uns nun stellen, besteht in der Untersuchung dieser kleinen Schwingungen des Systems um seine Gleichgewichtslage.

Zur Lösung dieser Aufgabe bedienen wir uns der Methode von LAGRANGE. Wir stellen die Differentialgleichung der kleinen Schwingungen des Systems in der verallgemeinerten Koordinate q auf; die Integration dieser Gleichung wird uns die Antwort auf die gestellte Frage erteilen.

Zur Vereinfachung der weiteren Berechnungen werden wir annehmen, daß in der Gleichgewichtslage $q = 0$ ist (was immer möglich ist, wenn man den Koordinatenanfang in die Gleichgewichtslage legt). In diesem Fall ist die Koordinate q in den Lagen des Systems, die nahe der Gleichgewichtslage sind, klein. Im weiteren werden wir die Koordinate q und auch ihre Ableitung $\dot{q}$ als kleine Größen erster Ordnung betrachten.

Wir wollen nun eine wichtige Bemerkung hinsichtlich des Genauigkeitsgrades machen, mit dem wir die weiteren Berechnungen durchführen werden. Im weiteren werden wir die Differentialgleichungen der kleinen Schwingungen mit einer Genauigkeit bis zu den kleinen Gliedern erster Ordnung (einschließlich) aufstellen. Durch die Vernachlässigung der kleinen Größen höherer Ordnungen tragen wir natürlich einen gewissen Fehler in unsere Resultate hinein; doch wird dieser Fehler durch die ungeheure Vereinfachung der Behandlung aufgewogen, die durch die Einführung von linearisierten Differentialgleichungen erreicht wird.

Wir wollen also die Differentialgleichung der Bewegung unseres Systems mit der Koordinate q aufstellen; diese Gleichung hat die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}, \tag{1}$$

wobei T die kinetische Energie des Systems und V seine potentielle Energie ist.

Im § 130 wurde bereits gesagt, daß man bei der Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung bei der kinetischen Energie mit einer Genauigkeit bis zu den kleinen Größen erster Ordnung und bei der potentiellen Energie mit einer Genauigkeit bis zu den kleinen Größen zweiter Ordnung arbeiten muß. Wir beginnen mit der Berechnung der kinetischen Energie T.

Im § 128 hatten wir die Gl. (2) für die kinetische Energie des Systems, unter Verwendung der verallgemeinerten Koordinaten und verallgemeinerten Geschwindigkeiten aufgestellt; diese Gleichung wurde unter der Voraussetzung eines zeitunabhängigen Bindungen unterworfenen Systems gewonnen. Wenden wir diese Gleichung auf unseren Fall eines Systems mit einem Freiheitsgrade an, so gilt

$$T = \frac{1}{2} A \dot{q}^2 .$$

Hier ist die Größe A eine Funktion der Koordinate q:

$$A = A(q).$$

Wenn die Koordinate q die Verrückung irgendeines Punktes M_0 unseres Systems bedeutet, ist die verallgemeinerte Geschwindigkeit $\dot{q}$ die lineare Geschwindigkeit des Punktes M_0. In diesem Falle (wie aus dem soeben aufgestellten Ausdruck der kinetischen Energie T ersichtlich) hat die Größe A die Dimension einer Masse; diese Größe erhält den Namen *der auf den Punkt M_0 reduzierten Masse des Systems.*

Wenn aber die Koordinate q der Drehwinkel um eine Achse z_0 ist (so daß $\dot{q}$ die Winkelgeschwindigkeit der entsprechenden Drehung ist), dann hat die Größe A die Dimension eines Trägheitsmomentes und heißt *das auf die Achse z_0 reduzierte Trägheitsmoment des Systems.* Wir unterstreichen nochmals, daß sowohl die reduzierte Masse als auch das reduzierte Trägheitsmoment keine konstanten Größen sind. Sie sind Funktionen der Koordinate q, sie verändern sich mit der Veränderung der Lage des Systems.

Wir erwähnen, daß $\dot{q}^2$ eine kleine Größe zweiter Ordnung ist. Da wir im Ausdruck der kinetischen Energie T nur das Glied zweiter Ordnung behalten wollen, zerlegen wir die Funktion $A(q)$ nach Potenzen der kleinen Größe q; es gilt:

$$A(q) = A(0) + \cdots,$$

wobei die Auslassungspunkte die Glieder ersetzen, die q in erster und höheren Potenzen enthalten. Alle diese Glieder werden nach der Multiplikation mit $\dot{q}^2$ zu kleinen Größen dritter und höherer Ordnungen. Vernachlässigen wir diese Größen und bezeichnen der Kürze halber $A(0) = a$, so erhalten wir:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2 \ldots, \tag{2}$$

wobei a eine konstante Größe ist. Da die kinetische Energie eine positive Größe ist, schließen wir, daß $a > 0$ ist.

Wir gehen zur Berechnung der potentiellen Energie V über. Diese Größe ist eine Funktion der Koordinate q:

$$V = V(q).$$

Entwickeln wir diese Funktion in eine Reihe nach Potenzen der Koordinate q, so wird nach dem Ansatz von TAYLOR:

$$V(q) = V_0 + \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\right)_0 q + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}q^2}\right)_0 q^2 + \cdots,$$

wobei V_0, $\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\right)_0$, $\left(\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}q^2}\right)_0$ ... die Werte der Funktion V und ihrer Ableitungen an der Stelle $q = 0$ sind, d. h. in der Gleichgewichtslage des Systems. Wir haben aber im § 125 gesehen, daß in der Gleichgewichtslage die ersten Ableitungen der potentiellen Energie nach den verallgemeinerten Koordinaten verschwindet; folglich gilt

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\right)_0 = 0.$$

Wenn wir also

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}q^2}\right)_0 = c$$

setzen und im Ausdruck der potentiellen Energie die Glieder dritter und höherer Ordnungen vernachlässigen, erhalten wir:

$$V = V_a + \frac{1}{2} c q^2, \tag{3}$$

wobei c eine konstante Größe ist.

Wir hatten vorausgesetzt, daß die Gleichgewichtslage unseres Systems bei $q = 0$ stabil ist. Gemäß dem Theorem von LAGRANGE-DIRICHLET setzen wir voraus, daß

die potentielle Energie V bei $q = 0$ das Minimum hat. Das aber verlangt, daß c größer als Null ist (den Fall $c = 0$ schließen wir aus der Betrachtung aus).

Wir wollen nun die Gln. (2) und (3) in die Gl. (1) einsetzen. Nachdem wir die notwendige Differentiation vorgenommen haben, erhalten wir:

$$a\ddot{q} = -cq.$$

Erinnern wir uns nochmals daran, daß $a > 0$ und $c > 0$ ist, und setzen wir zur Verkürzung

$$\frac{c}{a} = \lambda^2, \tag{4}$$

wobei λ eine konstante reelle Zahl ist, so erhalten wir endgültig

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = 0. \tag{5}$$

Dies ist die Differentialgleichung der kleinen Schwingungen eines Systems mit einem Freiheitsgrade.

Wie man sieht, unterscheidet sich diese Gleichung nicht von der uns bekannten Differentialgleichung der freien Schwingungen eines materiellen Punktes (siehe Kapitel VII). Wir stellen die charakteristische Gleichung

$$k^2 + \lambda^2 = 0$$

auf und finden ihre Wurzeln

$$k = \pm i\lambda;$$

hieraus ergibt sich die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung

$$q = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t, \tag{6}$$

wobei C_1 und C_2 willkürliche Konstanten sind.

Wir finden eine andere Form dieser allgemeinen Lösung, wenn wir

$$C_1 = \alpha \sin \beta, \qquad C_2 = \alpha \cos \beta \tag{7}$$

annehmen, wobei α und β zwei neue willkürliche Konstanten sind.

Setzen wir diese Ausdrücke für C_1 und C_2 in die Gl. (6) ein, so erhalten wir

$$q = \alpha \sin(\lambda t + \beta). \tag{8}$$

Die willkürlichen Konstanten C_1 und C_2 werden aus den Anfangsbedingungen der Bewegung eines Systems bestimmt. Wir bezeichnen den ursprünglichen Wert der verallgemeinerten Koordinate und die ursprüngliche verallgemeinerte Geschwindigkeit mit q_0, bzw. $\dot{q}_0$. Differenzieren wir die Gleichung (6), so erhalten wir

$$\dot{q} = -C_1 \lambda \sin \lambda t + C_2 \lambda \cos \lambda t.$$

Setzen wir $t = 0$, $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$ in diese Gleichung und Gl. (6) ein, so erhalten wir

$$C_1 = q_0, \qquad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\lambda}.$$

Die Substitution dieser Werte für die willkürlichen Konstanten in Gl. (6) führt zu

$$q = q_0 \cos \lambda t + \frac{\dot{q}_0}{\lambda} \sin \lambda t. \tag{9}$$

Wir bemerken, daß aus den Gln. (7)

$$\alpha = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

folgt, woraus wir für die Konstante α den Ausdruck

$$\alpha = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{\lambda^2}} \tag{10}$$

erhalten.

Also hat uns die Integration der Gl. (5) den Ausdruck der verallgemeinerten Koordinate q als Funktion der Zeit gebracht.

Um eine deutliche Vorstellung von der Bewegung unseres Systems zu bekommen, gehen wir nun zu der Betrachtung der Bewegung jedes einzelnen materiellen Punktes M_i über, der zum System gehört.

Wir wählen die Koordinatenachsen x, y und z (Abb. 211) und bezeichnen die kartesischen Koordinaten des Punktes M_i, die auf diese Achsen bezogen sind, mit x_i, y_i und z_i; die Koordinaten des Punktes A_i, d. h. der Gleichgewichtslage des Punktes M_i, bezeichnen wir mit x_i^0, y_i^0, z_i^0. Wir führen die Verschiebung des Punktes M_i aus seiner Gleichgewichtslage in die Betrachtung ein. Bezeichnen wir die Komponenten dieser Verschiebung auf den Achsen x, y und z mit u_i, v_i, w_i (wir werden diese Größen die *Verrückungen* des Punktes M_i *auf den Achsen* x, y, z nennen), so gilt:

$$u_i = x_i - x_i^0, \qquad v_i = y_i - y_i^0, \qquad w_i = z_i - z_i^0. \tag{11}$$

Wir wissen bereits (siehe § 123), daß die Koordinaten x_i, y_i und z_i als Funktionen der verallgemeinerten Koordinate q ausgedrückt werden können:

$$x_i = x_i(q), \qquad y_i = y_i(q), \qquad z_i = z_i(q).$$

Wir entwickeln diese Funktionen nach Potenzen der kleinen Größe q. Behalten wir im Auge, daß die konstanten Glieder in diesen Entwicklungen nichts anderes sind als die Werte der Koordinaten x_i, y_i und z_i an der Stelle $q = 0$, d. h. in der Gleichgewichtslage, so erhalten wir:

$$x_i = x_i^0 + L^{(i)} q + \cdots,$$

$$y_i = y_i^0 + M^{(i)} q + \cdots,$$

$$z_i = z_i^0 + N^{(i)} q + \cdots,$$

wobei $L^{(i)}$, $M^{(i)}$, $N^{(i)}$ konstante Größen sind; die Auslassungspunkte ersetzen die Glieder zweiter und höherer Potenzen. Entsprechend dem bereits angenommenen Genauigkeitsgrade unserer Berechnungen werden wir diese Glieder vernachlässigen. Führen wir die Bezeichnungen (11) ein, so gilt

$$u_i = L^{(i)} q, \qquad v_i = M^{(i)} q, \qquad w_i = N^{(i)} q. \tag{12}$$

Die Verrückungen der Systempunkte auf den Koordinatenachsen werden auf diese Weise durch die verallgemeinerte Koordinate q ausgedrückt. Um die Bewegungsgleichungen des Punktes M_i in kartesischen Koordinaten zu erhalten, ist noch in diesen Gleichungen anstatt q der Ausdruck (8) zu substituieren; endgültig erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} u_i &= L^{(i)} \alpha \sin(\lambda t + \beta), \\ v_i &= M^{(i)} \alpha \sin(\lambda t + \beta), \\ w_i &= N^{(i)} \alpha \sin(\lambda t + \beta). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Dies sind die Gleichungen der *Eigenschwingungen* eines Systems in *kartesischen Koordinaten.*

Aus diesen Gleichungen können wir folgende Schlußfolgerungen ziehen, welche die Eigenschwingungen eines Systems mit einem Freiheitsgrade charakterisieren:

1. *Die Eigenschwingungen eines Systems sind harmonische Schwingungen.*

2. Wenn wir die Zeit aus den Gln. (13) eliminieren, erhalten wir

$$\frac{u_i}{L^{(i)}} = \frac{v_i}{M^{(i)}} = \frac{w_i}{N^{(i)}}$$

oder

$$\frac{x_i - x_i^0}{L^{(i)}} = \frac{y_i - y_i^0}{M^{(i)}} = \frac{z_i - z_i^0}{N^{(i)}}.$$

Das sind die Gleichungen der Geraden, die durch den Punkt A_i gehen, d. h. durch die Gleichgewichtslage des Punktes M_i. *Jeder Punkt des Systems führt also eine geradlinige Bewegung aus, und zwar auf der Geraden, die durch seine Gleichgewichtslage geht.*

3. Die Frequenz der Eigenschwingungen λ ist durch

$$\lambda^2 = \frac{c}{a} \tag{4}$$

bestimmt.

Diese Frequenz λ werden wir *Eigenfrequenz* des Systems nennen. Wie man sieht, hängt die *Eigenfrequenz eines Systems nicht von den Anfangsbedingungen ab.*

Bezeichnen wir die Schwingungsdauer der Eigenschwingungen des Systems mit τ, so gilt

$$\tau = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{14}$$

Wie man sieht, hängt auch τ nicht von den Anfangsbedingungen ab.

4. Die Amplituden der Schwingungen des Punktes M_i auf den Achsen x_i, y_i und z_i sind gleich $L^{(i)}\alpha$ bzw. $M^{(i)}\alpha$ und $N^{(i)}\alpha$; die Anfangsphase ist gleich β. Da α und β willkürliche Konstanten sind, die von den Anfangsbedingungen der Bewegung abhängen, folgern wir, daß *die Schwingungsamplituden der Systempunkte und auch die Anfangsphase von den Anfangsbedingungen abhängen.*

Die Anfangsbedingungen beeinflussen die Amplituden nur durch den Faktor α, der für alle Systempunkte gemeinsam ist. Hieraus folgt, daß das *Verhältnis der Amplituden der verschiedenen Systempunkte nicht von den Anfangsbedingungen abhängt.* Also hängt auch die Schwingungsform des Systems nicht von den Anfangsbedingungen ab, da sie nur durch die Amplitudenverhältnisse der verschiedenen Systempunkte bestimmt wird.

5. Es ist sehr wichtig zu bemerken, daß die Phase $\lambda t + \beta$ eine für alle Systempunkte gemeinsame ist. Also *befinden sich alle Systempunkte stets in gleicher Phase.* Das bedeutet, daß im Schwingungsablauf alle Systempunkte *gleichzeitig* durch ihre Gleichgewichtslagen gehen (in den Augenblicken, in denen $\sin(\lambda t + \beta) = 0$ ist) und *gleichzeitig* ihre maximale Abweichung von den Gleichgewichtslagen erreichen (in den Augenblicken, in denen $\sin(\lambda t + \beta) = \pm 1$ ist).

Zum Abschluß unterstreichen wir nochmals, daß alle soeben aufgezählten Eigenschaften der Eigenschwingungen eines Systems mit einem Freiheitsgrade aus linearisierten Gleichungen abgelesen wurden; daher muß man die von uns gewonnenen Eigenschaften als annähernde behandeln. Die Abweichung der wahren Bewegung des Systems von den durch uns beschriebenen linearen Gleichungen ist um so kleiner, je kleiner die Schwingungsamplitude des Systems ist.

§ 137. Die Schwingungen eines Doppelpendels

Wir wollen die im vorhergehenden Paragraphen dargelegte Theorie an einigen Beispielen erläutern.

Im Kapitel VII wurde von uns bereits eine Reihe einfachster Beispiele für Eigenschwingungen eines Systems mit einem Freiheitsgrad betrachtet. Ein etwas komplizierteres Beispiel hatten wir im § 130 — die Schwingungen des Pendels eines Pallographen von Schlick. Im vorliegenden Paragraphen werden wir uns mit noch einer Konstruktion eines zusammengesetzten Pendels beschäftigen, die es möglich macht, Schwingungen von beliebig kleiner Frequenz zu gewinnen.

Der Pendelstab AB ist in den Punkten B und C mit den Schwenkhebeln BO_1 und CO_2 gelenkig verbunden, die sich um die festen Achsen O_1 bzw. O_2 drehen (Abb. 212). Am Ende A des Stabes ist die Masse (Zylinder) M befestigt. Wir führen die Bezeichnungen $AC = a$, $CB = b$, $BO_1 = c$ und $CO_2 = l$ ein. In der Gleichgewichtslage des Pendels sind der Stab AB und der Schwenkhebel CO_2 vertikal, der Schwenkhebel BO_1 dagegen liegt horizontal. Dazu ist augenscheinlich erforderlich, daß die Achse O_1 von der Achse O_2 auf der Horizontalen einen Abstand von der Größe c, auf der Vertikalen dagegen einen Abstand von der Größe $h = b + l$ hat. Wir wollen die Stabilität des Gleichgewichts des Pendels untersuchen und seine Eigenfrequenz ermitteln.

Unser System hat einen Freiheitsgrad; als verallgemeinerte Koordinate wählen wir den Winkel φ, der durch den Stab AB mit der Vertikalen gebildet wird. Wir führen die Hilfswinkel α und β ein, die von den Schwenkhebeln BO_1 und CO_2 mit der Horizontalen bzw. der Vertikalen gebildet werden. Diese überzähligen Koordinaten α und β sind mit der Grundkoordinate φ durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} c\cos\alpha + b\sin\varphi - l\sin\beta &= c, \\ c\sin\alpha + b\cos\varphi + l\cos\beta &= h \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

verbunden, die wir leicht gewinnen, wenn wir das Polygon O_1BCO_2 auf die Horizontale bzw. auf die Vertikale projizieren.

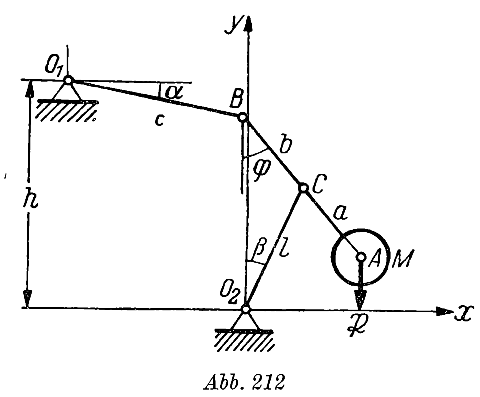


Abb. 212

In der Gleichgewichtslage sind die Winkel φ, α und β gleich Null. In einer der Gleichgewichtslage nahen Lage erscheinen diese Winkel als kleine Größen; wir nehmen den Winkel φ als kleine Größe erster Ordnung an.

Um die Frage der Stabilität der Gleichgewichtslage des Pendels klarzustellen, berechnen wir die potentielle Energie V unseres Systems als Funktion der Koordinate φ mit einer Genauigkeit bis zu den kleinen Größen zweiter Ordnung.

Wir wählen die Koordinatenachsen x und y so, wie in der Abbildung 212 angegeben ist. Bezeichnen wir das Gewicht des Zylinders M mit P, die kartesischen Koordinaten seines Schwerpunktes A mit x und y (wobei wir das Gewicht des Stabes AB und der beiden Schwenkhebel vernachlässigen), so gilt

$$V = Py. \tag{2}$$

Ferner ist

$$y = l\cos\beta - a\cos\varphi. \tag{3}$$

Um die Größenordnung des Winkels β festzustellen, greifen wir zu den Gln. (1) Setzen wir in diesen Gleichungen

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \qquad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \qquad \cos\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2},$$

$$\sin\varphi = \varphi, \qquad \sin\alpha = \alpha, \qquad \sin\beta = \beta$$

und beachten, daß $h = b + l$ ist, so finden wir

$$b\varphi - l\beta - \frac{1}{2}c\alpha^2 = 0,$$

$$c\alpha - \frac{1}{2}b\varphi^2 - \frac{1}{2}l\beta^2 = 0$$

Die zweite dieser Gleichungen zeigt, daß α eine kleine Größe zweiter Ordnung ist. Vernachlässigen wir auf dieser Grundlage in der ersten Gleichung das Glied, das α^2 enthält (als kleine Größe vierter Ordnung), so erhalten wir mit einer Genauigkeit bis zu den kleinen Größen zweiter Ordnung (einschließlich):

$$b\,\varphi - l\,\beta = 0,$$

woraus

$$\beta = \frac{b}{l}\,\varphi \tag{4}$$

folgt.

Also ist β eine kleine Größe erster Ordnung.

Wollen wir die Koordinate y mit einer Genauigkeit bis zu kleinen Größen zweiter Ordnung berechnen, so setzen wir nun in der Gl. (3)

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \qquad \cos\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2}.$$

Wir erhalten dann

$$y = l - a + \frac{1}{2}\,a\,\varphi^2 - \frac{1}{2}\,l\,\beta^2$$

oder, wenn wir anstatt β seine Abhängigkeit von φ nach (4) einsetzen,

$$y = l - a + \frac{1}{2}\,\frac{a\,l - b^2}{l}\,\varphi^2. \tag{5}$$

Führen wir diesen Ausdruck in die Gl. (2) ein, so erhalten wir endgültig:

$$V = P\,(l - a) + \frac{P}{2\,l}\,(a\,l - b^2)\,\varphi^2. \tag{6}$$

Hieraus ersieht man, daß die potentielle Energie V in der Gleichgewichtslage (d. h. an der Stelle $\varphi = 0$) ein Minimum besitzt, wenn $a l - b^2 > 0$ ist. Wenn jedoch $a l - b^2 < 0$ ist, entspricht der Gleichgewichtslage ein Maximum der potentiellen Energie. Auf Grund des Theorems von LAGRANGE-DIRICHLET schließen wir, daß als Stabilitätsbedingung der Gleichgewichtslage unseres Pendels die Ungleichung

$$a\,l - b^2 > 0$$

gilt.

Wir wollen nun annehmen, diese Bedingung sei erfüllt und wollen die Eigenfrequenz des Pendels berechnen. Dazu stellen wir die Differentialgleichung der Schwingungen des Pendels nach der Methode von LAGRANGE auf. Die potentielle Energie V ist bereits errechnet; es bleibt uns folglich noch übrig, die kinetische Energie T unseres Systems zu berechnen.

Berücksichtigen wir nur die kinetische Energie des Zylinders M (und vernachlässigen die Massen aller Stäbe), so erhalten wir:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J}{2}\dot{\varphi}^2,$$

wobei $m = \frac{P}{g}$ die Masse des Zylinders ist, J sein Trägheitsmoment in bezug auf die Achse A und x und y die Koordinaten des Schwerpunktes des Zylinders sind.

Die Koordinate y wurde bereits ermittelt; nun muß nur noch die Koordinate x berechnet werden. Greifen wir auf die Abbildung 212 zurück, so gilt:

$$x = l \sin\beta + a \sin\varphi .$$

Hieraus erhalten wir mit einer Genauigkeit bis zu den Größen zweiter Ordnung:

$$x \doteq l\beta + a\varphi$$

oder auf Grund der Gleichung (4)

$$x = (a + b)\varphi . \tag{7}$$

Durch Differentiation der Gln. (5) und (7) finden wir:

$$\dot{x} = (a + b)\dot{\varphi},$$

$$\dot{y} = \frac{a l - b^2}{1}\varphi\dot{\varphi} .$$

Wie man sieht, ist die Ableitung $\dot{y}$ eine kleine Größe zweiter Ordnung. Wenn wir daher im Ausdruck der kinetischen Energie T das Glied $\dot{y}^2$ (als kleine Größe vierter Ordnung) vernachlässigen, erhalten wir:

$$T = \frac{1}{2}\left[m(a + b)^2 + J\right]\dot{\varphi}^2 .$$

Setzen wir noch

$$J = m r_I^2,$$

wobei r_I der Trägheitsradius der Masse M in bezug auf die A-Achse ist, so finden wir endgültig:

$$T = \frac{m}{2}\left[(a + b)^2 + r_I^2\right]\dot{\varphi}^2 . \tag{8}$$

Diese Ausdrücke (6) und (8) der potentiellen Energie V bzw. der kinetischen Energie T differenzieren wir und erhalten so nach LAGRANGE die Differentialgleichung der kleinen Schwingungen unseres Pendels:

$$m\left[(a + b)^2 + r_I^2\right]\ddot{\varphi} = -\frac{P}{l}(a l - l^2)\varphi .$$

Setzen wir

$$\lambda^2 = \frac{g(a\,l - b^2)}{l\left[(a+b)^2 + r_I^2\right]}, \tag{9}$$

so erhält obige Gleichung die Form

$$\ddot{\varphi} + \lambda^2 \varphi = 0.$$

Die Größe λ, die durch die Gl. (9) bestimmt wird, ist die Eigenfrequenz des Apparates. Wie man sieht, kann man diese Frequenz beliebig verändern, wenn man über die Längen a, b und l verfügt.

§ 138. Die Schwingungen einer Masse an einem elastischen Seil

Im vorhergehenden Paragraphen benutzten wir zur Aufstellung der Differentialgleichung der Bewegung die Methode von LAGRANGE. In einfacheren Fällen kann sich diese Methode als zu umfangreich erweisen. Natürlich wählt man zur Aufstellung der Differentialgleichung kleiner Schwingungen in jedem gegebenen Fall die Methode, die am schnellsten zum Ziele führt.

Abb. 213

Wir wollen nun die Eigenschwingungen der Masse M betrachten, die an einem elastischen Seil am festen Punkt A aufgehängt ist (Abb. 213). Diese elementare Aufgabe haben wir bereits im § 32 gelöst; an Stelle eines elastischen Seils hatten wir dort eine Schraubenfeder, was dem Wesen der Sache nach das gleiche ist. Es sei $AB = l$ die Länge des Seiles im ungedehnten Zustande, $BO = f$ die statische Verlängerung des Seiles (so daß O die Gleichgewichtslage der Masse M ist) und $OM = x$ die Abweichung der Masse von der Gleichgewichtslage in einem gewissen Augenblick während seiner Schwingungen.

Wenn wir die Masse des Seiles vernachlässigen, erhalten wir leicht die Differentialgleichung der Bewegung der Masse M, wobei wir diese Masse als einen materiellen Punkt behandeln. Richten wir die x-Achse senkrecht nach unten (in Richtung der Verrückungen x) und bezeichnen die Größe der Masse mit m, ihr Gewicht mit P, die elastische Reaktion des Seiles mit $\mathfrak{F}$, so erhalten wir die Differentialgleichung der Bewegung der Masse in der Projektion auf die x-Achse:

$$m\ddot{x} = P - F.$$

Aus der Elastizitätstheorie ist bekannt, daß

$$F = \frac{ES}{l}(f + x)$$

ist, wobei E der Elastizitätsmodul des Seilmaterials und S die Fläche seines Querschnittes ist. Setzen wir diesen Ausdruck für F in die vorhergehende Gleichung ein und bezeichnen der Kürze halber

$$\frac{ES}{l} = c,$$

so erhalten wir:

$$m\ddot{x} = P - c(f + x).$$

Wir bemerken nun, daß nach der Gleichgewichtsbedingung

$$P = cf$$

ist.

Damit folgt:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \tag{1}$$

woraus wir für die Frequenz λ der Eigenschwingungen der Last die elementare Formel

$$\lambda^2 = \frac{c}{m} \tag{2}$$

erhalten.

Es ist leicht nachzuprüfen, daß auch die Methode von LAGRANGE zu demselben Resultat führt. Für die kinetische Energie T gilt im gegebenen Fall der einfache Ausdruck

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}. \tag{3}$$

Die potentielle Energie V setzt sich aus der potentiellen Energie der Deformation des gedehnten Seiles und der potentiellen Energie der gehobenen Masse zusammen. Nehmen wir die potentielle Energie des Systems in derjenigen Lage, in der sich die Masse im Punkte B befindet (und folglich das Seil nicht gedehnt ist), als Null an, so ist

$$V = \frac{1}{2}c(f + x)^2 - P(f + x) = \frac{1}{2}cf^2 - Pf + (cf - P)x + \frac{1}{2}cx^2. \tag{4}$$

In der Gleichgewichtslage (d. h. an der Stelle $x = 0$) muß $\frac{dV}{dx} = 0$ sein. Hieraus ergibt sich aufs neue die Gleichgewichtsbedingung

$$cf = P.$$

Endgültig folgt:

$$V = \frac{1}{2}c(x^2 - f^2).$$

Haben wir auf diese Art die Ausdrücke für die kinetische Energie T und die potentielle Energie V gefunden und x als verallgemeinerte Koordinate betrachtet, so ergibt sich bei Anwendung der Regel von LAGRANGE erneut die Gleichung

$$m\ddot{x} + cx = 0. \tag{1}$$

Wir erhielten die Gl. (2) für die Eigenfrequenz λ, indem wir die Masse des Seiles, an dem die Masse aufgehängt ist, vernachlässigten. In Wirklichkeit jedoch besitzt das Seil eine gewisse Masse, die als Ganzes an der Bewegung des Systems teilnimmt. Wir wollen sehen, wie die Masse des Seiles auf die Eigenfrequenz λ einwirkt. Im § 134 wurde bereits darauf hingewiesen, daß jedes System, in dem sich deformierbare Körper befinden, eine unendliche Anzahl von Freiheitsgraden besitzt. So erscheint auch im gegebenen Fall das aus der Last und dem elastischen Seil bestehende System, streng genommen, als ein System mit einer unendlichen Anzahl von Freiheitsgraden. Ein solches System (wie das in der Theorie der elastischen Schwingungen aufgezeigt wird) besitzt nicht mehr eine Eigenfrequenz, sondern eine unendliche Anzahl von Eigenfrequenzen. Wenn jedoch die Masse des Seiles klein im Vergleich zu der Masse der Last ist, wird eine dieser Frequenzen nahe der Frequenz sein, die durch

$$\lambda^2 = \frac{c}{m} \tag{2}$$

bestimmt wird; alle übrigen Frequenzen aber werden sehr hoch im Vergleich zu dieser sein. Wenn wir alle diese hohen und keine praktische Bedeutung besitzenden Frequenzen vernachlässigen und unsere Aufgabe auf die Anbringung einer Korrektur in Gl. (2) bezüglich des Einflusses der Masse des Seiles beschränken, können wir die gestellte Frage auf folgende einfache Weise lösen.

Wir stellen uns ein Seil AB im ungedehnten Zustande vor und wählen irgendeinen Schnitt des Seiles im Abstand ξ vom Ende A (Abb. 213). Bei der Dehnung des Seiles erhält jeder seiner Schnitte eine gewisse Verrückung auf der x-Achse, die wir mit dem Buchstaben u bezeichnen wollen; dabei erhalten die verschiedenen Schnitte, allgemein gesagt, verschiedene Verrückungen, so daß die Verrückung u eine Funktion der Abszisse ξ ist, die dem betrachteten Schnitt entspricht. Bei einer Schwingung verändern sich die Verrückungen u außerdem noch im Laufe der Zeit. Folglich muß die Verrückung u als eine Funktion der beiden unabhängigen Variablen ξ und t betrachtet werden:

$$u = u(\xi, t).$$

Die Abhängigkeit u von ξ werden wir annähernd aus folgenden Erwägungen finden.

Wenn das Seil AB masselos wäre, würde es bei einer Bewegung des Systems in jedem Augenblick statisch deformiert werden. Tatsächlich müssen nach dem Prinzip von D'ALEMBERT die am Seil angreifenden Kräfte durch die Trägheitskräfte seiner Teilchen aufgehoben werden. Wenn wir die Masse des Seiles gleich Null annehmen, vernichten wir aber dadurch auch die Trägheitskräfte in seinen Teilchen. Folglich müssen sich im Fall eines masselosen Seiles die an demselben angreifenden Kräfte untereinander in jedem Augenblick bei der Bewegung des Systems aufheben; das bedeutet aber, daß das Seil statisch deformiert wird.

Bei einer statischen Deformation jedoch ist die Abhängigkeit der Verrückung u von der Abszisse ξ bekannt: u verhält sich zu ξ, wie die Verrückung des Seilendes B

sich zu der Länge des Seiles l verhält. Wenn wir im Auge behalten, daß die Verrückung des unteren Seilendes in unserem Fall gleich $f + x$ ist, erhalten wir:

$$u = \frac{f + x}{l}\,\xi\,. \tag{5}$$

Die durch diese Formel ausgedrückte lineare Abhängigkeit u von ξ ist in Abb. 213 graphisch dargestellt (wobei die Verrückungen u und $f + x$ vereinbarungsgemäß nicht vertikal, sondern horizontal abgetragen sind). Wir erwähnen, daß die Verrückung u von der Zeit t mittels der Koordinate x abhängt.

In Wirklichkeit besitzt unser Seil eine gewisse Masse, und daher ist die Gl. (5) ungenau. Wenn aber die Masse des Seiles im Verhältnis zur Masse der daran aufgehängten Last klein ist, müssen wir erwarten, daß sich der Ausdruck für u wenig von den gegebenen Gln. (5) unterscheidet. Wir beschränken uns auf den Fall eines verhältnismäßig leichten Seiles und legen die Gl. (5) unseren weiteren annähernden Berechnungen zugrunde. Wir bemerken, daß wir, indem wir diese Gleichung annahmen, faktisch unser System in ein System mit einem Freiheitsgrade verwandelt haben; tatsächlich wird jetzt die Koordinate x nicht nur die Verrückungen der Last bestimmen, sondern nach der Gl. (5) auch noch die Verrückungen eines beliebigen Seilschnittes.

Wir stellen nun die Differentialgleichung der Bewegung unseres Systems nach der Methode von LAGRANGE auf. Wenn wir an die Berechnung der kinetischen Energie T des Systems herangehen, bemerken wir, daß wir zu der kinetischen Energie der Last $\frac{1}{2}\,m\dot{x}^2$ die kinetische Energie des Seiles hinzufügen müssen, die wir als Summe der kinetischen Energie der einzelnen Seilelemente berechnen. Wir wählen ein Element des Seiles von der Länge $d\xi$ (Abb. 213), seine Masse ist gleich $\varrho S\,\mathrm{d}\xi$, wobei ϱ die Dichte des Seilmaterials und S die Querschnittsfläche ist; da die Geschwindigkeit des gewählten Elementes gleich der Ableitung der Verrückung u nach der Zeit ist oder nach der Gl. (5)

$$\dot{u} = \frac{\dot{x}}{l}\,\xi\,,$$

ergibt sich für die kinetische Energie des Elementes der Ausdruck:

$$\frac{1}{2}\,\varrho\,S\,\dot{u}^2\,\mathrm{d}\,\xi = \frac{1}{2}\,\varrho\,S\,\frac{\dot{x}^2}{l^2}\,\xi^2\,\mathrm{d}\,\xi\,.$$

Folglich wird die kinetische Energie des ganzen Seiles durch das Integral

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l \varrho\,S\,\dot{u}^2\,\mathrm{d}\,\xi = \frac{1}{2}\,\varrho\,S\,\frac{\dot{x}^2}{l^2}\int\limits_0^l \xi^2\,\mathrm{d}\,\xi = \frac{1}{6}\,\varrho\,S\,l\,\dot{x}^2$$

ausgedrückt.

Nun ist aber $\varrho \cdot S \cdot l = m_1$, wobei m_1 die Masse des Seiles ist. Somit erhalten wir für die kinetische Energie des Seiles den einfachen Ausdruck $\frac{1}{6} m_1 \dot{x}^2$. Addieren wir diese Größe zu der kinetischen Energie der Last, so finden wir:

$$T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3} m_1\right) \dot{x}^2.$$

Wir gehen zur Berechnung der potentiellen Energie V über und bemerken, daß wir zu der Gl. (4) ein Glied hinzufügen müssen, das dem Gewicht des Seiles entspricht. Bezeichnen wir das Gewicht des Seiles mit P_1 und beachten, daß die Verrückung des Schwerpunktes des Seiles (aus der von ihm bei dem ungedehnten Seil eingenommenen Lage) gleich $\frac{1}{2}(f + x)$ ist, so finden wir

$$V = \frac{1}{2} c (f + x)^2 - P(f + x) - \frac{1}{2} P_1 (f + x)$$

$$= \frac{1}{2} c f^2 - \left(P + \frac{1}{2} P_1\right) f + \left(c f - P - \frac{1}{2} P_1\right) x + \frac{1}{2} c x^2.$$

Setzen wir $\frac{\mathrm{d} V}{\mathrm{d} x} = 0$ für $x = 0$, so finden wir die Gleichgewichtsgleichung

$$c f - P - \frac{1}{2} P_1 = 0,$$

durch welche die statische Verlängerung f bestimmt wird. Endgültig erhalten wir:

$$V = \frac{1}{2} c \left(x^2 - f^2\right).$$

Stellen wir mit den gewonnenen Ausdrücken T und V die Differentialgleichung der Bewegung von Lagrange auf, so finden wir:

$$\left(m + \frac{1}{3} m_1\right) \ddot{x} + c x = 0.$$

Hieraus ergibt sich für die Eigenfrequenz λ die Beziehung:

$$\lambda^2 = \frac{c}{m + \frac{1}{3} m_1}. \tag{6}$$

Ein Vergleich dieses Resultates mit der Gl. (2) führt zu der Schlußfolgerung, daß man, wenn man die Eigenfrequenz der Last M unter Berücksichtigung des Einflusses der Seilmasse ermitteln will, die Berechnung nach der gewöhnlichen elementaren Gl. (2) durchführen kann, wenn man zu der Masse der Last ein Drittel der Masse des Seiles hinzufügt.

Wir wollen nochmals unterstreichen, daß die Gl. (6), wie aus der Schlußfolgerung ersichtlich, eine Näherungsgleichung ist; wir haben diese Gleichung unter der Voraussetzung eines verhältnismäßig leichten Seiles aufgestellt. Jedoch zeigt der Vergleich der Gl. (6) mit den Ergebnissen einer genauen Lösung der Aufgabe[1], daß sich diese annähernde Gleichung auch bei verhältnismäßig großen Werten der Seilmasse als hinreichend genau erweist. So erhalten wir z. B. bei $m_1 = m$ nach der Gl. (6)

$$\lambda^2 = 0{,}75 \frac{c}{m}, \qquad \lambda = 0{,}866 \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Eine genaue Lösung aber ergibt in diesem Fall:

$$\lambda = 0{,}861 \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

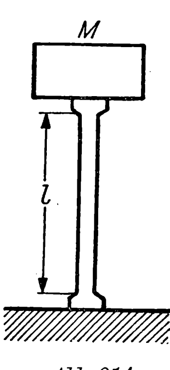


Abb. 214

Wie man sieht, beträgt der Fehler bei der Berechnung der Größe λ, wenn die Masse des Seiles gleich der Masse der Last ist, nach der annähernden Gl. (6) noch nicht einmal 1%.

Wenn man das elastische Seil durch einen elastischen Stab (massiv oder hohl) ersetzt, kann man ein System mit einer sehr hohen Eigenfrequenz erhalten. Darauf beruht die Konstruktion von Vibratoren, die als starke Tonquellen verwendet werden (Abb. 214). Wir wollen die Gl. (6) zur Berechnung der Eigenfrequenz eines solchen Vibrators verwenden.

Wir nehmen an, daß das Gewicht der Masse M (Abb. 214) $P = 10$ kg ist und die Länge des sie tragenden röhrenförmigen Stahlstabes $l = 60$ cm. Die Fläche des Stabquerschnittes beträgt $S = 2{,}5\ \text{cm}^2$; für das Material des Stabes nehmen wir den Elastizitätsmodul $E = 2{,}15 \times 10^6\ \text{kg/cm}^2$ an, das spezifische Gewicht ist $\gamma = 0{,}0078\ \text{kg/cm}^3$.

Wir ermitteln die Federkonstante

$$c = \frac{ES}{l} = 8{,}96 \cdot 10^4\ \text{kg/cm}$$

Ferner finden wir das Gewicht des Stabes:

$$P_1 = \gamma \cdot S \cdot l = 1{,}17\ \text{kg}.$$

Hieraus folgt

$$\lambda = \sqrt{\frac{c\,g}{P + \frac{1}{3} P_1}} = 2910\ 1/\text{s}.$$

Vernachlässigen wir den Einfluß der Stabmasse, so würden wir $\lambda = 2960\ 1/\text{s}$ erhalten.

---

[1] Siehe S. P. Timoshenko, „Schwingungsprobleme der Technik“, Deutsche Ausgabe, Berlin, 1932.

§ 139. Das Abklingen der Eigenschwingungen unter dem Einfluß von Reibungskräften, die proportional der Geschwindigkeit sind. Die Dissipationsfunktion

Bereits im § 35 haben wir das Abklingen der Eigenschwingungen studiert, das durch die dämpfenden Widerstände hervorgerufen wird. Wir wollen jetzt diese Erscheinung des Abklingens bei den Eigenschwingungen eines materiellen Systems betrachten.

Im § 35 haben wir die Größe der Widerstandskraft als proportional der Geschwindigkeit des sich bewegenden Punktes vorausgesetzt. Im Fall des Luftwiderstandes oder bei Flüssigkeiten ist eine solche Voraussetzung (bei kleinen Bewegungsgeschwindigkeiten) völlig annehmbar. Wir wollen hier noch auf einen weiteren Fall eines Widerstandes hinweisen, der ein Abklingen der Schwingungen eines Systems hervorruft und bei dem die Größe des Widerstandes ebenfalls als proportional der Geschwindigkeit angenommen werden kann.

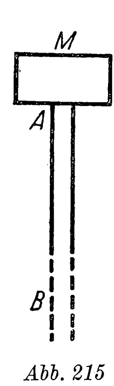


Abb. 215

Wir stellen uns ein beliebiges System (z. B. eine Maschine oder Anlage) vor, die sich in einem Schwingungszustand befindet. Ein sehr wichtiger Faktor, der ein Abklingen von Eigenschwingungen eines solchen Systems hervorruft, ist der Umstand, daß die Energie der Schwingungen über das Fundament in den Boden geht, auf dem die Maschine oder Anlage steht, und dort zerstreut wird. Wir vereinfachen die Frage und wollen folgendes Schema betrachten: Wir wollen annehmen, daß sich die Masse M auf dem unendlich langen elastischen Stab AB (Abb. 215) befindet und kleine Schwingungen in vertikaler Richtung ausführt. Im Stabe werden auch vertikale Schwingungen auftreten; diese Schwingungen werden sich längs des Stabes mit einer Geschwindigkeit c nach unten fortpflanzen, die gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Stoßwellen längs des elastischen Stabes ist; im § 89 haben wir gesehen, daß diese Geschwindigkeit durch die Beziehung

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$$

ausgedrückt wird, wobei E der Elastizitätsmodul, ϱ die Dichte des Materials des Stabes ist.

Beim Ausführen der vertikalen Schwingungen übt die Masse M auf den Stab AB außer dem konstanten statischen Druck, der gleich dem Gewicht der Masse M ist, auch noch einen gewissen veränderlichen zusätzlichen Druck aus. Wir bezeichnen diesen zusätzlichen Druck mit P und die Geschwindigkeit der Masse M (oder des oberen Stabendes A) mit v. Im § 89 war

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{Pc}{E\omega},$$

wobei $\frac{du}{d\tau}$ die Geschwindigkeit des oberen Stabendes und ω die Fläche des Stab-

querschnittes ist[1]. Wenn wir hier $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = v$ annehmen, erhalten wir für den zusätzlichen Druck P die Beziehung

$$P = \frac{E\omega}{c} v = \omega \sqrt{E\varrho} \cdot v .$$

Wie man sieht, ist die Kraft P proportional der Geschwindigkeit der Masse M.

Dem zusätzlichen Druck P, der von der Masse M auf den sie tragenden Stab ausgeübt wird, entspricht die gleiche und entgegengesetzt verlaufende Reaktion des Stabes, die an der Masse M angreift. Folglich hat diese Reaktion den Charakter eines geschwindigkeitsproportionalen Widerstandes. Wir schließen, daß die hier beschriebene Erscheinung (man kann sie das „Ausstrahlen" der Schwingungen längs des unendlich langen Stabes AB nennen) vom Auftreten eines Widerstandes begleitet ist, der an der Masse angreift, die die Schwingungen „ausstrahlt" und proportional der Geschwindigkeit dieser Masse ist.

Wir betrachten jetzt Eigenschwingungen eines Systems mit geschwindigkeitsproportionalen Widerständen.

Wir stellen uns ein System mit einem Freiheitsgrad vor, das aus den materiellen Punkten $M_1, M_2, \ldots, M_n$ besteht; die verallgemeinerte Koordinate des Systems bezeichnen wir wie bisher mit q. Wir setzen voraus, daß alle Bindungen des Systems zeitunabhängig sind und daß am System die Kräfte $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die ein Potential besitzen, angreifen; die potentielle Energie des Systems bezeichnen wir mit V. Wir werden die kleinen Schwingungen des Systems um die stabile Gleichgewichtslage $q = 0$ unter der Voraussetzung untersuchen, daß außer den Kräften $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ an den Systempunkten die Widerstandskräfte $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ angreifen, die proportional den Geschwindigkeiten dieser Punkte sind. Wir bezeichnen die Geschwindigkeiten der Systempunkte mit $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_n$ und setzen

$$H_1 = k_1 U_1, \quad H_2 = k_2 U_2, \ldots, \quad H_n = k_n U_n,$$

wobei $k_1, k_2, \ldots, k_n$ konstante Größen sind.

Die Differentialgleichung der Bewegung unseres Systems hat die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial V}{\partial q} + Q, \tag{1}$$

wobei T die kinetische Energie des Systems ist und Q die den Kräften $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ entsprechende verallgemeinerte Kraft.

Wir berechnen zunächst die Größe Q, die wir *verallgemeinerte Widerstandskraft* nennen wollen.

Dazu benutzen wir die im § 123 ermittelten Beziehungen (4). Bezeichnen wir die Komponenten der Kraft $\mathfrak{H}_i$ auf den kartesischen Koordinatenachsen mit H_{ix}, H_{iy}, H_{iz}, so ist

$$Q = \sum_{i=1}^{i=n} H_{ix}\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}q} + H_{iy}\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}q} + H_{iz}\frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}q}\right), \tag{2}$$

wobei x_i, y_i und z_i die kartesischen Koordinaten des Punktes M_i sind.

[1] Diese Gleichung ist im § 89 unter der Voraussetzung einer konstanten Größe der Kraft P aufgestellt worden, man kann sie aber auch auf den Fall eines variablen P verallgemeinern.

Wenn wir beachten, daß die Kraft $\mathfrak{H}_i$ ihrer Größe nach gleich $k_i U_i$ ist und entgegengesetzt der Geschwindigkeit $\mathfrak{U}_i$ verläuft, erhalten wir:

$$H_{ix} = -k_i \dot{x}_i, \qquad H_{iy} = -k_i \dot{y}_i, \qquad H_{iz} = -k_i \dot{z}_i.$$

Führen wir nun, wie im § 136, die Verrückungen u_i, v_i, w_i des Punktes M_i auf den Achsen x, y und z ein, so gilt:

$$x_i = x_i^0 + u_i, \qquad y_i = y_i^0 + v_i, \qquad z_i = z_i^0 + w_i,$$

wobei x_i^0, y_i^0 und z_i^0 die Koordinatenwerte in der Gleichgewichtslage des Systems sind. Erinnern wir uns der Gl. (12) im § 136, so finden wir

$$x_i = x_i^0 + L^{(i)} q, \qquad y_i = y_i^0 + M^{(i)} q, \qquad z_i = z_i^0 + N^{(i)} q. \tag{3}$$

Hieraus folgt

$$H_{ix} = -k_i L^{(i)} \dot{q}, \qquad H_{iy} = -k_i M^{(i)} \dot{q}, \qquad H_{iz} = -k_i N^{(i)} \dot{q}. \tag{4}$$

Setzen wir die Ausdrücke (3) und (4) in die Gl. (2) ein, so erhalten wir endgültig

$$Q = -\dot{q} \sum_{i=1}^{i=n} k_i \left[(L^{(i)})^2 + (M^{(i)})^2 + (N^{(i)})^2 \right].$$

Wenn wir der Kürze halber

$$\sum_{i=1}^{i=n} k_i \left[(L^{(i)})^2 + (M^{(i)})^2 + (N^{(i)})^2 \right] = k,$$

setzen, erhalten wir

$$Q = -k \dot{q}. \tag{5}$$

Also ist die verallgemeinerte Widerstandskraft der verallgemeinerten Geschwindigkeit des Systems proportional.

Wenn wir nun in der Gl. (1)

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \qquad V = V_0 + \frac{1}{2} c q^2$$

(siehe Gln. (2) und (3), § 136) annehmen und die gewonnene Beziehung für Q einführen, erhalten wir:

$$a \ddot{q} = -c q - k \dot{q}. \tag{6}$$

Setzen wir nun noch wie bisher

$$\frac{c}{a} = \lambda^2 \tag{7}$$

sowie

$$\frac{k}{a} = 2 \nu,$$

dann erhalten wir endgültig

$$\ddot{q} + 2 \nu \dot{q} + \lambda^2 q = 0. \tag{8}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Bewegung unseres Systems.

Diese Gleichung unterscheidet sich in nichts von der Differentialgleichung der abklingenden Schwingungen eines materiellen Punktes, die im § 36 ausführlich untersucht wurde. Wir weisen betreffs Einzelheiten auf die genannte Stelle hin und stellen nur fest, daß ein Integrieren der Gl. (8) im Fall eines *kleinen Widerstandes* ($\nu < \lambda$) zu *abklingenden Schwingungen* führt, die durch die Gleichung

$$q = \alpha\, e^{-\nu t} \sin\left(\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}\, t + \beta\right) \tag{9}$$

bestimmt werden, wobei α und β beliebige Konstanten sind. Im Fall eines *großen Widerstandes* aber ($\nu > \lambda$) nimmt das Integral der Gl. (8) die Form

$$q = \alpha\, e^{-\nu t}\, \mathfrak{Sin}\left(\sqrt{\nu^2 - \lambda^2}\, t + \beta\right) \tag{10}$$

an, was einer *aperiodischen Bewegung* des Systems entspricht.

Die Widerstandskräfte rufen, wenn sie eine negative Arbeit leisten, eine ununterbrochene Verringerung der Energie des schwingenden Systems hervor. Wir wollen die Verringerung der Energie der Schwingungen unseres Systems während des unendlich kleinen Zeitraumes $\mathrm{d}t$ berechnen.

Durch Multiplikation der Gl. (6) mit $\dot{q}\,\mathrm{d}t$, erhalten wir:

$$(a\,\dot{q}\,\ddot{q} + c\,q\,\dot{q})\,\mathrm{d}t = -k\,\dot{q}^2\,\mathrm{d}t.$$

Andererseits schließen wir unter Berücksichtigung der Ausdrücke für die kinetische und die potentielle Energie des Systems

$$T = \frac{1}{2}\,a\,\dot{q}^2, \qquad V = V_0 + \frac{1}{2}\,c\,q^2,$$

daß

$$a\,\dot{q}\,\ddot{q} + c\,q\,\dot{q} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(T+V)}{\mathrm{d}t}$$

ist.

Folglich gilt

$$\mathrm{d}(T+V) = -k\,p^2\,\mathrm{d}t.$$

Dies ist die unendlich kleine Veränderung der Energie des Systems während der Zeit $\mathrm{d}t$.

Wir führen die Bezeichnung

$$R = \frac{1}{2}\,k\,\dot{q}^2 \tag{11}$$

ein.

Dann haben wir:

$$\mathrm{d}(T+V) = -2R\,\mathrm{d}t.$$

Hieraus ersieht man, daß die Größe $2R$ gleich der Verringerung der Energie der Schwingungen bezogen auf die Einheit der Zeit ist. Die Größe R heißt *Dissipationsfunktion.*

Aus den Gleichungen (5) und (11) folgt, daß

$$Q = -\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\dot{q}}$$

ist.

Folglich ist die verallgemeinerte Widerstandskraft gleich der negativen Ableitung der Dissipationsfunktion nach der verallgemeinerten Geschwindigkeit.

§ 140. Das Abklingen der Eigenschwingungen unter der Wirkung konstanter Reibung. Coulombsche Reibung

Ein wichtiger Faktor, der ein Abklingen von Schwingungen hervorruft, ist die Reibung zwischen den einzelnen starren Körpern, die zu einem schwingenden System gehören. Die Größe dieser Reibung wird nach dem Gesetz von Coulomb als Produkt aus dem Reibungskoeffizienten und der Normalkraft zwischen den sich reibenden Körpern bestimmt.

Den Reibungskoeffizienten kann man mit hinreichender Genauigkeit als konstante Größe betrachten. Was die Reaktionen anbetrifft, so kann man im Falle kleiner Schwingungen des Systems in erster Annäherung annehmen, daß diese im Bewegungszustand die gleichen Werte haben wie im Gleichgewichtszustande des Systems. Folglich kann man die Reibungskräfte als Kräfte betrachten, die der Größe nach konstant sind und der Richtung nach entgegengesetzt den Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte wirken. Wir wollen nun den Einfluß solcher Kräfte auf das Abklingen der Schwingungen des Systems untersuchen.

Wir wollen also voraussetzen, daß an den Punkten unseres Systems $M_1, M_2, \ldots, M_n$ außer den Kräften $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die ein Potential besitzen, die Widerstandskräfte $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ angreifen, die der Größe nach konstant sind und entgegengesetzt den Geschwindigkeiten $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_n$ dieser Punkte wirken. Die Differentialgleichung der Bewegung des Systems hat die Form:

$$a\ddot{q} = -cq + Q, \tag{1}$$

wobei Q die verallgemeinerte Widerstandskraft ist. Wir berechnen jetzt diese Größe.

Wie im vorhergehenden Paragraphen werden wir zur Berechnung der verallgemeinerten Kraft Q die Gleichung

$$Q = \sum_{i=1}^{i=n} \left(H_{ix} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}q} + H_{iy} \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}q} + H_{iz} \frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}q} \right)$$

heranziehen, wobei H_{ix}, H_{iy}, H_{iz} die Komponenten der Kraft $\mathfrak{H}_i$ auf den kartesischen Koordinatenachsen und x_i, y_i, z_i die kartesischen Koordinaten des Punktes M_i sind.

Da die Kraft $\mathfrak{H}_i$ entgegengesetzt der Geschwindigkeit $\mathfrak{U}_i$ ihres Angriffspunktes wirkt, gilt

$$H_{ix} = -H_i \frac{\dot{x}_i}{U_i}, \qquad H_{iy} = -H_i \frac{\dot{y}_i}{U_i}, \qquad H_{iz} = -H_i \frac{\dot{z}_i}{U_i}.$$

Aus

$$x_i = x_i^0 + L^{(i)} q\,, \qquad y_i = y_i^0 + M^{(i)} q\,, \qquad z_i = z_i^0 + N^{(i)} q \tag{2}$$

folgt andererseits:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= L^{(i)}\dot{q}\,, & \frac{\mathrm{d}\,x_i}{\mathrm{d}\,q} &= L^{(i)}\,, \\ \dot{y}_i &= M^{(i)}\dot{q}\,, & \frac{\mathrm{d}\,y_i}{\mathrm{d}\,q} &= M^{(i)}\,, \\ \dot{z}_i &= N^{(i)}\dot{q}\,, & \frac{\mathrm{d}\,z_i}{\mathrm{d}\,q} &= N^{(i)}\,, \end{aligned}\right\}$$

$$U_i \sqrt{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2} = \pm\,\dot{q}\sqrt{(L^{(i)})^2 + (M^{(i)})^2 + (N^{(i)})^2}\,,$$

und zwar gilt in der letzten Gleichung das obere Vorzeichen, wenn $\dot{q} > 0$, und das untere Vorzeichen, wenn $\dot{q} < 0$ (da stets $u_i > 0$ sein muß).

Somit erhalten wir

$$Q = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{H_i}{U_i}\left(\dot{x}_i \frac{\mathrm{d}\,x_i}{\mathrm{d}\,q} + \dot{y}_i \frac{\mathrm{d}\,y_i}{\mathrm{d}\,q} + \dot{z}_i \frac{\mathrm{d}\,z_i}{\mathrm{d}\,q}\right) = \mp \sum_{i=1}^{i=n} H_i \sqrt{(L^{(i)})^2 + (M^{(i)})^2 + (N^{(i)})^2}\,, \tag{3}$$

wobei das obere Vorzeichen bei $\dot{q} > 0$, das untere Vorzeichen aber bei $\dot{q} < 0$ gilt.

Wenn wir hier $H_i = f_i N_i$ annehmen (hierin ist f_i der Reibungskoeffizient, N_i die normale Reaktion) und die Bezeichnung

$$K = \sum_{i=1}^{i=n} f_i N_i \sqrt{(L^{(i)})^2 + (M^{(i)})^2 + (N^{(i)})^2}$$

einführen, erhalten wir

$$Q = \mp K\,. \tag{4}$$

Wir erinnern nochmals daran, daß in dieser Gleichung das obere Vorzeichen dem Fall $\dot{q} > 0$ entspricht, das untere dem Fall $\dot{q} < 0$.

Auf diese Art erhalten wir die Differentialgleichung der Bewegung unseres Systems

$$a\,\ddot{q} = -\,c\,q \mp K$$

oder

$$\ddot{q} + \lambda^2\left(q \pm \frac{K}{c}\right) = 0\,, \tag{5}$$

wobei λ^2 die frühere Bedeutung

$$\lambda^2 = \frac{c}{a}$$

hat.

Wir bemerken, daß f_i der Reibungskoeffizient des Gleitens ist, und daß in Übereinstimmung damit die Gl. (4) bei einer *Bewegung* des Systems Geltung hat. Wir wollen uns noch mit der Größe der verallgemeinerten Reibungskraft im Fall des *Gleichgewichts* des Systems beschäftigen.

Wir bezeichnen den Reibungskoeffizienten im Ruhezustand mit $f_i^{(0)}$ und sehen, daß im Fall des Ruhezustandes die Reibungskraft H_i beliebige Werte zwischen O und $f_i^{(0)} N_i$ annehmen kann. Nehmen wir die Gl. (3) und führen die Bezeichnung

$$K_0 = \sum_{i=1}^{i=n} f_i^{(0)} N_i \sqrt{(L^{(i)})^2 + (M^{(i)})^2 + (N^{(i)})^2}$$

ein, so schließen wir, daß die verallgemeinerte Reibungskraft im Ruhezustand beliebige Werte zwischen $-K_0$ und $+K_0$ annehmen kann. Mithin gilt im Fall der Ruhe des Systems

$$-K_0 \leqslant Q \leqslant +K_0. \tag{6}$$

Wir bemerken nun, daß unser System im betrachteten Fall schon nicht mehr nur eine Gleichgewichtslage $q = 0$ hat, sondern eine unzählige Menge von Gleichgewichtslagen, die ein ganzes Gleichgewichtsgebiet bilden. Wir wollen die Gleichgewichtsgleichung des Systems aufschreiben. Setzen wir in der Gl. (1) $\ddot{q} = 0$, so ist

$$c q = Q.$$

Andererseits erfüllt die verallgemeinerte Reibungskraft in der Gleichgewichtslage die Bedingung (6). Hieraus schließen wir, daß in der Gleichgewichtslage des Systems

$$-\frac{K_0}{c} \leqslant q \leqslant +\frac{K_0}{c} \tag{7}$$

gelten muß.

Folglich wird jedes System, das sich ohne Anfangsgeschwindigkeit in einer Gleichgewichtslage befindet, in der Gleichgewichtslage verbleiben, in der es durch die Reibungskräfte gehalten wird. Die Bedingung (7) wird dabei von q erfüllt und das *Gleichgewichtsgebiet* unseres Systems dadurch bestimmt.

Wir wenden uns nun dem Studium der Schwingungen zu, die ein System ausführt, wenn es aus der Gleichgewichtslage verschoben wird.

Wir nehmen an, daß das System in eine Lage gebracht ist, die durch die Koordinate q_0 bestimmt wird, wobei

$$q_0 > \frac{K_0}{c}$$

ist, und daß es aus dieser Lage ohne Anfangsgeschwindigkeit freigegeben wird. Wir wollen zuerst ermitteln, nach welcher Seite hin die Bewegung des Systems beginnt.

Im Anfangsaugenblick $t = 0$ gilt $q = q_0$, $\dot{q} = 0$. Wir bezeichnen die Größe $\ddot{q}$ in diesem Augenblick mit $\ddot{q}_0$ und ermitteln das Vorzeichen dieser Größe. Unter Beachtung, daß der Reibungskoeffizient der Ruhe größer als der Reibungskoeffizient des Gleitens ist, d. h. $f_i^{(0)} > f_i$, schließen wir, daß $K_0 > K$ ist, woraus folgt, daß die verallgemeinerte Reibungskraft Q unter keiner Bedingung die Größe K_0 übersteigen kann. Folglich haben wir, wenn wir in die Gl. (1) die Zeit $t = 0$ ansetzen:

$$a \ddot{q}_0 = -c q_0 + Q < -K_0 + Q \leqslant 0,$$

woraus

$$\ddot{q}_0 < 0$$

folgt.

Da wir für $t = 0$, $\dot{q} = 0$, $\ddot{q} = \ddot{q}_0 < 0$ haben, gilt für Zeitpunkte, die nahe dem anfänglichen sind, $\dot{q} < 0$. Die Bewegung des Systems beginnt in Richtung abnehmender Werte von q.

Hieraus folgt, daß wir im ersten Stadium der Bewegung das untere Vorzeichen in der Gl. (5) annehmen müssen; das erste Bewegungsstadium des Systems wird durch die Differentialgleichung

$$\ddot{q} + \lambda^2 \left(q - \frac{K}{c}\right) = 0$$

bestimmt.

Integrieren wir diese Gleichung, so erhalten wir

$$q = \frac{K}{c} + C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t,$$

wobei C_1 und C_2 beliebige Konstanten sind. Bestimmen wir diese Konstanten aus den Anfangsbedingungen ($q = q_0$, $\dot{q} = 0$ bei $t = 0$), so finden wir:

$$C_1 = q_0 - \frac{K}{c}, \qquad C_2 = 0$$

und damit

$$q = \frac{K}{c} + \left(q_0 - \frac{K}{c}\right) \cos \lambda t. \tag{8}$$

Diese Gleichung hat nur solange Gültigkeit, solange $\dot{q} < 0$ ist; sie verliert ihre Gültigkeit in dem Augenblick, in dem $\dot{q}$ zum erstenmal Null wird. Da

$$\dot{q} = -\lambda \left(q_0 - \frac{K}{c}\right) \sin \lambda t$$

ist, geschieht das zum erstenmal im Augenblick

$$t_1 = \frac{\pi}{\lambda}.$$

Wie sich das System nach dem Augenblick t_1 bewegt, bedarf einer besonderen Untersuchung. Wir werden diese Untersuchung vereinfachen, indem wir die Veränderung der Koordinate q im Laufe der Zeit graphisch darstellen. Wir tragen die Zeit t auf der Abszissenachse ab, die Koordinate q dagegen auf der Ordinatenachse (Abb. 216). Wir ziehen die horizontalen Geraden $q = +\frac{K}{c}$ und $q = -\frac{K}{c}$ und die Geraden $q = +\frac{K_0}{c}$ und $q = -\frac{K_0}{c}$, die das Gleichgewichtsgebiet des

Systems begrenzen. Als Bewegungskurve des Systems vom Augenblick $t = 0$ bis $t = t_1 = \frac{\pi}{\lambda}$ erscheint der Bogen AB der Cosinusfunktion; dieser Bogen ist in bezug auf die Abszissenachse um die Größe $\frac{K}{c}$ nach oben verschoben; die Achse der Bewegungskurve ist die Gerade $q = \frac{K}{c}$.

Wir wollen die Ordinate des Punktes B ermitteln, d. h. den Wert q_1 der Koordinate q im Augenblick $t = t_1$. Nehmen wir $q = q_1$ in der Gl. (8) an, so gilt:

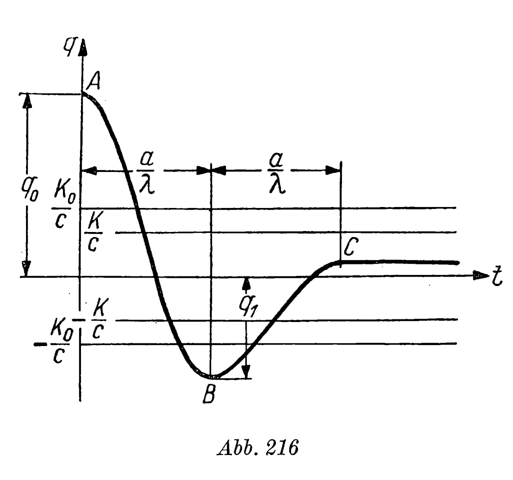


Abb. 216

$$q_1 = \frac{K}{c} - \left(q_0 - \frac{K}{c}\right) = -\left(q_0 - \frac{2K}{c}\right).$$

Somit hat die Koordinate q nach Beendigung der ersten Schwingung einen Wert, der zahlenmäßig um die Größe $\frac{2K}{c}$ kleiner ist als der ursprüngliche Wert q_0. Im weiteren können zwei Fälle auftreten:

1. Der Punkt B liegt innerhalb des Gleichgewichtsgebietes, d. h.

$$q_1 > -\frac{K_0}{c}$$

oder

$$\frac{K_0}{c} < q_0 < \frac{K_0 + 2K}{c}.$$

Das System wird, da es sich innerhalb des Gleichgewichtsgebietes (mit der Geschwindigkeit Null) befindet, im Gleichgewichtszustande bleiben. Die Schwingungen des Systems sind nach der ersten Schwingung beendet.

2. Der Punkt B liegt außerhalb des Gleichgewichtsgebietes, d. h.

$$q_1 < -\frac{K_0}{c}$$

oder

$$q_0 > \frac{K_0 + 2K}{c}.$$

Es folgt in diesem Falle auf die erste Schwingung eine zweite Schwingung. Ganz ebenso wie wir weiter oben das Vorzeichen des anfänglichen Wertes der verallgemeinerten Beschleunigung $\ddot{q}_0$ im Augenblick $t = 0$ bestimmt haben, d. h. am Anfang der ersten Schwingung, werden wir nun das Vorzeichen des anfänglichen Wertes $\ddot{q}_1$ derselben verallgemeinerten Beschleunigung am Anfang der zweiten Schwingung ermitteln. Wenden wir die Gleichung (1) auf den Zeitpunkt t_1 an, so erhalten wir:

$$a\ddot{q}_1 = -cq_1 + Q.$$

Wenn wir beachten, daß $Q \geqslant - K_0$ ist, finden wir

$$a\ddot{q}_1 > K_0 + Q \geqslant 0,$$

woraus

$$\ddot{q}_1 > 0$$

folgt.

Also beginnt die zweite Schwingung nach der Seite zunehmender Werte von q. Im Laufe dieser zweiten Schwingung ist $\dot{q} > 0$, und folglich müssen wir in der Gl. (5) das obere Vorzeichen wählen. Folglich gilt für die zweite Schwingung die Gleichung

$$\ddot{q} + \lambda^2\left(q + \frac{K}{c}\right) = 0.$$

Integrieren wir, so ergibt sich:

$$q = -\frac{K}{c} + D_1 \cos \lambda t + D_2 \sin \lambda t,$$

wobei D_1 und D_2 neue willkürliche Konstanten sind, die einer Bestimmung aus den Anfangsbedingungen der zweiten Schwingung ($q = q_1$, $\dot{q} = 0$ bei $t = t_1$) unterliegen. In der graphischen Darstellung (Abb. 216) entspricht der zweiten Schwingung der zweite Zweig BC der Cosinusfunktion, der als Achse die Gerade $q = -\frac{K}{c}$ hat.

Im Augenblick $t = t_2 = \frac{2\pi}{\lambda}$ endet die zweite Schwingung. Jetzt sind wiederum zwei Fälle möglich. Wenn sich der Punkt C innerhalb des Gleichgewichtsgebietes befindet (wie in der Abb. 216 dargestellt), hören die Schwingungen im Augenblick $t = t_2$ auf, und das System ist im Gleichgewichtszustand. Wenn es sich jedoch zeigt, daß der Punkt C oberhalb der Geraden $q = \frac{K_0}{c}$ liegt, beginnt nach Beendigung der zweiten Schwingung die dritte Schwingung nach der Seite abnehmender q-Werte usw.

Aus dem Dargelegten folgt, daß sich das Abklingen der Schwingungen, das durch konstante Reibung hervorgerufen wird, wesentlich von dem Abklingen unter der Wirkung von geschwindigkeitsproportionalen Widerständen unterscheidet.

Wir sehen, daß sich bei jeder Schwingung die Schwingungsamplitude der Koordinate q um die konstante Größe $\frac{2K}{c}$ verringert. Das bedeutet, daß sich bei der Wirkung einer konstanten Reibung die Schwingungsamplitude in *arithmetischer* Folge verringert. Indessen haben wir im Fall von Widerständen, die geschwindigkeitsproportional sind, wie das aus der Gl. (9), § 139, zu ersehen ist, eine Verringerung der Amplituden in *geometrischer* Folge.

Andererseits ist der Abklingungsprozeß der Schwingungen bei Wirkung einer konstanten Reibung nach einer *endlichen* Anzahl von Schwingungen beendet. Bei geschwindigkeitsproportionalen Widerständen aber dauert dieser Prozeß, theoretisch gesprochen, *unendlich lange.*

Wir vermerken auch die bereits bei der dargelegten Analyse zutage getretene Schwierigkeit, die durch das doppelte Vorzeichen in der Gl. (5) hervorgerufen ist. Dieser Umstand zwingt dazu, jede Schwingung des Systems einzeln zu betrachten, indem für jede Schwingung die entsprechende Differentialgleichung integriert wird und jedesmal die Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen der entsprechenden Schwingung bestimmt werden. Es ist unmöglich, alle Schwingungen in einer Gleichung zusammenzufassen. In dieser Beziehung ist der Bewegungsvorgang bei Vorhandensein geschwindigkeitsproportionaler Reibung bedeutend einfacher. Das ist der Grund, weshalb bei einer theoretischen Untersuchung, bei der die Erscheinung

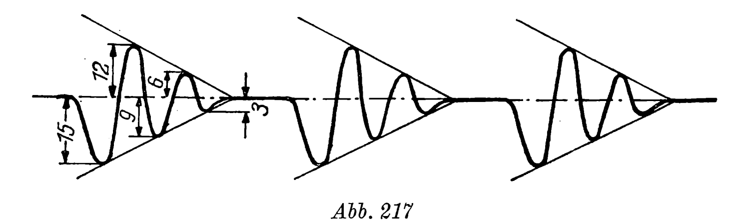


Abb. 217

des Abklingens von Schwingungen eines Systems untersucht werden soll, gewöhnlich die Voraussetzung gemacht wird, daß den Geschwindigkeiten der Systempunkte proportionale Widerstände vorhanden sind.

Zum Abschluß dieses Paragraphen führen wir zur Erläuterung eine kleine Berechnung an.

In der Abb. 217 ist die Aufzeichnung der Eigenschwingungen eines Vibrographen dargestellt. Man sieht, daß die Schwingungen des Apparates nach sechs Ausschlägen aufhören. Die Schwingungsamplitude der schreibenden Spitze hat nach jedem Ausschlag folgende Werte (in mm):

$$-15, \; +12, \; -9, \; +6, \; -3, \; 0.$$

Wie man sieht, verringern sich diese Amplituden in arithmetischer Progression: Bei jeder Schwingung verringert sich die Amplitude um 3 mm.

Hieraus können wir schließen, daß das Abklingen der Schwingungen des betrachteten Apparates durch die konstante Reibung in seinen Gelenken hervorgerufen wird. Wir stellen fest, daß

$$\frac{2K}{c} = 3\,\text{mm}$$

ist, wobei K die auf die schreibende Spitze reduzierte Reibung und c die Federkonstante ist (gleichfalls auf die schreibende Spitze reduziert).

Die Schwingungsdauer τ einer Periode der Eigenschwingungen des Apparates (d. h. die Zeit einer vollen Schwingung) ist gleich 0,92 s. Hieraus finden wir die Eigenfrequenz des Apparates:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\tau} = 6{,}8\,\frac{1}{\text{s}}.$$

Da $c = \lambda^2 a$ ist, gilt

$$\frac{K}{a} = \lambda^2 \frac{K}{c} = \frac{3}{2} \cdot 46 = 69 \, \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}.$$

Die Größe a (die Masse des auf die schreibende Spitze reduzierten Apparates) können wir errechnen, wenn wir die Konstruktion des Apparates und die Abmessungen sowie das Gewicht seiner Teile kennen. Ist die Größe a bekannt, so findet man aus der soeben aufgeschriebenen Wechselbeziehung die auf die schreibende Spitze reduzierte Reibungskraft K.

§ 141. Die erzwungenen Schwingungen

Wir gehen nun zur Betrachtung der erzwungenen Schwingungen unseres Systems über. Wir werden voraussetzen, daß an den Punkten unseres Systems außer den Kräften $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die ein Potential besitzen, auch noch die Kräfte $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ angreifen, die sich im Laufe der Zeit nach einem vorgegebenen Gesetz verändern; diese Kräfte werden wir Erregerkräfte nennen; der größeren Allgemeingültigkeit wegen wollen wir auch die Widerstandskräfte $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ in Betracht ziehen, die wir als geschwindigkeitsproportional ansehen werden.

Die Differentialgleichung der Bewegung unseres Systems hat dann die Form

$$a\ddot{q} = -cq - k\dot{q} + S, \tag{1}$$

wobei S die verallgemeinerte Erregerkraft ist. Wir wollen diese Größe berechnen. Es gilt:

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} \left(S_{ix} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}q} + S_{iy} \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}q} + S_{iz} \frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}q} \right),$$

wobei S_{ix}, S_{iy}, S_{iz} die Komponenten der Kräfte $\mathfrak{S}_i$ auf den kartesischen Koordinatenachsen und x_i, y_i, z_i die kartesischen Koordinaten des Angriffspunktes dieser Kraft sind.

Beachten wir die Gln. (3), § 139, so erhalten wir

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} \left(L^{(i)} S_{ix} + M^{(i)} S_{iy} + N^{(i)} S_{iz} \right).$$

Wir setzen voraus, daß sich die Erregerkräfte $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ im Laufe der Zeit sowohl der Größe als auch der Richtung nach gemäß einem *vorgegebenen Gesetz* verändern; hieraus folgt, daß die Komponenten dieser Kräfte S_{ix}, S_{iy}, S_{iz} *vorgegebene* Zeitfunktionen sind. In einem solchen Falle ist die verallgemeinerte Kraft S, die durch die soeben aufgeschriebene Gleichung bestimmt wird, eine vorgegebene Zeitfunktion:

$$S = S(t).$$

Dividieren wir die Gl. (1) durch a und führen die früheren Bezeichnungen

$$\lambda^2 = \frac{c}{a}, \qquad 2\nu = \frac{k}{a}$$

ein, so erhalten wir endgültig

$$\ddot{q} + 2\nu\dot{q} + \lambda^2 q = \frac{1}{a} S(t). \qquad (2)$$

Beim Integrieren dieser Gleichung wenden wir die Methode der Variation der Konstanten an. Die homogene Gleichung

$$\ddot{q} + 2\nu\dot{q} + \lambda^2 q = 0$$

hat folgendes allgemeine Integral (wir setzen den Fall des kleinen Widerstandes $\nu < \lambda$ voraus):

$$q = e^{-\nu t}(A\cos\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}\,t + B\sin\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}\,t),$$

wobei A und B willkürliche Konstanten sind.

Wir führen die Bezeichnung

$$\lambda_1 = \sqrt{\lambda^2 - \nu^2}$$

ein.

Dann ist

$$q = e^{-\nu t}(A\cos\lambda_1 t + B\sin\lambda_1 t). \qquad (3)$$

Nun suchen wir das allgemeine Integral der inhomogenen Gl. (2) in der Form (3), indem wir A und B als zu bestimmende Zeitfunktionen betrachten. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir:

$$\dot{q} = e^{-\nu t}\Big\{-\nu(A\cos\lambda_1 t + B\sin\lambda_1 t) + \lambda_1(-A\sin\lambda_1 t + B\cos\lambda_1 t) + \dot{A}\cos\lambda_1 t + \dot{B}\sin\lambda_1 t\Big\}.$$

Wenn wir den gesuchten Funktionen A und B die Bedingung

$$\dot{A}\cos\lambda_1 t + \dot{B}\sin\lambda_1 t = 0 \qquad (4)$$

auferlegen, ergibt sich

$$\dot{q} = e^{-\nu t}\Big\{-\nu(A\cos\lambda_1 t + B\sin\lambda_1 t) + \lambda_1(-A\sin\lambda_1 t + B\cos\lambda_1 t)\Big\}. \qquad (5)$$

Ferner gilt:

$$\ddot{q} = e^{-\nu t}\Big\{(\nu^2 - \lambda_1^2)(A\cos\lambda_1 t + B\sin\lambda_1 t) - 2\nu\lambda_1(-A\sin\lambda_1 t + B\cos\lambda_1 t) + \lambda_1(-\dot{A}\sin\lambda_1 t + \dot{B}\cos\lambda_1 t)\Big\}. \qquad (6)$$

Setzen wir die Ausdrücke (3), (5) und (6) der Größen q, $\dot{q}$ und $\ddot{q}$ in die Gl. (2) ein, so finden wir

$$-\dot{A}\sin\lambda_1 t + \dot{B}\cos\lambda_1 t = \frac{e^{\nu t}}{a\lambda_1} S(t). \qquad (7)$$

Also haben wir zur Bestimmung der Funktionen A und B die Gl. (4) und (7). Lösen wir diese Gleichung nach $\dot{A}$ und $\dot{B}$ auf, so folgt:

$$\dot{A} = -\frac{e^{\nu t}}{a\lambda_1} S(t) \sin \lambda_1 t,$$

$$\dot{B} = \frac{e^{\nu t}}{a\lambda_1} S(t) \cos \lambda_1 t.$$

Durch Integration ergibt sich:

$$A = -\frac{1}{a\lambda_1} \int_0^t e^{\nu\tau} S(\tau) \sin \lambda_1 \tau \, d\tau + C_1,$$

$$B = \frac{1}{a\lambda_1} \int_0^t e^{\nu\tau} S(\tau) \cos \lambda_1 \tau \, d\tau + C_2.$$

Hierin sind C_1 und C_2 beliebige Konstanten; mit dem Buchstaben τ ist die Integrationsvariable bezeichnet, die in den Grenzen von 0 bis t genommen wird. Setzen wir diese Beziehungen für A und B in (3) ein, so erhalten wir:

$$q = e^{-\nu t}(C_1 \cos \lambda_1 t + C_2 \sin \lambda_1 t)$$
$$+ \frac{e^{-\nu t}}{a\lambda_1} \left\{ \sin \lambda_1 t \int_0^t e^{\nu\tau} S(\tau) \cos \lambda_1 \tau \, d\tau - \cos \lambda_1 t \int_0^t e^{\nu\tau} S(\tau) \sin \lambda_1 \tau \, d\tau \right\}.$$

Dieses Resultat kann man in anderer Form darstellen, wenn man beachtet, daß die von τ unabhängigen Faktoren $e^{-\nu t} \sin \gamma_1 t$ und $e^{-\nu t} \cos \lambda_1 t$ unter das entsprechende Integral gezogen werden können. Endgültig erhalten wir

$$q = e^{-\nu t}(C_1 \cos \lambda_1 t + C_2 \sin \lambda_1 t) + \frac{1}{a\lambda_1} \int_0^t e^{-\nu(t-\tau)} S(\tau) \sin \lambda_1 (t-\tau) \, d\tau. \qquad (8)$$

Setzen wir dieses Resultat in die Gln. (12), § 136, ein, so erhalten wir Ausdrücke derselben Form für die Verrückungen u_i, v_i, w_i.

Das erste Glied in der Gl. (8) entspricht den Eigenschwingungen des Systems, welche stets die erzwungenen Schwingungen begleiten. Das zweite Glied ergibt die erzwungenen Schwingungen, die durch die Wirkung der Erregerkräfte hervorgerufen werden.

Wenn in einem System die Widerstände fehlen, d. h., wenn $\nu = 0$ ist, nimmt die Gl. (8) folgende Form an:

$$q = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t + \frac{1}{a\lambda} \int_0^t S(\tau) \sin \lambda (t-\tau) \, d\tau. \qquad (9)$$

Die willkürlichen Konstanten C_1 und C_2 in dieser Gleichung sowie auch Gl. (8) müssen aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden, d. h. aus den ursprünglichen Werten $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$ bei $t = 0$. Wir bestimmen jetzt die Konstanten der Gl. (9). Differenzieren wir nach der Zeit, so ist

$$\dot{q} = -\lambda C_1 \sin \lambda t + \lambda C_2 \cos \lambda t + \frac{1}{a} \int_0^t S(\tau) \cos \lambda (t-\tau) \, dt.$$

Setzen wir hier und in (9) $t = 0$, so erhalten wir:

$$q_0 = C_1, \qquad \dot{q}_0 = \lambda C_2.$$

Wir führen die hieraus folgenden Werte für C_1 und C_2 in die Gl. (9) ein und erhalten

$$q = q_0 \cos \lambda t + \frac{\dot{q}_0}{\lambda} \sin \lambda t + \frac{1}{a \lambda} \int_0^t S(\tau) \sin \lambda (t - \tau)\, d\tau.$$

Hierin entspricht das letzte Glied der Gleichung der Bewegung des Systems unter der Wirkung der angreifenden Erregerkräfte; die Bewegung beginnt aus dem Gleichgewichtszustand ($q_0 = 0$) ohne Anfangsgeschwindigkeit ($\dot{q}_0 = 0$). Die ersten beiden Glieder stellen die Eigenschwingungen dar, die von der Anfangslage des Systems und dessen Anfangsgeschwindigkeiten abhängen.

§ 142. Der Fall einer periodischen Erregerkraft. Die Resonanz

Besonders häufig begegnet man in der Praxis einem Spezialfall von besonderer Bedeutung: Die verallgemeinerte Erregerkraft S verändert sich im Laufe der Zeit periodisch. In diesem Falle kann man zum Integrieren der Gl. (2), § 141, ein anderes Verfahren anwenden. Das gemeinte Verfahren gründet sich auf die harmonische

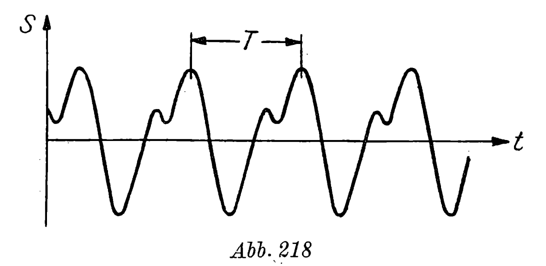


Abb. 218

Analyse der periodischen Funktion $S = S(t)$, d. h. auf die Zerlegung dieser Funktion in eine FOURIER-Reihe. Nehmen wir an, daß die graphische Darstellung der Funktion $S = S(t)$ die in Abb. 218 dargestellte Form hat. Wir bezeichnen die Periode dieser Funktion mit T (Abb. 218); die Größe

$$p = \frac{2\pi}{T}$$

nennen wir die Grundfrequenz der Veränderung der Kraft S. Wie bekannt, kann die Funktion $S = S(t)$ in die Reihe

$$S = S_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \cos npt + B_n \sin npt) \tag{1}$$

zerlegt werden, wobei S_0, A_n und B_n konstante Größen sind. Die Größe S_0 ist der Mittelwert der Funktion S und wird durch die Beziehung

$$S_0 = \frac{1}{T} \int_0^T S(t)\,\mathrm{d}\,t \tag{2}$$

bestimmt; zur Bestimmung der Konstanten A_n und B_n gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cos n\,p\,t\,\mathrm{d}\,t, \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \sin n\,p\,t\,\mathrm{d}\,t. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Das Glied

$$A_n \cos n\,p\,t + B_n \sin n\,p\,t$$

heißt die n-te *harmonische Komponente* oder n-te *harmonische* periodische Funktion von $S\ (t)$; die Zerlegung dieser Funktion in die Reihe (1) heißt *harmonische Analyse* der Funktion $S\ (t)$.

Nehmen wir

$$A_n = K_n \sin \gamma_n,$$

$$B_n = K_n \cos \gamma_n$$

an, woraus

$$K_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

und

$$\operatorname{tg} \gamma_n = \frac{A_n}{B_n}$$

folgt, so können wir der Zerlegung (1) folgende Form geben:

$$S = S_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} K_n \sin (n\,p\,t + \gamma_n).$$

Die Konstanten K_n und γ_n heißen *Amplitude* und *Anfangsphase* der n-ten harmonischen Funktion $S\ (t)$.

Eine Berechnung nach den Gln. (2) und (3) führt nur in seltenen Fällen (bei einer besonders einfachen Form der Funktion $S\ (t)$) zu genauen Werten der Konstanten S_0, A_n und B_n; in den meisten Fällen muß man sich mit deren angenäherten Werten zufrieden geben, wobei man zu ihrer Bestimmung verschiedenartige Verfahren der annähernden harmonischen Analyse anwendet. Wir gehen auf keine Einzelheiten dieser Frage ein, sondern verweisen den Leser auf die entsprechende Literatur. Wir wollen nur erwähnen, daß in diesem Fall auch spezielle Apparate, genannt „harmonische Analysatoren“ (Analysator von Mader, von Henrici u. a.) von großem Nutzen sein können; diese Analysatoren geben automatisch die Werte der Koeffizienten A_n und B_n für eine größere oder kleinere Anzahl der ersten harmonischen Komponenten der zu analysierenden Funktion an.

Wir wollen annehmen, daß die harmonische Analyse unserer periodischen Erregerkraft S auf diese oder jene Art durchgeführt ist, d. h., daß die Konstanten S_0, A_n und B_n der Gl. (1) ermittelt sind. Setzen wir diese Zerlegungsformel in den rechten Teil der Gl. (2), § 141, ein, so ergibt sich

$$\ddot{q} + 2\nu\dot{q} + \lambda^2 q = \frac{S_0}{a} + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n \cos npt + B_n \sin npt). \tag{4}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung setzt sich aus einer beliebigen Partikulärlösung und der Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung zusammen. Was die homogene Gleichung

$$\ddot{q} + 2\nu\dot{q} + \lambda^2 q = 0$$

anbetrifft, so ist uns ihre Lösung bereits bekannt. Für den Fall eines kleinen Widerstandes ($\nu < \lambda$) hat sie die Form

$$q = \alpha e^{-\nu t}\sin\left(\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}\, t + \beta\right),$$

wobei α und β beliebige Konstanten sind.

Nun ist nur noch irgendeine Partikulärlösung der Gl. (4) zu finden. Wir werden diese Partikulärlösung in Form der Fourier-Reihe

$$q = q_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}(a_n \cos npt + b_n \sin npt) \tag{5}$$

suchen, wobei q_0, a_n und b_n unbestimmte Koeffizienten sind, die bestimmt werden müssen. Setzen wir diesen Ausdruck für q in die Gl. (4) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\lambda^2 q_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}\Big\{&\left[(\lambda^2 - n^2p^2)a_n + 2\nu np b_n\right]\cos npt \\ &+ \left[(\lambda^2 - n^2p^2)b_n - 2\nu np a_n\right]\sin npt\Big\} \\ &= \frac{S_0}{a} + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n \cos npt + B_n \sin npt).\end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist in dem Falle der rechten Seite identisch, wenn

$$\lambda^2 q_0 = \frac{S_0}{a},$$

$$(\lambda^2 - n^2p^2)a_n + 2\nu np b_n = \frac{A_n}{a},$$

$$(\lambda^2 - n^2p^2)\, b_n - 2\nu np a_n = \frac{B_n}{a}$$

ist.

Hieraus erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} q_0 &= \frac{S_0}{a\lambda^2} = \frac{S_0}{c}, \\ a_n &= \frac{(\lambda^2 - n^2p^2)A_n - 2\nu n p B_n}{a\left[(\lambda^2 - n^2p^2)^2 + 4\nu^2 n^2 p^2\right]}, \\ b_n &= \frac{(\lambda^2 - n^2p^2)B_n + 2\nu n p A_n}{a\left[(\lambda^2 - n^2p^2)^2 + 4\nu^2 n^2 p^2\right]}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Fügen wir zu der Partikulärlösung (5) die Lösung der homogenen Gleichung hinzu, so erhalten wir die allgemeine Lösung der Gl. (4):

$$q = q_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos npt + b_n \sin npt) + \alpha e^{-\nu t} \sin\left(\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}\, t + \beta\right), \tag{7}$$

wobei α, β beliebige Konstanten sind, und q_0, a_n, b_n durch die Gleichungen (6) bestimmt sind.

Das Glied q_0 bezeichnet die konstante Abweichung des Systems von seiner Gleichgewichtslage; diese Abweichung wird durch die Wirkung des Mittelwertes der Erregerkraft S_0 hervorgerufen. Die in der Gl. (7) an zweiter Stelle stehende unendliche Reihe entspricht den periodischen Schwingungen mit der Frequenz p, die in einzelne harmonische Komponenten zerlegt sind; dies sind erzwungene Schwingungen, die durch die Wirkung der sich periodisch verändernden Erregerkraft hervorgerufen werden. Diesen erzwungenen Schwingungen werden abklingende Eigenschwingungen des Systems überlagert, denen das letzte Glied in der Gl. (7) entspricht.

Wie aus dieser Gleichung ersichtlich ist, ruft jede harmonische Komponente im Ausdruck der verallgemeinerten Erregerkraft S die entsprechenden harmonischen Schwingungen des Systems hervor; durch Überlagerung bilden diese harmonischen Schwingungen eine zusammengesetzte erzwungene schwingende Bewegung des Systems.

Wir wollen uns mit dem Spezialfall beschäftigen, in dem die Eigenfrequenz des Systems λ gleich der Frequenz einer der harmonischen Komponenten der Erregerkraft ist. Wir setzen voraus, daß die Eigenfrequenz λ gleich der Frequenz der i-ten harmonischen Komponente der Erregerkraft ist, d. h., daß

$$\lambda = i p$$

ist, wobei i eine ganze Zahl ist.

Nach den Gln. (6) gilt:

$$a_i = -\frac{B_i}{2\nu i p a} = -\frac{B_i}{2\nu\lambda a},$$

$$b_i = \frac{A_i}{2\nu i p a} = \frac{A_i}{2\nu\lambda a}.$$

Folglich wird die i-te harmonische Komponente im Ausdruck der erzwungenen Schwingungen folgende Form haben:

$$q = a_i \cos i p t + b_i \sin i p t = \frac{- B_i \cos \lambda t + A_i \sin \lambda t}{2 \nu \lambda a}.$$

Substituieren wir hier

$$A_i = K_i \sin \gamma_i, \qquad B_i = K_i \cos \gamma_i,$$

so erhalten wir

$$q = - \frac{K_i}{2 \nu \lambda a} \cos (\lambda t + \gamma_i)$$

oder

$$q = \frac{K_i}{2 \nu \lambda a} \sin \left(\lambda t + \gamma_i - \frac{\pi}{2} \right). \tag{8}$$

Hieraus ersieht man, daß die Amplitude der i-ten harmonischen Komponente im Ausdruck der Koordinate q um so größer sein wird, je kleiner der Dämpfungskoeffizient ν ist. Bei einem kleinen Widerstand und bei einem nicht zu kleinen Wert der Amplitude der i-ten harmonischen Komponente der Erregerkraft K_i kann sich die Amplitude

$$\frac{K_i}{2 \nu \lambda a}$$

als sehr bedeutend erweisen. Wir haben es hier mit der Erscheinung der *Resonanz* zu tun.

Wie wir sehen, tritt die Erscheinung der Resonanz in allen den Fällen ein, in denen die Eigenfrequenz des Systems λ gleich der Frequenz einer der harmonischen Komponenten der Erregerkraft ist, d. h., wenn

$$\lambda = i p$$

ist, wobei $i = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Mit anderen Worten, wir haben die Erscheinung der Resonanz bei allen Werten der Frequenz p der Erregerkraft, die durch die Beziehung

$$p = \frac{\lambda}{i}$$

gegeben sind. Hierin ist i eine ganze Zahl.

Alle diese Werte der Frequenz p heißen *kritische Frequenzen* der Erregerkraft.

Bei $p = \lambda$ wird die Resonanz durch die erste harmonische Komponente der Erregerkraft hervorgerufen; in diesem Fall sprechen wir von einer *Resonanz erster Ordnung*. Bei $p = \frac{\lambda}{2}$ tritt die zweite harmonische Komponente der Erregerkraft in die Resonanz, wir haben eine Resonanz *zweiter Ordnung* usw.

Theoretisch gesprochen, ist die Anzahl der kritischen Frequenzen p, bei denen die Erscheinung der Resonanz auftritt, unendlich groß. Man muß jedoch im Auge behalten, daß die Amplituden K_i der entsprechenden harmonischen Komponenten der Erregerkraft bei großen Werten i gewöhnlich sehr klein sind. Infolgedessen sind ge-

wöhnlich nur die Resonanzen der ersten Ordnungen scharf ausgeprägt; in der Praxis braucht man nur mit diesen Resonanzen zu rechnen. Bemerkenswert ist, daß die Resonanz derjenigen Ordnung fehlen wird, deren harmonische Komponente bei der Zerlegung der Erregerkraft fehlt. Wenn z. B. $K_3 = 0$ ist, werden wir bei der kritischen Frequenz $p = \frac{\lambda}{3}$ keine Resonanz haben.

Die erzwungenen Schwingungen, die unter den Bedingungen der Resonanz entstehen, d. h. bei einer der kritischen Frequenzen der Erregerkraft, heißen *Resonanzschwingungen*. Wir nennen die Resonanzschwingung, die bei der i-ten kritischen Frequenz $p = \frac{\lambda}{i}$ der Erregerkraft entsteht, die Resonanzschwingung i-ter Ordnung und nehmen an, daß unser System eine Resonanzschwingung i-ter *Ordnung* ausführt.

Wenn der Dämpfungskoeffizient ν hinreichend klein und die Amplitude der i-ten harmonischen Komponente der Erregerkraft K_i nicht zu klein ist (d. h., wenn wir es mit einer scharf ausgeprägten Resonanz zu tun haben), wird die Amplitude

$$\frac{K_i}{2\,\nu\,\lambda\,a}$$

der i-ten harmonischen Komponente in der Zerlegung der Koordinate q die Amplitude aller übrigen harmonischen Komponenten in dieser Zerlegung bedeutend übersteigen. Wenn wir in der Gl. (7) alle harmonischen Komponenten außer der i-ten vernachlässigen und in dieser Gleichung auch das Glied vernachlässigen, das den abklingenden Eigenschwingungen (deren Amplitude nach Ablauf einer gewissen Zeit unbedeutend wird) entspricht, kommen wir zu der Gl. (8). Hieraus folgt, daß man die Gl. (8) als eine Näherungsgleichung der Resonanzschwingung i-ter Ordnung ansehen kann.

Wenn also die Resonanz hinreichend scharf ausgeprägt ist, dann sind die Resonanzschwingungen annähernd *harmonisch*. Ihre *Frequenz* ist gleich der Eigenfrequenz λ; ihre *Amplitude* ist proportional der Amplitude der entsprechenden harmonischen Komponente in der Zerlegung der Erregerkraft; die Phase eilt dieser harmonischen Komponente um $\frac{\pi}{2}$ hinterher.

Zum Abschluß dieses Paragraphen bemerken wir, daß man in den Gln. (6) die Glieder, die den Dämpfungskoeffizienten ν enthalten (wir setzen den Widerstand als hinreichend klein voraus), vernachlässigen kann, wenn wir es mit erzwungenen Schwingungen unter Bedingungen zu tun haben, die *hinreichend weit von der Resonanz entfernt* sind.

Auf diese Art erhalten wir die angenäherten Beziehungen

$$a_n = \frac{A_n}{a\,(\lambda^2 - n^2 p^2)}, \qquad b_n = \frac{B_n}{a\,(\lambda^2 - n^2 p^2)}$$

oder, wenn wir $a\lambda^2 = c$ setzen,

$$a_n = \frac{A_n}{c\left(1 - \frac{n^2 p^2}{\lambda^2}\right)}, \qquad b_n = \frac{B_n}{c\left(1 - \frac{n^2 p^2}{\lambda^2}\right)}. \tag{9}$$

Setzen wir dies in die Gl. (7) ein und vernachlässigen die abklingenden Eigenschwingungen, so ergibt sich

$$q = \frac{S_0}{c} + \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n \cos npt + B_n \sin npt}{1 - \frac{n^2 p^2}{\lambda^2}}. \tag{10}$$

Wir sehen, daß bei einer statischen Wirkung der Erregerkraft S (d. h. unter der Voraussetzung, daß sich die am System angreifenden Kräfte in jedem gegebenen Augenblick gegenseitig aufheben) die Beziehung

$$0 = -cq + S$$

Gültigkeit hat.

Diese Gleichung ergibt sich aus der Gl. (1), § 141, wenn man in der letzteren $\dot{q} = \ddot{q} = 0$ setzt.

Folglich hätten wir bei einer statischen Wirkung der Kraft S:

$$q = \frac{S}{c} = \frac{S_0}{c} + \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \cos npt + B_n \sin npt).$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit der Gl. (10), so sehen wir, daß die einzelnen harmonischen Komponenten in der Zerlegung dieser Kraft bei einer dynamischen Wirkung der Erregerkraft eine größere oder kleinere Bedeutung je nach der Größe des Faktors

$$\frac{1}{1 - \frac{n^2 p^2}{\lambda^2}}$$

erhalten.

Dieser Faktor erhält die Bezeichnung „dynamischer Koeffizient“. Wie wir sehen, entspricht in der Zerlegung der Erregerkraft jeder harmonischen Komponente ein eigener *dynamischer Koeffizient.*

Wir erinnern nochmals daran, daß die Gl. (10) nur unter solchen Bedingungen Gültigkeit hat, die hinreichend weit von der Resonanz entfernt sind.

§ 143. Der Indikator

Im Beispiel 12, § 38, stellten wir die Differentialgleichung der Bewegung des beweglichen Teiles eines Indikators auf und benutzten diese Gleichung zur Abschätzung des Fehlers der Aufzeichnungen dieses Apparates. Dabei setzten wir voraus, daß sich der Druck p im Zylinder der Maschine im Laufe der Zeit nach dem einfachen Gesetz einer Sinusfunktion verändert. Natürlich ist diese Voraussetzung weit entfernt von der Wirklichkeit; tatsächlich verändert sich der Druck im Zylinder der Maschine periodisch nach einem viel komplizierteren Gesetz. In diesem Paragraphen werden wir von neuem die Frage nach der Fehlerhaftigkeit der Aufzeichnungen des Indikators stellen, unter Berücksichtigung der tatsächlichen Veränderung des Druckes im Zylinder.

Im § 38 wurde bereits klargestellt, daß es zur Bestimmung der Abhängigkeit zwischen dem Druck im Zylinder und den Aufzeichnungen des Apparates, die auf dem Indikatordiagramm registriert sind, notwendig ist, die Bewegung des beweglichen Teiles des Indikators näher zu untersuchen. Wir wollen die Differentialgleichung der Bewegung des beweglichen Teiles AB des Indikators (Abb. 219) aufstellen, indem wir diesen Teil als materiellen Punkt betrachten (und die Masse der Feder vernachlässigen). An unserem materiellen Punkt (wir bezeichnen ihn mit M, Abb. 220) greifen drei Kräfte an: die Schwerkraft $\mathfrak{P}$, die Dampf- oder Gaskraft $\mathfrak{S}$ und die elastische Reaktion der zusammengedrückten Feder $\mathfrak{F}$. Bezeichnen wir die Fläche des kleinen Indikatorkolbens mit σ und den Arbeitsdruck des Dampfes oder Gases auf 1 cm² mit p, so gilt:

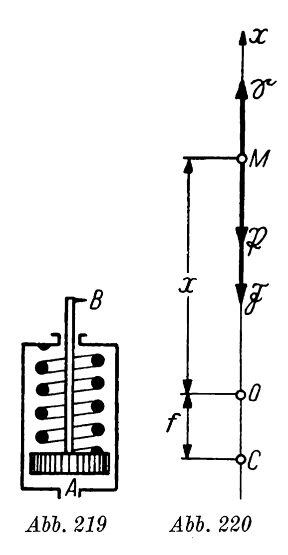


Abb. 219 Abb. 220

$$S = \sigma \cdot p .$$

Der Druck p verändert sich periodisch im Laufe der Zeit. In einer Dampfmaschine oder einem Zweitaktmotor ist die Periode T dieser Veränderungen gleich der Zeit einer vollen Umdrehung der Maschinenhauptwelle; in einem Viertaktmotor ist diese Periode gleich der Zeit von zwei vollen Umdrehungen der Hauptwelle.

Wir wollen uns mit dem Fall eines Viertaktmotors beschäftigen. Setzen wir die Rotation der Hauptwelle des Motors als gleichförmig voraus und bezeichnen die Winkelgeschwindigkeit dieser Rotation mit ω, so gilt $T\omega = 4\pi$, woraus

$$T = \frac{4\pi}{\omega}$$

folgt.

Folglich ist die Grundfrequenz der Druckveränderungen im Fall eines Viertaktmotors gleich

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{2},$$

für einen Zweitaktmotor ist diese Frequenz gleich ω.

Hieraus folgt, daß im Fall eines Viertaktmotors die Zerlegung des Druckes p in eine Fourier-Reihe die Form

$$p = p_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(C_n \cos n \frac{\omega}{2} t + D_n \sin n \frac{\omega}{2} t \right) \tag{1}$$

hat, wobei p_0 (mittlerer Druck), C_n und D_n konstante Größen sind.

In Abb. 221 ist eine graphische Darstellung des Druckes p für einen Viertaktmotor gegeben; auf der horizontalen Achse sind die Werte der Größe ωt (des Drehwinkels

der Welle), auf der vertikalen Achse die entsprechenden Werte des Druckes p abgetragen. In der Tabelle 12 sind die Werte des mittleren Druckes p_0 und auch die Werte der Koeffizienten C_n und D_n (in kg/cm²) bis zur neunten harmonischen Komponente angegeben.

Wir gehen nun zur Aufstellung der Differentialgleichung der Bewegung des beweglichen Indikatorteiles über. Wir bezeichnen die Lage des Punktes M, die der entspannten Feder entspricht, mit dem Buchstaben C (Abb. 220) und mit dem Buchstaben O

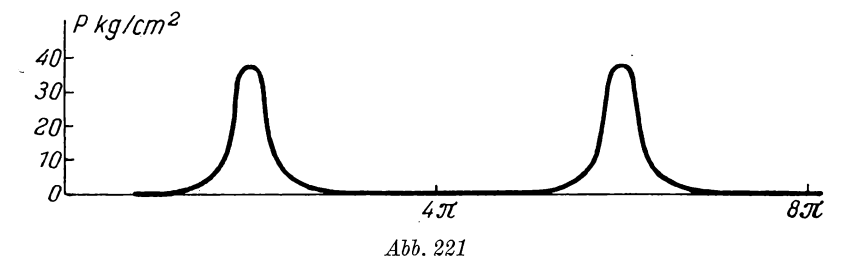


Abb. 221

jene Gleichgewichtslage, in der sich der Punkt M bei einem konstanten mittleren Druck p_0 im Zylinder befinden würde. Bezeichnen wir OM mit x und wählen die positive Richtung nach oben, so haben wir die Differentialgleichung der Bewegung

$$m\ddot{x} = S - P - F,$$

wobei m die Masse des beweglichen Indikatorteiles ist.

Wir bezeichnen mit f die Zusammendrückung der Feder in der statischen Gleichgewichtslage O, so daß $CO = f$ ist. Setzen wir in der soeben aufgeschriebenen Gleichung

$$F = c \cdot CM = c(f + x),$$

$$S = \sigma p = \sigma p_0 + \sigma \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(C_n \cos n \frac{\omega}{2} t + D_n \sin n \frac{\omega}{2} t \right)$$

(wobei c die Federkonstante ist), so erhalten wir:

$$m\ddot{x} = \sigma p_0 + \sigma \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(C_n \cos n \frac{\omega}{2} t + D_n \sin n \frac{\omega}{2} t \right) - P - cf - cx.$$

Die Zusammendrückung f wird durch die Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma p_0 - P - cf = 0$$

bestimmt.

Auf Grund dieser Bedingung fallen die konstanten Glieder auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung weg. Bringen wir das Glied cx auf die linke Seite der Gleichung, so erhalten wir:

$$m\ddot{x} + cx = \sigma \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(C_n \cos n \frac{\omega}{2} t + D_n \sin n \frac{\omega}{2} t \right).$$

Nachdem wir diese Gleichung durch m dividiert und

$$\frac{c}{m} = \lambda^2$$

gesetzt haben, erhalten wir endgültig:

$$\ddot{x} + \lambda^2 x = \frac{\sigma}{m} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(C_n \cos n \frac{\omega}{2} t + D_n \sin n \frac{\omega}{2} t \right). \tag{2}$$

Wir haben die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen gewonnen. Hier ist λ die Eigenfrequenz des Indikators.

Bei der Aufstellung der Differentialgleichung (2) haben wir die auf den beweglichen Indikatorteil wirkenden Widerstände (Reibung der schreibenden Spitze an dem Papier, Reibung im Apparat selbst usw.) nicht berücksichtigt. Diese Widerstände bedingen ein hinreichend schnelles Abklingen der Eigenschwingungen des Apparates. Wenn wir auf dieser Grundlage die Eigenschwingungen vernachlässigen und voraussetzen, daß die erzwungenen Schwingungen des Indikators unter Bedingungen vor sich gehen, die von der Resonanz genügend weit entfernt sind, ergibt sich gemäß Gl. (10), § 142,

$$x = \frac{\sigma}{c} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\left(C_n \cos n \frac{\omega}{2} t + D_n \sin n \frac{\omega}{2} t \right)}{1 - \frac{n^2 \omega^2}{4 \lambda^2}}.$$

Tabelle 12

$p_0 = 4{,}6$ kg/cm²

n	C_n (kg/cm²)	D_n (kg/cm²)
1	− 8,2	− 1,8
2	6,3	2,9
3	− 4,4	− 3,0
4	3,1	2,5
5	− 2,2	− 2,3
6	1,5	2,1
7	0,6	− 1,6
8	0,1	1,3
9	0,0	1,0

Multiplizieren wir diese Verschiebung des beweglichen Indikatorteiles mit der Konstanten c (die der Zusammendrückung der Feder um 1 cm entsprechende Kraft), so erhalten wir folgende Aufzeichnung des Indikators:

$$\sigma \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\left(C_n \cos n \frac{\omega}{2} t + D_n \sin n \frac{\omega}{2} t \right)}{1 - \frac{n^2 \omega^2}{4 \lambda^2}},$$

die auf dem Indikator-Diagramm registriert wird. Der Unterschied zwischen dieser Größe und dem wirklichen Wert des veränderlichen Druckes im Zylinder ist der

Fehler in den Aufzeichnungen des Indikators. Bezeichnen wir diesen Fehler mit η, so gilt

$$\eta = \sigma \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\left(C_n \cos n \frac{\omega}{2} t + D_n \sin n \frac{\omega}{2} t\right)}{1 - \frac{n^2 \omega^2}{4 \lambda^2}} - \sigma \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(C_n \cos n \frac{\omega}{2} t + D_n \sin n \frac{\omega}{2} t\right)$$

$$= \sigma \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\frac{n^2 \omega^2}{4 \lambda^2}}{1 - \frac{n^2 \omega^2}{4 \lambda^2}} \left(C_n \cos n \frac{\omega}{2} t + D_n \sin n \frac{\omega}{2} t\right)$$

$$= \sigma \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\left(C_n \cos n \frac{\omega}{2} t + D_n \sin n \frac{\omega}{2} t\right)}{\frac{4 \lambda^2}{n^2 \omega^2} - 1}.$$

Wie man sieht, setzt sich der Fehler η aus den Summanden zusammen, die den einzelnen harmonischen Komponenten des veränderlichen Druckes im Zylinder entsprechen. Jede harmonische Komponente ist in diesem Fehler mit dem Faktor

$$\frac{1}{\frac{4 \lambda^2}{n^2 \omega^2} - 1} \tag{3}$$

enthalten; je kleiner diese Faktoren sind, um so kleiner ist der Fehler der Indikatoraufzeichnungen.

In der Zerlegung des Druckes p wollen wir uns auf die ersten zehn harmonischen Komponenten beschränken; die folgenden harmonischen Komponenten haben äußerst kleine Amplituden. Wir sichern eine genügende Genauigkeit der Indikatoraufzeichnungen durch die Forderung, daß das Verhältnis $\lambda : \omega$ hinreichend groß ist. Im § 38 wurde bereits darauf hingewiesen, daß eine Indikatorfeder gewöhnlich so berechnet wird, daß das Verhältnis $\lambda : \omega$ nicht kleiner als 20 ist. Nehmen wir $\lambda : \omega = 20$ an, so erhalten wir für die Faktoren (3) folgende Werte:

Tabelle 13

n	$\frac{1}{\frac{4 \lambda^2}{n^2 \omega^2} - 1}$	n	$\frac{1}{\frac{4 \lambda^2}{n^2 \omega^2} - 1}$
1	0,0006	6	0,0230
2	0,0025	7	0,0316
3	0,0057	8	0,0417
4	0,0101	9	0,0535
5	0,0159	10	0,0667

Wie man sieht, sind unter den gemachten Voraussetzungen im Fehler η nur 0,06% der ersten harmonischen Komponente des Druckes p enthalten. Der Einfluß der folgenden harmonischen Komponenten auf den Fehler der Indikatoraufzeichnungen wächst zugleich mit der Ordnung der harmonischen Komponente. Berücksichtigen wir jedoch die Kleinheit der Amplituden der harmonischen Komponenten höherer Ordnungen, so können wir zugeben, daß unter der Bedingung $\lambda:\omega = 20$ die Genauigkeit der Indikatoraufzeichnungen hinreichend gewährleistet ist.

§ 144. Der Vibrograph von Geiger

Vibrographen sind Apparate, die zur Registrierung der Schwingungen von Maschinenteilen, Anlagen usw. dienen. In letzter Zeit hat der Vibrograph des Geigerschen Systems eine weite Verbreitung gefunden. Als ein weiteres Beispiel wollen wir kurz die Theorie dieses Apparates betrachten.

Der Apparat besteht im wesentlichen aus dem schweren Pendel K, das sich um die feste Achse O dreht und von einer Spiralfeder gestützt wird, deren eines Ende im festen Punkt A befestigt ist, während das andere Ende im Punkte B an dem Pendel angebracht ist. Die drehenden Bewegungen des Pendels K verwandeln sich mittels des Übertragungsmechanismus, der nicht auf der Abbildung dargestellt ist, in die geradlinige Bewegung einer schreibenden Spitze; die Verschiebungen dieser schreibenden Spitze werden auf einem Papierband registriert, das an der Spitze mit einer konstanten Geschwindigkeit in der zu den Verschiebungen der Spitze senkrechten Richtung vorbei bewegt wird. Auf diese Art registriert der Apparat die rotierenden Bewegungen des Pendels.

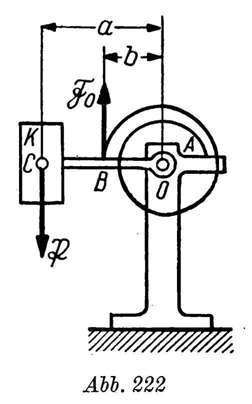


Abb. 222

Wir setzen voraus, daß das Pendel im Gleichgewichtszustand eine horizontale Lage einnimmt (im Apparat gibt es die Möglichkeit, das Pendelgleichgewicht in einer beliebigen anderen Lage einzustellen). In der Gleichgewichtslage wird die Schwerkraft $\mathfrak{P}$, die im Schwerpunkt des Pendels C angreift, durch die elastische Reaktion $\mathfrak{F}_0$ der im Punkte B angreifenden Feder aufgehoben. Bezeichnen wir $OC = a$, $OB = b$, so haben wir die Gleichgewichtsbedingung

$$P a - F_0 b = 0. \tag{1}$$

Wir wollen uns nun vorstellen, daß der Apparat auf einer horizontalen Ebene L aufgestellt ist, die vertikale Schwingungen um irgendeine mittlere Lage L_0 ausführt (Abb. 223). Auf die vertikalen Schwingungen des Stativs des Apparates wird das Pendel durch drehende Bewegungen um die Achse O reagieren. Diese drehenden Schwingungen des Pendels werden auf einem Papierband registriert, wie es weiter oben erklärt ist. Es fragt sich, ob man die auf diese Art gewonnene Aufzeichnung der Pendelschwingungen als eine hinreichend genaue Registrierung der Schwingungen der Ebene L, auf welcher der Apparat aufgestellt ist, ansehen kann.

Um auf diese Frage zu antworten, wollen wir die drehende Bewegung des Pendels, die durch die vertikalen Verrückungen des Stativs hervorgerufen ist, näher betrachten. Wir wollen die Differentialgleichung dieser Drehbewegung aufstellen.

Wenn der Apparat auf einer in vertikaler Richtung schwingenden Ebene aufgestellt ist, setzt sich die absolute Bewegung des Pendels aus der Translativbewegung mit dem Stativ und der Relativbewegung in bezug auf das Stativ zusammen. Die uns interessierende Drehbewegung des Pendels ist die Relativbewegung.

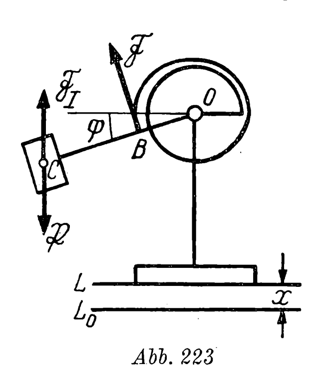


Abb. 223

Aus dem Kapitel VIII wissen wir, daß man bei der Relativbewegung alle Gesetze der Dynamik anwenden kann, die bei der absoluten Bewegung Geltung haben, unter der Bedingung, daß zu den wirkenden Kräften die entsprechenden Trägheitskräfte hinzugefügt werden. Wir wissen auch, daß als zusätzliche Trägheitskräfte die translativen Trägheitskräfte erscheinen, die gleich dem Produkt der Masse mal Translativbeschleunigung sind und entgegengesetzt zu dieser Beschleunigung verlaufen, wenn die Translativbewegung eine fortschreitende ist (und gerade damit haben wir es im gegebenen Beispiel zu tun). Um also bei der uns interessierenden Drehbewegung des Pendels die Gleichungen der Dynamik der absoluten Bewegung anwenden zu können, müssen wir zu den wirkenden Kräften (Schwerkraft und elastische Reaktion der Feder) die translativen Trägheitskräfte F_{Ii} aller materiellen Punkte m_i hinzufügen, die zum Pendel gehören.

Wir richten die x-Achse und den ihr entsprechenden Einheitsvektor $\mathfrak{i}$ vertikal nach oben. In einem solchen Falle ist

$$\mathfrak{F}_{Ii} = - m_i w \mathfrak{i},$$

wobei w die algebraische Größe der Beschleunigung der Bewegung der Ebene L ist. Die Trägheitskräfte werden auf eine Resultierende reduziert, die gleich

$$\mathfrak{F}_I = F_I \mathfrak{i} = - \sum m_i w \mathfrak{i} = - M w \mathfrak{i}$$

ist, wobei $M = \sum m_i$ die Masse des Pendels ist; diese Resultierende greift im Schwerpunkt C des Pendels an (siehe § 59).

Wir wollen nun die Differentialgleichung der Drehung unseres Pendels aufstellen. Bezeichnen wir den Ausschlagswinkel von der horizontalen Lage mit φ und das Trägheitsmoment in bezug auf die Achse O mit J, so gilt für die kleinen Pendelschwingungen

$$J \ddot{\varphi} = P a - F b - F_I a,$$

wobei F die elastische Reaktion der Feder ist.

Wir haben:

$$F = F_0 + c \varphi,$$

wobei c die Federkonstante ist[1]. Setzen wir dies in die vorhergehende Gleichung ein, so erhalten wir:

$$J\ddot{\varphi} = Pa - F_0 b - cb\varphi - F_I a$$

oder auf Grund der Gleichgewichtsbedingung (1)

$$J\ddot{\varphi} + cb\varphi = -F_I a\,. \tag{2}$$

Wir wollen uns nun mit der Berechnung der Größe der Trägheitskraft F_I befassen. Nehmen wir an, die Ebene L, auf welcher der Apparat steht, führt periodische Schwingungen aus, deren Grundfrequenz wir mit p bezeichnen. Wenn wir die vertikale Verrückung der Ebene L, von der mittleren Lage L_0 abgetragen, mit x bezeichnen und diese Verrückung in eine FOURIER-Reihe zerlegen, erhalten wir

$$x = \sum_{n=1}^{n=\infty} (C_n \cos npt + D_n \sin npt), \tag{3}$$

wobei C_n und D_n konstante Größen sind.

Es ist

$$w = \ddot{x}\,.$$

Folglich gilt

$$w = -\sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 p^2 (C_n \cos npt + D_n \sin npt),$$

woraus

$$F_I = -Mw = M\sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 p^2 (C_n \cos npt + D_n \sin npt)$$

folgt.

Setzen wir diese Beziehung in Gl. (2) ein, so erhalten wir

$$J\ddot{\varphi} + cb\varphi = -Ma\sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 p^2 (C_n \cos npt + D_n \sin npt).$$

Wir haben die Differentialgleichung der erzwungenen Pendelschwingungen gewonnen. Die Eigenfrequenz des Apparates ist gleich

$$\lambda = \sqrt{\frac{cb}{J}}\,.$$

Vernachlässigen wir die Eigenschwingungen des Pendels, die infolge der im Apparat vorhandenen Reibungen abklingen, und setzen wir ferner voraus, daß die erzwungene

---

[1] Dieser Koeffizient hat die Bedeutung

$$c = \frac{EI}{bl}\,,$$

wobei E der Elastizitätsmodul des Materials der Feder ist, I das Trägheitsmoment des Querschnittes der Feder in bezug auf die Hauptachse, die senkrecht zur Krümmungsebene verläuft, l die Länge der Feder; b hat die in Abb. 222 angegebene Bedeutung.

Schwingungen unter Bedingungen vor sich gehen, die hinreichend weit von der Resonanz entfernt sind, und benutzen die Gl. (10), § 142, so gilt

$$\varphi = -\frac{M a}{c b} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^2 p^2}{1 - \frac{n^2 p^2}{\lambda^2}} (C_n \cos n p t + D_n \sin n p t).$$

Es ist

$$c b = J \lambda^2,$$

und somit erhalten wir endgültig

$$\varphi = \frac{M a}{J} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(C_n \cos n p t + D_n \sin n p t)}{1 - \frac{\lambda^2}{n^2 p^2}}. \tag{4}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung des Pendels, die im Apparat registriert wird. Vergleichen wir dieses Resultat mit der Gl. (3), so sehen wir, daß der Winkel φ nicht proportional der Verrückung x ist, und folglich kopiert die Bewegung des Pendels nicht genau die Bewegungen der Ebene, auf die der Apparat gesetzt ist. Hieraus folgt, daß das Vibrogramm die Bewegung dieser Ebene mit einigen Verzerrungen wiedergibt. Je mehr sich der Ausdruck

$$\frac{1}{1 - \frac{\lambda^2}{n^2 p^2}} \tag{5}$$

dem Werte 1 nähert, desto kleiner wird diese Verzerrung sein. Folglich ist es notwendig, daß das Verhältnis $\lambda : p$ hinreichend klein ist, damit ein Vibrogramm gewonnen wird, das genügend genau die Schwingungen der Ebene, auf welcher der Apparat steht, wiedergibt.

In der nachstehenden Tabelle sind die Werte der Größen (5) unter der Voraussetzung $\lambda : p = 0{,}1$ angeführt.

Tabelle 14

n	1	2	3
$\frac{1}{1 - \frac{\lambda^2}{n^2 p^2}}$	1,0101	1,0025	1,0011

Wie aus den Zahlen dieser Tabelle ersichtlich ist, sind die Verzerrungen des Vibrogramms in diesem Fall hinreichend klein. Bei $\lambda : p = 0{,}25$ wären die entsprechenden Werte der Faktoren (5) folgende:

Tabelle 15

n	1	2	3
$\frac{1}{1 - \frac{\lambda^2}{n^2 p^2}}$	1,0667	1,0159	1,0070

Dieses ergibt ernstere Entstellungen des Vibrogramms. Man kann die durch den Vibrographen erhaltene Aufzeichnung der Schwingungen kaum als hinreichend zuverlässig betrachten, wenn die Grundfrequenz p der registrierten Schwingungen die Eigenfrequenz des Apparates nicht um mindestens das 4fache übersteigt. Im Apparat gibt es die Möglichkeit, im Bedarfsfall die Eigenfrequenz durch Vergrößerung des Trägheitsmomentes des Pendels herabzusetzen (durch Befestigung einer zusätzlichen Masse an dasselbe oder durch Einbau einer schwächeren Feder).

Wir haben die Anwendung des Vibrographen von Geiger zur Aufzeichnung von vertikalen Schwingungen betrachtet. Er kann gleichfalls zur Registrierung von horizontalen Schwingungen und Schwingungen in einer beliebigen geneigten Richtung benutzt werden; in diesen Fällen muß das Pendel vertikal oder schräg unter dem entsprechenden Winkel eingestellt werden.

KAPITEL XXIV

DIE KLEINEN SCHWINGUNGEN EINES SYSTEMS MIT ZWEI FREIHEITSGRADEN

§ 145. Die Eigenschwingungen zweier Massen mit elastischer Kopplung

Wir gehen nun zum Studium der Schwingungen eines Systems über, das mehrere Freiheitsgrade besitzt. Wir stellen die Untersuchung des allgemeinen Problems von den Schwingungen der Systeme mit einer beliebigen Anzahl von Freiheitsgraden für das folgende Kapitel zurück und wollen uns jetzt mit dem einfachsten und dabei praktisch wichtigsten Spezialfall eines Systems mit zwei Freiheitsgraden befassen. Wir beginnen mit der Untersuchung eines einfachen Beispiels.

Wir wollen uns eine Last M_1 vorstellen, die am festen Punkte O an einer Schraubenfeder aufgehängt ist; an die Last M_1 ist mittels einer zweiten Feder die Last M_2 aufgehängt (Abb. 224). Wir betrachten die vertikalen Eigenschwingungen des Systems um seine Gleichgewichtslage.

Wir bezeichnen die Massen der Lasten M_1 und M_2 mit m_1 und m_2, ihr Gewicht mit P_1 und P_2; die Massen der Federn vernachlässigen wir.

In Abb. 224a ist die Gleichgewichtslage unseres Systems dargestellt. Wir stellen uns vor, daß das System aus dieser Gleichgewichtslage gebracht und sich selbst überlassen ist. Unter der Wirkung der elastischen Kräfte der Federn beginnen Eigenschwingungen des Systems. Die Lage des Systems, die dieses in einem bestimmten Augenblick während dieser Schwingungen einnimmt, ist in der Abb. 224b dargestellt. Wir wollen die Differentialgleichungen der Bewegung unseres Systems aufstellen.

Wir bezeichnen die Abweichungen der Lasten M_1, M_2 (die wir als Massenpunkte betrachten) von ihren Gleichgewichtslagen mit x_1 und x_2. Da durch die Koordinaten x_1 und x_2 die Lage des Systems eindeutig bestimmt wird (wir setzen nur vertikale Verrückungen der Lasten voraus), folgern wir, daß unser System zwei Freiheitsgrade besitzt. Bezeichnen wir die Größe der an der Last M_1 angreifenden elastischen Reaktion der oberen Feder mit F_1 und die Größe der elastischen Reaktionen, die an beiden Lasten angreifen mit F_2 und stellen die Differentialgleichungen der Bewegung der beiden Lasten bezüglich der vertikalen x-Achse auf, so erhalten wir:

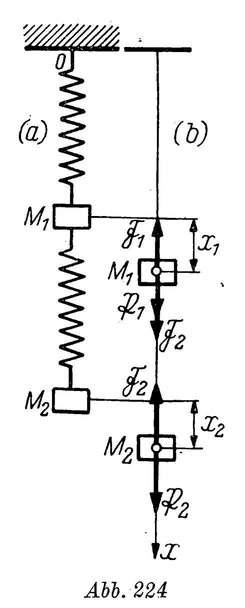


Abb. 224

$$m_1 \ddot{x}_1 = P_1 + F_2 - F_1,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = P_2 - F_2.$$

Wir bezeichnen die Federkonstanten der oberen und der unteren Feder mit c_1 bzw c_2 und die Verlängerungen der Federn im statischen Gleichgewichtszustand des Systems mit f_1 und f_2. Wir bemerken, daß beide Federn beim Übergang des Systems aus der Gleichgewichtslage (a) in die Lage (b) (Abb. 224) eine zusätzliche Verlängerung erhalten, die entsprechend gleich x_1 bzw. $x_2 - x_1$ sind. Damit ergibt sich:

$$F_1 = c_1(f_1 + x_1),$$

$$F_2 = c_2(f_2 + x_2 - x_1).$$

Setzen wir dies in die vorhergehenden Gleichungen ein, so erhalten wir:

$$m_1 \ddot{x}_1 = P_1 + c_2 f_2 + c_2 x_2 - c_2 x_1 - c_1 f_1 - c_1 x_1,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = P_2 - c_2 f_2 - c_2 x_2 + c_2 x_1.$$

Wir bemerken nun, daß sich die an jeder der Lasten M_1 und M_2 angreifenden Kräfte im Gleichgewichtszustand des Systems gegenseitig aufheben. Wenn wir im Auge behalten, daß im Gleichgewichtszustand die elastischen Reaktionen der Federn die Werte $F_1 = c_1 f_1$ und $F_2 = c_2 f_2$ haben, erhalten wir die Gleichgewichtsbedingungen:

$$P_1 + c_2 f_2 - c_1 f_1 = 0,$$

$$P_2 - c_2 f_2 = 0.$$

Auf Grund dieser Gleichgewichtsbedingungen fallen die konstanten Glieder in den von uns aufgestellten Differentialgleichungen der Bewegung fort. Durch Einführung der Abkürzungen

$$\frac{c_1 + c_2}{m_1} = 2a, \qquad \frac{c_2}{m_1} = 2b, \qquad \frac{c_2}{m_2} = 2c \tag{1}$$

bekommen die Differentialgleichungen der Bewegung des Systems die endgültige Form

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2a\,x_1 - 2b\,x_2 = 0\,, \\ \ddot{x}_2 - 2c\,x_1 + 2c\,x_2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Wir erhalten ein System von zwei homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Zur Integration dieses Systems werden wir eine Partikulärlösung in der Form

$$\left.\begin{aligned} x_1 = \alpha^{(1)} \sin(\lambda t + \beta)\,, \\ x_2 = \alpha^{(2)} \sin(\lambda t + \beta) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ansetzen, wobei $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, λ und β Konstante sind.

Setzen wir diese Beziehungen für x_1 und x_2 in die Gln. (2) ein und kürzen durch $\sin(\lambda t + \beta)$, so erhalten wir die Gleichungen

$$-\lambda^2\alpha^{(1)} + 2a\,\alpha^{(1)} - 2b\,\alpha^{(2)} = 0\,,$$

$$-\lambda^2\alpha^{(2)} - 2c\,\alpha^{(1)} + 2c\,\alpha^{(2)} = 0$$

oder

$$\left.\begin{aligned} (2a - \lambda^2)\,\alpha^{(1)} - 2b\,\alpha^{(2)} = 0\,, \\ -2c\,\alpha^{(1)} + (2c - \lambda^2)\,\alpha^{(2)} = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

die durch die Konstanten $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ und λ befriedigt werden müssen.

Diese Gleichungen haben die triviale Lösung $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0$, die zu der trivialen Partikulärlösung $x_1 = x_2 = 0$ der Gln. (2) führt, d. h. uns zum Gleichgewichtszustand des Systems zurückführt. Die in bezug auf die Konstanten $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(2)}$ linearen und homogenen Gln. (4) lassen eine von Null verschiedene Lösung nur in dem Fall zu, daß die Koeffizientendeterminante dieses Systems gleich Null ist, d. h., wenn die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 2a - \lambda^2, & -2b \\ -2c, & 2c - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

Gültigkeit hat.

Wir haben eine Gleichung erhalten, die durch die Größe λ befriedigt werden muß, damit die Gln. (2) eine Partikulärlösung in der Form (3) zulassen. Lösen wir die gewonnene Determinante auf, so erhalten wir

$$\lambda^4 - 2(a + c)\,\lambda^2 + 4(a - b)\,c = 0\,.$$

Diese in bezug auf λ^2 quadratische Gleichung hat die Wurzeln

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^2 = a + c - \sqrt{(a + c)^2 - 4(a - b)\,c}\,, \\ \lambda_2^2 = a + c + \sqrt{(a + c)^2 - 4(a - b)\,c}\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß beide Wurzeln reell und positiv sind. Um zu zeigen, daß sie reell sind, stellen wir sie in der Form

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^2 &= a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4bc}, \\ \lambda_2^2 &= a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4bc} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

dar und bemerken, daß die Größen a, b und c, wie aus Gl. (1) ersichtlich, positive Zahlen sind. Die Wurzel λ_2^2 ist natürlich positiv. Um sich davon zu überzeugen, daß die Wurzel λ_1^2 gleichfalls positiv ist, genügt es festzustellen, daß $a > b$, wie das auch aus (1) zu ersehen ist, und daß folglich der Radikand in den Beziehungen (6) zahlenmäßig kleiner ist als $a + c$.

Ziehen wir die Quadratwurzel aus den positiven Zahlen λ_1^2 und λ_2^2, so erhalten wir zwei reelle Werte — $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ — bei welchen das System (2) Partikulärlösungen von der Form (3) zuläßt. Somit gestatten die Gln. (2) zwei linear unabhängige Partikulärlösungen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1^{(1)} \sin(\lambda_1 t + \beta_1), \\ x_2 &= \alpha_1^{(2)} \sin(\lambda_1 t + \beta_1) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

und

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_2^{(1)} \sin(\lambda_2 t + \beta_2), \\ x_2 &= \alpha_2^{(2)} \sin(\lambda_2 t + \beta_2). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Jeder dieser Partikulärlösungen entspricht eine harmonische Schwingungsbewegung der Lasten M_1 und M_2. Der Lösung (8) entsprechen die harmonischen Schwingungen der Lasten M_1 und M_2 mit der Frequenz λ_1; die Lösung (9) liefert harmonische Schwingungen derselben Lasten mit der Frequenz λ_2.

Diese beiden harmonischen schwingenden Bewegungen unseres Systems sind seine *Hauptschwingungen*; die Frequenzen λ_1 und λ_2 erhalten den Namen *Eigenfrequenzen des Systems.*

Wir haben gar keine Bedingung erhalten, die der Wahl der Konstanten β in der Partikulärlösung (3) Beschränkungen auferlegt. Hieraus folgt, daß die Anfangsphasen β_1 und β_2 der Hauptschwingungen unseres Systems völlig willkürlich bleiben. Dasselbe kann man nicht von den Schwingungsamplituden $\alpha_1^{(1)}$ und $\alpha_1^{(2)}$ der Lasten M_1 und M_2 bei der ersten Hauptschwingung und von den Amplituden $\alpha_2^{(1)}$ und $\alpha_2^{(2)}$ derselben Lasten bei der zweiten Hauptschwingung sagen.

Wir haben gesehen, daß die Konstanten $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(2)}$ in der Lösung (3) die Gln. (4) befriedigen müssen. Setzen wir hier $\lambda = \lambda_1$, $\alpha^{(1)} = \alpha_1^{(1)}$ und $\alpha^{(2)} = \alpha_1^{(2)}$, so erhalten wir die Gleichungen

$$(2a - \lambda_1^2)\alpha_1^{(1)} - 2b\alpha_1^{(2)} = 0,$$

$$-2c\alpha_1^{(1)} + (2c - \lambda_1^2)\alpha_1^{(2)} = 0,$$

die durch die Amplituden $\alpha_1^{(1)}$ und $\alpha_1^{(2)}$ befriedigt werden. Da $\lambda = \lambda_1$ die Wurzel der Gl. (5) ist und folglich die Determinante des soeben aufgeschriebenen Gleichungs-

systems gleich Null ist, so ist die eine dieser Gleichungen die Folge der anderen. Aus den gewonnenen Gleichungen finden wir:

$$\frac{\alpha_1^{(2)}}{\alpha_1^{(1)}} = \frac{2a - \lambda_1^2}{2b} = \frac{2c}{2c - \lambda_1^2}.$$

Entsprechend finden wir bei der zweiten Hauptschwingung

$$\frac{\alpha_2^{(2)}}{\alpha_2^{(1)}} = \frac{2a - \lambda_2^2}{2b} = \frac{2c}{2c - \lambda_2^2}.$$

Also haben die Verhältnisse dieser Amplituden bei jeder Hauptschwingung eindeutig bestimmte Größen, obwohl die absoluten Werte der Schwingungsamplituden der Lasten M_1 und M_2 unbestimmt bleiben. Wenn wir bei jeder Hauptschwingung die Schwingungsamplitude der Last M_1 willkürlich vorgeben, d. h.

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_1, \qquad \alpha_2^{(1)} = \alpha_2$$

annehmen, wobei α_1 und α_2 beliebige Konstanten sind, erhalten wir für die Schwingungsamplitude der Last M_2 entsprechend:

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{2a - \lambda_1^2}{2b}\alpha_1, \qquad \alpha_2^{(2)} = \frac{2a - \lambda_2^2}{2b}\alpha_2.$$

Auf diese Art bekommen die Gleichungen der Hauptschwingungen (8) und (9) endgültig folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1), \\ x_2 &= \frac{2a - \lambda_1^2}{2b}\alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

und

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_2 \sin(\lambda_2 t + \beta_2), \\ x_2 &= \frac{2a - \lambda_2^2}{2b}\alpha_2 \sin(\lambda_2 t + \beta_2). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Wir kommen nun zu den Gln. (10) und sehen, daß bei der ersten Hauptschwingung die Verrückungen der beiden Massen x_1 und x_2 gleichzeitig Null werden und gleichzeitig maximale Werte erreichen; das bedeutet, daß beide Lasten M_1 und M_2 gleichzeitig ihre Gleichgewichtslagen passieren und gleichzeitig die größten Abweichungen von ihren Gleichgewichtslagen erreichen. Die gleiche Bemerkung können wir auf Grund der Gln. (11) auch in bezug auf die zweite Hauptschwingung machen.

Wir bemerken noch, daß auf Grund der Gln. (7) die Beziehungen

$$2a - \lambda_1^2 = a - c + \sqrt{(a-c)^2 + 4bc} > 0,$$
$$2a - \lambda_2^2 = a - c - \sqrt{(a-c)^2 + 4bc} < 0$$

gelten.

Hieraus folgt, daß bei der ersten Hauptschwingung die Verrückungen x_1 und x_2 stets das gleiche Vorzeichen haben und bei der zweiten Hauptschwingung immer mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen sind. Das bedeutet, daß sich beide Lasten M_1 und M_2 bei der ersten Hauptschwingung stets in einer Richtung bewegen (d. h. sich in Phase befinden); bei der zweiten Hauptschwingung bewegen sie sich nach entgegengesetzten Richtungen (d. h., sie befinden sich in Gegenphase).

Also haben die Differentialgleichungen der Bewegung unseres Systems (2) zwei Partikulärlösungen (10) und (11). Da die Gleichungen (2) linear sind, erhalten wir, wenn wir diese Partikulärlösungen addieren, die neue Lösung:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1) + \alpha_2 \sin(\lambda_2 t + \beta_2), \\ x_2 &= \frac{2a - \lambda_1^2}{2b}\alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1) + \frac{2a - \lambda_2^2}{2b}\alpha_2 \sin(\lambda_2 t + \beta_2). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Wir sehen, daß die in dieser Lösung enthaltenen Konstanten α_1, α_2, β_1 und β_2 völlig willkürlich sind. Da das System (2) vierter Ordnung ist, schließen wir, daß die Lösung (12), die vier willkürliche Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ enthält, die allgemeinste Lösung der Gln. (2) ist. Hieraus folgt, daß die allgemeinste schwingende Bewegung unseres Systems das Resultat der Überlagerung seiner Hauptschwingungen ist.

Es versteht sich von selbst, daß die willkürlichen Konstanten α_1, α_2, β_1, β_2 aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen, d. h. aus den Anfangswerten der Größen x_1 und x_2 und ihrer Ableitungen nach der Zeit. Im einzelnen können wir die Anfangsbedingungen so zusammenstellen, daß $\alpha_2 = 0$ ist; dann verwandeln sich die Gln. (12) in die Gln. (10), und wir kehren zu der ersten Hauptschwingung unseres Systems zurück. Um die zweite Hauptschwingung zu verwirklichen, müssen die Anfangsbedingungen so gewählt werden, daß $\alpha_1 = 0$ ist.

Zum Abschluß wollen wir eine Berechnung für diesen einfachsten Spezialfall zeigen. Wir setzen voraus, daß die Massen der Lasten M_1 und M_2 und auch die Federkonstanten gleich sind, d. h., wir setzen

$$m_1 = m_2, \qquad c_1 = c_2.$$

Nach den Gln. (1) gilt:

$$a = \frac{c_1}{m_1}, \qquad b = \frac{c_1}{2m_1}, \qquad c = \frac{c_1}{2m_1}.$$

Ferner erhalten wir nach den Gln. (7)

$$\lambda_1^2 = \frac{3}{2}\frac{c_1}{m_1} - \sqrt{\frac{c_1^2}{4m_1^2} + \frac{c_1^2}{m_1^2}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\frac{c_1}{m_1} = 0{,}382\frac{c_1}{m_1},$$

$$\lambda_2^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\frac{c_1}{m_1} = 2{,}618\frac{c_1}{m_1}.$$

Hieraus folgt:

$$\lambda_1 = 0{,}618 \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}, \qquad \lambda_2 = 1{,}62 \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}.$$

Wir führen die Bezeichnung

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}$$

ein und bemerken, daß λ_0 nichts anderes ist als die Frequenz der Eigenschwingungen der Last M_1, wenn die zweite Feder und die zweite Last fehlen. Also erhalten wir für die Eigenfrequenzen unseres Systems

$$\lambda_1 = 0{,}618\, \lambda_0, \qquad \lambda_2 = 1{,}62\, \lambda_0.$$

Ferner ist

$$\frac{2a - \lambda_1^2}{2b} = 2 - 0{,}382 = 1{,}618,$$

$$\frac{2a - \lambda_2^2}{2b} = 2 - 2{,}618 = -0{,}618.$$

Folglich ist bei der ersten Hauptschwingung die Schwingungsamplitude der Last M_2 um 1,618 mal größer als die Schwingungsamplitude der Last M_1; bei der zweiten Hauptschwingung beträgt die Schwingungsamplitude der Last M_2 0,618 der Schwingungsamplitude der Last M_1.

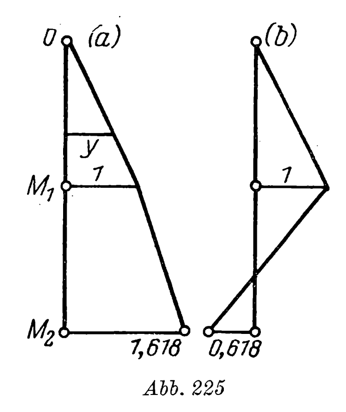


Abb. 225

Es ist von Nutzen, die soeben gewonnenen Resultate graphisch darzustellen. Betrachten wir die erste Hauptschwingung unseres Systems. Wir stellen in Abb. 225a unser System in seiner Gleichgewichtslage dar und tragen von den Gleichgewichtslagen der Lasten M_1 und M_2 die Schwingungsamplituden dieser Lasten in einem beliebigen Maßstabe (wobei wir die Amplituden der Last M_1 mit Eins annehmen) in horizontaler Richtung ab. Verbinden wir den festen Punkt O mit dem Ende der Amplitude der Last M_1 und die Enden der Amplituden der Lasten M_1 und M_2 miteinander durch gerade Linien, so erhalten wir eine graphische Darstellung, welche die Möglichkeit gibt, die Schwingungsamplitude eines beliebigen Punktes der oberen oder unteren Feder leicht zu finden: Diese Amplitude wird graphisch im angenommenen Maßstab durch den horizontalen Abstand des entsprechenden Punktes von der Bezugsgeraden dargestellt. Die in der Abb. 225a gegebene Darstellung gibt die Form der ersten Hauptschwingung des Systems.

In Abb. 225b ist die Form der zweiten Hauptschwingung dargestellt. Da das Verhältnis der Amplituden der Lasten M_2 und M_1 in diesem Fall gleich der negativen

Zahl — 0,618 ist, tragen wir die Amplituden nach entgegengesetzten Seiten ab. Es ist leicht zu ersehen, daß ein Punkt der unteren Feder eine Amplitude hat, die gleich Null ist; ein solcher Punkt heißt Knotenpunkt oder Knoten.

Also hat die erste Hauptschwingung keinen Knoten; bei der zweiten Hauptschwingung gibt es einen Knoten.

Wir unterstreichen nochmals, daß die Form der Hauptschwingungen nicht vom absoluten Wert der Amplituden der Lasten M_1 und M_2 abhängt; wie man sieht, wird die Form der Hauptschwingung ausschließlich vom Verhältnis dieser Amplituden bestimmt.

§ 146. Die Differentialgleichungen der Eigenschwingungen eines Systems mit zwei Freiheitsgraden

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir ein Sonderbeispiel von Schwingungen eines Systems mit zwei Freiheitsgraden betrachtet. Wir werden nun zeigen, daß die an diesem Sonderbeispiel beobachteten Besonderheiten auch im allgemeinsten Fall von Schwingungen eines beliebigen Systems, das zwei Freiheitsgrade besitzt, in Erscheinung treten.

Wir stellen uns ein konservatives System vor, das aus den materiellen Punkten M_1, $M_2, \ldots, M_n$ besteht. Wir nehmen an, daß dieses System zwei Freiheitsgrade besitzt; die verallgemeinerten Koordinaten des Systems bezeichnen wir mit q_1 und q_2. Wir wollen die kleinen Schwingungen des Systems um seine Gleichgewichtslage untersuchen; diese Gleichgewichtslage des Systems soll stabil sein. Wenn wir die Gleichgewichtslage als Koordinatenursprung wählen, ist in der Gleichgewichtslage $q_1 = 0$ und $q_2 = 0$. Wir stellen zunächst die Differentialgleichungen der kleinen Schwingungen unseres Systems mit den Koordinaten q_1 und q_2 auf. Nach der Methode von LAGRANGE erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= -\frac{\partial V}{\partial q_1}, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= -\frac{\partial V}{\partial q_2}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wobei T die kinetische und V die potentielle Energie des Systems ist.

Unter Beachtung, daß die Bindungen des Systems als zeitunabhängig vorausgesetzt werden, können wir bei der Berechnung der kinetischen Energie die Gl. (2), § 128, anwenden; danach erhalten wir:

$$T = \frac{1}{2}\left(A_{11}\dot{q}_1^2 + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + A_{22}\dot{q}_2^2\right),$$

wobei A_{11}, A_{12}, A_{22} Funktionen von q_1 und q_2 sind.

Bei der Untersuchung der kleinen Schwingungen des Systems um seine Gleichgewichtslage werden wir die Koordinaten q_1 und q_2 sowie die verallgemeinerten Ge-

schwindigkeiten $\dot{q}_1$ und $\dot{q}_2$ als kleine Größen erster Ordnung annehmen. Wir wollen im Ausdruck der kinetischen Energie T nur die Glieder zweiter Ordnung beibehalten und entwickeln daher die Funktionen A_{11}, A_{12}, A_{22} in Potenzreihen nach den kleinen Größen q_1 und q_2; wir erhalten dann:

$$A_{11} = a_{11} + \cdots ,$$
$$A_{12} = a_{12} + \cdots ,$$
$$A_{22} = a_{22} + \cdots .$$

Hier sind a_{11}, a_{12}, a_{22} die Werte der Funktionen A_{11}, A_{12} und A_{22} an der Stelle $q_1 = q_2 = 0$. Die Auslassungspunkte ersetzen die Glieder, die q_1 und q_2 in der ersten und den höheren Potenzen enthalten. Alle diese Glieder werden nach der Multiplikation mit $\dot{q}_1^2$, $\dot{q}_1\dot{q}_2$, $\dot{q}_2^2$ zu Größen dritter und höherer Ordnungen. Vernachlässigen wir diese Größen, so erhalten wir:

$$T = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2\,a_{12}\,\dot{q}_1\,\dot{q}_2 + a_{22}\,\dot{q}_2^2\right).$$

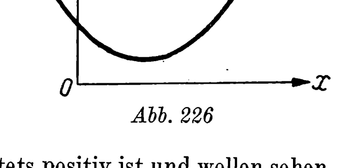


Abb. 226

Wir bemerken, daß hier a_{11}, a_{12}, a_{22} konstante Größen sind.

Wir bemerken ferner, daß die kinetische Energie stets positiv ist und wollen sehen, welche Bedingungen die Größen a_{11}, a_{12} und a_{22} erfüllen müssen, damit die Ungleichung $T > 0$ Gültigkeit hat.

Es gilt

$$T = \frac{\dot{q}_1^2}{2}\left(a_{11} + 2\,a_{12}\,\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1} + a_{22}\,\frac{\dot{q}_2^2}{\dot{q}_1^2}\right).$$

Wir führen die Bezeichnungen

$$\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1} = x, \qquad a_{11} + 2\,a_{12}\,x + a_{22}\,x^2 = y$$

ein.

In diesem Falle ist

$$T = \frac{1}{2}\,\dot{q}_1^2\,y.$$

Es wird $T > 0$ sein, wenn $y > 0$ ist. Nun muß noch klargestellt werden, welche Bedingungen die Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{22} erfüllen müßten, damit $y > 0$ ist.

Wir wollen die funktionelle Abhängigkeit y von x konstruieren, indem wir diese Größen als Ordinate bzw. Abszisse eines bestimmten Punktes in der Ebene betrachten (Abb. 226). Gemäß der Gleichung

$$y = a_{11} + 2\,a_{12}\,x + a_{22}\,x^2$$

erhalten wir eine Parabel in der (x, y)-Ebene. Damit $y > 0$ bei allen Werten von x ist, müssen alle Punkte dieser Parabel oberhalb der Abszissenachse liegen. Dazu ist es

aber notwendig und hinreichend, daß $y > 0$ bei irgendeinem beliebigen Wert von x (z. B. bei $x = 0$) gilt, und daß die Größe y bei keinem (reellem) Wert von x Null wird.

Nehmen wir $x = 0$ im Ausdruck für y an, so finden wir die erste Bedingung

$$a_{11} > 0 .$$

Lösen wir aber die Gleichung

$$a_{11} + 2 a_{12} x + a_{22} x^2 = 0$$

und fordern, daß ihre beiden Wurzeln imaginär sind, so erhalten wir die zweite Bedingung:

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0 .$$

Also legt die Forderung, daß die kinetische Energie T eine positive Größe ist, den Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{22} die Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} a_{11} > 0 , \\ a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0 \end{aligned} \right\} \qquad (2)$$

auf.

Wir gehen zu der Berechnung der potentiellen Energie V über. Wir wissen, daß V eine Funktion der Koordinaten q_1 und q_2 ist. Entwickeln wir diese Funktion nach Potenzen der Größen q_1 und q_2, so gilt:

$$V = V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)_0 q_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)_0 q_2 + \\ + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + 2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 q_1 q_2 + \left(\frac{\partial_2 V}{\partial q_2^2}\right)_0 q_2^2\right] + \cdots ,$$

wobei $V_0, \left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)_0$ usw. Werte der Funktion V und ihrer Ableitungen bei $q_1 = q_2 = 0$, d. h. in der Gleichgewichtslage des Systems, sind.

Wir bemerken nun, daß die ersten Ableitungen der potentiellen Energie nach den verallgemeinerten Koordinaten (wie wir im § 123 gesehen haben) gleich den negativen verallgemeinerten Kräften sind. Unter Beachtung, daß die verallgemeinerten Kräfte in der Gleichgewichtslage des Systems gleich Null sind, schließen wir, daß

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)_0 = 0 , \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)_0 = 0$$

gilt.

Ferner nehmen wir den Wert der potentiellen Energie in der Gleichgewichtslage unseres Systems zu Null an. In einem solchen Falle ist

$$V_0 = 0 .$$

Führen wir die Bezeichnungen

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)_0 = c_{11} , \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 = c_{12} , \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)_0 = c_{22}$$

ein und behalten im Ausdruck der potentiellen Energie nur die kleinen Glieder zweiter Ordnung bei, so erhalten wir endgültig:

$$V = \frac{1}{2}\left(c_{11} q_1^2 + 2 c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2\right).$$

Wir stellen fest, daß c_{11}, c_{12} und c_{22} konstante Größen sind. Wir setzen voraus, daß wenigstens eine dieser Größen nicht gleich Null ist.

Ganz am Anfang dieses Paragraphen haben wir schon vorausgesetzt, daß die Gleichgewichtslage $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ stabil ist. Das bedeutet (nach dem Theorem von Dirichlet), daß die potentielle Energie V in der Gleichgewichtslage ein Minimum hat. Folglich sind die Werte der potentiellen Energie in den Lagen des Systems, die nahe der Gleichgewichtslage sind, größer als die Werte der potentiellen Energie in der Gleichgewichtslage. Wir haben aber den Wert der potentiellen Energie des Systems in der Gleichgewichtslage zu Null angenommen. Hieraus folgt, daß bei den von uns gestellten Bedingungen die potentielle Energie V in allen Lagen des Systems, die hinreichend nahe der Gleichgewichtslage sind, eine positive Größe sein muß.

Damit der Ausdruck

$$V = \frac{1}{2}\left(c_{11} q_1^2 + 2 c_{12} q_1 q_1 + c_{22} q_2^2\right)$$

eine positive Größe ist, müssen die Koeffizienten c_{11}, c_{12}, c_{22} gewisse Bedingungen erfüllen. Wenn wir wie oben folgern, überzeugen wir uns, daß diese Bedingungen auf die Ungleichungen

$$c_{11} > 0, \qquad c_{11} c_{22} - c_{12}^2 > 0 \tag{3}$$

führen.

Dies sind die Bedingungen, welche die Stabilität der Gleichgewichtslage $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ gewährleisten.

Nachdem wir die Ausdrücke der kinetischen und potentiellen Energie des Systems gewonnen haben, gehen wir zur Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung des Systems über. Es gilt:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = c_{11} q_1 + c_{12} q_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = a_{12} \dot{q}_1 + a_{22} \dot{q}_2, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_2} = c_{12} q_1 + c_{22} q_2.$$

Setzen wir diese Größen in die Gln. (1) von Lagrange ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 &= 0, \\ a_{12} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{12} q_1 + c_{22} q_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wir haben damit ein System von zwei homogenen linearen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten erhalten. Dies sind die Differentialgleichungen der kleinen Schwingungen eines konservativen Systems mit zwei Freiheitsgraden.

§ 147. Die Hauptschwingungen und Eigenfrequenzen

Zur Integration der Gln. (4), § 146, suchen wir ihre Partikulärlösungen in der Form

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \alpha^{(1)} \sin(\lambda t + \beta), \\ q_2 &= \alpha^{(2)} \sin(\lambda t + \beta), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wobei $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, λ und β Konstante sind.

Führen wir diese Beziehungen für q_1 und q_2 in die Gln. (4), § 146, ein und dividieren durch $\sin(\lambda t + \beta)$, so erhalten wir:

$$-\lambda^2 a_{11} \alpha^{(1)} - \lambda^2 a_{12} \alpha^{(2)} + c_{11} \alpha^{(1)} + c_{12} \alpha^{(2)} = 0,$$

$$-\lambda^2 a_{12} \alpha^{(1)} - \lambda^2 a_{22} \alpha^{(2)} + c_{12} \alpha^{(1)} + c_{22} \alpha^{(2)} = 0,$$

oder

$$\left.\begin{aligned} (c_{11} - \lambda^2 a_{11}) \alpha^{(1)} + (c_{12} - \lambda^2 a_{12}) \alpha^{(2)} &= 0, \\ (c_{12} - \lambda^2 a_{12}) \alpha^{(1)} + (c_{22} - \lambda^2 a_{22}) \alpha^{(2)} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

die durch die Konstanten $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ und λ befriedigt werden müssen.

Diese in bezug auf die Konstanten $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(2)}$ linearen und homogenen Gleichungen gestatten eine Lösung, die dann von Null verschieden ist, wenn die Koeffizientendeterminante des Systems gleich Null ist. Hieraus erhalten wir die Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda^2 a_{11}, & c_{12} - \lambda^2 a_{12} \\ c_{12} - \lambda^2 a_{12}, & c_{22} - \lambda^2 a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

die durch die Größe λ befriedigt werden muß.

Lösen wir die gewonnene Determinante, so folgt

$$(c_{11} - \lambda^2 a_{11})(c_{22} - \lambda^2 a_{22}) - (c_{12} - \lambda^2 a_{12})^2 = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung ist in bezug auf λ^2 quadratisch. Wir werden zeigen, daß beide Wurzeln dieser quadratischen Gleichung reell und positiv sind.

Wir bezeichnen den linken Teil der Gl. (3) mit $f(\lambda^2)$, d. h., wir setzen

$$f(\lambda^2) = (c_{11} - \lambda^2 a_{11})(c_{22} - \lambda^2 a_{22}) - (c_{12} - \lambda^2 a_{12})^2$$

und ermitteln das Vorzeichen dieses Ausdruckes bei $\lambda^2 = 0$, $\lambda^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}$, $\lambda^2 = \frac{c_{22}}{c_{22}}$ und $\lambda^2 = +\infty$; wir setzen der Bestimmtheit halber voraus, daß

$$\frac{c_{11}}{a_{11}} < \frac{c_{22}}{a_{22}}$$

ist.

Es ist

$$f(0) = c_{11} c_{22} - c_{12}^2,$$

$$f\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right) = -\left(c_{12} - \frac{c_{11}}{a_{11}} a_{12}\right)^2, \qquad f\left(\frac{c_{22}}{a_{22}}\right) = -\left(c_{12} - \frac{c_{22}}{a_{22}} a_{12}\right)^2,$$

$$f(+\infty) = \left[\lambda^4 (a_{11} a_{22} - a_{11}^2) + \cdots\right]_{\lambda^2 = +\infty},$$

wobei die Auslassungspunkte die Glieder ersetzen, die λ im zweiten Grade enthalten, sowie die Glieder, die kein λ enthalten.

Mit Rücksicht auf die Ungleichungen (2) und (3), § 146, schließen wir, daß

$$f(0) > 0, \qquad f\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right) < 0, \qquad f\left(\frac{c_{22}}{a_{22}}\right) < 0, \qquad f(+\infty) > 0$$

ist.

Hieraus folgt, daß das Polynom $f(\lambda^2)$ zwischen $\lambda^2 = 0$ und $\lambda^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}$ und zwischen $\lambda^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}}$ und $\lambda^2 = +\infty$ je eine Nullstelle besitzt. Wir schließen daraus, daß die Gl. (3) zwei reelle positive Wurzeln λ_1^2 und λ_2^2 hat, die in den Grenzen

$$0 < \lambda_1^2 < \frac{c_{11}}{a_{11}}, \qquad \frac{c_{22}}{a_{22}} < \lambda_2^2 < +\infty$$

eingeschlossen sind.

Ziehen wir die Quadratwurzeln aus den positiven Zahlen λ_1^2 und λ_2^2, so erhalten wir zwei reelle Werte $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$, bei welchen das System (4), § 146, Partikulärlösungen von der Form (1) zuläßt. Somit lassen die Gln. (4), § 146, zwei linear unabhängige Partikulärlösungen zu:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \alpha_1^{(1)} \sin(\lambda_1 t + \beta_1), \\ q_2 &= \alpha_1^{(2)} \sin(\lambda_1 t + \beta_1) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \alpha_2^{(1)} \sin(\lambda_2 t + \beta_2), \\ q_2 &= \alpha_2^{(2)} \sin(\lambda_2 t + \beta_2). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Jeder dieser Partikulärlösungen entspricht eine gewisse harmonische Schwingungsbewegung unseres Systems. Diese beiden harmonischen Schwingungsbewegungen des Systems sind seine *Hauptschwingungen.* Die Frequenzen der Hauptschwingungen λ_1 und λ_2 heißen *Eigenfrequenzen* des Systems. Die Gl. (3) erhält den Namen *Frequenzgleichung.*

Da wir keine Bedingung erhalten haben, welche die Wahl der Konstanten β in der Partikulärlösung (1) einschränkt, bleiben in den Gln. (4) und (5) die Anfangsphasen β_1 und β_2 vollständig willkürlich. Was die Konstanten $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(2)}$ in der Lösung (1) anbetrifft, so müssen sie die Gln. (2) befriedigen. Nehmen wir in diesen Gleichungen $\lambda = \lambda_1$, $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)}$ und $\alpha^{(2)} = \alpha_2^{(2)}$ an, so erhalten wir:

$$(c_{11} - \lambda_1^2 a_{11}) \alpha_1^{(1)} + (c_{12} - \lambda_1^2 a_{12}) \alpha_1^{(2)} = 0,$$

$$(c_{12} - \lambda_1^2 a_{12}) \alpha_1^{(1)} + (c_{22} - \lambda_1^2 a_{22}) \alpha_1^{(2)} = 0.$$

Die Koeffizientendeterminante dieses Systems ist gleich Null, da λ_1 eine Wurzel der Gl. (3) ist; folglich ist eine der aufgeschriebenen Gleichungen die Folge der anderen. Wir befriedigen diese Gleichungen, wenn wir

$$\frac{\alpha_1^{(1)}}{c_{22} - \lambda_1^2 a_{22}} = \frac{-\alpha_1^{(2)}}{c_{12} - \lambda_1^2 a_{12}} = \alpha_1$$

setzen, wobei α_1 eine beliebige Zahl ist. Hieraus folgt:

$$\alpha_1^{(1)} = (c_{22} - \lambda_1^2 a_{22})\alpha_1, \qquad \alpha_1^{(2)} = -(c_{12} - \lambda_1^2 a_{12})\alpha_1.$$

Wenden wir uns der zweiten Hauptschwingung zu, so folgt entsprechend:

$$\alpha_2^{(1)} = (c_{22} - \lambda_2^2 a_{22})\alpha_2, \qquad \alpha_2^{(2)} = -(c_{12} - \lambda_2^2 a_{12})\alpha_2,$$

wobei α_2 eine beliebige Zahl ist.

Auf diese Art erhalten die Gleichungen der Hauptschwingungen (4) und (5) endgültig folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= (c_{22} - \lambda_1^2 a_{22})\alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1), \\ q_2 &= -(c_{12} - \lambda_1^2 a_{12})\alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

und

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= (c_{22} - \lambda_2^2 a_{22})\alpha_2 \sin(\lambda_2 t + \beta_2), \\ q_2 &= -(c_{12} - \lambda_2^2 a_{12})\alpha_2 \sin(\lambda_2 t + \beta_2). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Somit haben die Differentialgleichungen (4), § 146, zwei Partikulärlösungen (6) und (7). Da diese Gleichungen linear sind, folgt durch Addition dieser Partikulärlösungen eine neue Lösung:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= (c_{22} - \lambda_1^2 a_{22})\alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1) + (c_{22} - \lambda_2^2 a_{22})\alpha_2 \sin(\lambda_2 t + \beta_2), \\ q_2 &= -(c_{12} - \lambda_1^2 a_{12})\alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1) - (c_{12} - \lambda_2^2 a_{12})\alpha_2 \sin(\lambda_2 t + \beta_2). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Da das System (4), § 146, von der vierten Ordnung ist, muß die Lösung (8), in der die vier willkürlichen Konstanten α_1, α_2, β_1, β_2 enthalten sind, die allgemeinste Lösung der betrachteten Gleichungen sein. Hieraus folgt, daß die *allgemeinste Schwingungsbewegung unseres Systems das Resultat der Überlagerung seiner beiden Hauptschwingungen ist*; das ist das *Überlagerungsprinzip* kleiner Schwingungen.

Wir kehren nochmals zu den Hauptschwingungen (6) und (7) unseres Systems zurück. Um eine klare Vorstellung von der Bewegung des Systems zu erhalten, das eine der Hauptschwingungen ausführt, wollen wir die Bewegung jedes einzelnen zum System gehörenden materiellen Punktes M_i betrachten.

Wir wählen das kartesische Koordinatensystem x, y, z und bezeichnen die kartesischen Koordinaten des Punktes M_i, die auf dieses System bezogen sind, mit x_i, y_i, z_i; die Koordinaten der Gleichgewichtslage des Punktes M_i bezeichnen wir mit

x_i^0, y_i^0, z_i^0. Wir führen in die Betrachtung die Verrückung des Punktes M_i aus seiner Gleichgewichtslage ein. Bezeichnen wir die Komponenten dieser Verrückung auf den Achsen x, y und z mit u_i, v_i, w_i, so gilt:

$$u_i = x_i - x_i^0, \qquad v_i = y_i - y_i^0, \qquad w_i = z_i - z_i^0. \tag{9}$$

Wir wissen (s. § 123), daß die Koordinaten x_i, y_i, z_i als Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten q_1 und q_2 dargestellt werden können:

$$x_i = x_i(q_1, q_2), \qquad y_i = y_i(q_1, q_2), \qquad z_i = z_i(q_1, q_2).$$

Wir entwickeln diese Funktionen nach Potenzen der kleinen Größen q_1 und q_2. Behalten wir im Auge, daß die konstanten Glieder in diesen Entwicklungen nichts anderes sind als Werte der Koordinaten x_i, y_i, z_i bei $q_1 = q_2 = 0$, d. h. in der Gleichgewichtslage, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i^0 + A_1^{(i)} q_1 + A_2^{(i)} q_2 + \cdots, \\ y_i &= y_i^0 + B_1^{(i)} q_1 + B_2^{(i)} q_2 + \cdots, \\ z_i &= z_i^0 + C_1^{(i)} q_1 + C_2^{(i)} q_2 + \cdots, \end{aligned}\right\}$$

wobei $A_1^{(i)}$, $A_2^{(i)}$, $B_1^{(i)}$, $B_2^{(i)}$, $C_1^{(i)}$, $C_2^{(i)}$ gegebene konstante Größen sind und die Auslassungspunkte die kleinen Glieder zweiter und höherer Ordnung ersetzen. Vernachlässigen wir diese Glieder und führen die Bezeichnungen (9) ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} u_i &= A_1^{(i)} q_1 + A_2^{(i)} q_2, \\ v_i &= B_1^{(i)} q_1 + B_2^{(i)} q_2, \\ w_i &= C_1^{(i)} q_1 + C_2^{(i)} q_2. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Damit sind die Verrückungen der Systempunkte auf den Koordinatenachsen durch die verallgemeinerten Koordinaten q_1 und q_2 ausgedrückt. Um die Bewegungsgleichungen des Punktes M_i in kartesischen Koordinaten zu erhalten, muß man in diesen anstatt q_1 und q_2 deren Ausdrücke als Zeitfunktionen einführen.

Wir setzen voraus, daß unser System eine der Hauptschwingungen ausführt, z. B. die erste Hauptschwingung. Substituieren wir in den soeben gewonnenen Beziehungen für q_1 und q_2 deren Ausdrücke (6), so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \left[A_1^{(i)}(c_{22} - \lambda_1^2 a_{22}) - A_2^{(i)}(c_{12} - \lambda_1^2 a_{12})\right] \alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1), \\ v_i &= \left[B_1^{(i)}(c_{22} - \lambda_1^2 a_{22}) - B_2^{(i)}(c_{12} - \lambda_1^2 a_{12})\right] \alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1), \\ w_i &= \left[C_1^{(i)}(c_{22} - \lambda_1^2 a_{22}) - C_2^{(i)}(c_{12} - \lambda_1^2 a_{12})\right] \alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Dies sind die Gleichungen der *ersten Hauptschwingung* des Systems in kartesischen Koordinaten. Entsprechend erhalten wir die Gleichungen der zweiten Hauptschwingung in kartesischen Koordinaten, wenn wir die Ausdrücke (6) der verallgemeinerten Koordinaten q_1 und q_2 durch die Ausdrücke (7) ersetzen.

Aus diesen Gleichungen können wir folgende *Eigenschaften der Hauptschwingungen* des Systems entnehmen:

1. *Die Hauptschwingungen eines Systems sind* (wie bereits gesagt) *harmonische Schwingungen.*

2. Eliminieren wir die Zeit aus den Gln. (11), so erhalten wir:

$$\frac{u_i}{A_1^{(i)}(c_{22}-\lambda_1^2 a_{22})-A_2^{(i)}(c_{12}-\lambda_1^2 a_{12})}=\frac{v_i}{B_1^{(i)}(c_{22}-\lambda_1^2 a_{22})-B_2^{(i)}(c_{12}-\lambda_1^2 a_{12})}$$

$$=\frac{w_i}{C_1^{(i)}(c_{22}-\lambda_1^2 a_{22})-C_2^{(i)}(c_{12}-\lambda_1^2 a_{12})}$$

Dies sind die Gleichungen der Geraden, die durch die Gleichgewichtslage M_i geht. *Wenn also das System eine seiner Hauptschwingungen ausführt, führt jeder Punkt des Systems eine geradlinige Bewegung aus, die durch seine Gleichgewichtslage hindurchgeht.*

3. Die Eigenfrequenzen λ_1 und λ_2 werden aus den Wurzeln der Frequenzgleichungen (3) bestimmt. Hieraus folgt, daß *die Eigenfrequenzen eines Systems nicht von den Anfangsbedingungen abhängen.* Dasselbe kann von der Schwingungsdauer τ_1 und τ_2 der Hauptschwingungen gesagt werden, wobei

$$\tau_1=\frac{2\pi}{\lambda_1}, \qquad \tau_2=\frac{2\pi}{\lambda_2}$$

ist.

4. Die in den Gln. (11) enthaltenen Konstanten α_1 und β_1 sind beliebige Konstanten, die von den Anfangsbedingungen der Bewegung abhängen. Wir schließen also: *Wenn das System eine seiner Hauptschwingungen ausführt, sind die Schwingungsamplituden der Systempunkte und auch die Anfangsphase der Schwingungen von den Anfangsbedingungen abhängig.*

Die Anfangsbedingungen aber beeinflussen die Amplituden nur durch Vermittlung des Faktors α_1, der für alle Punkte des Systems gemeinsam ist. Hieraus folgt, daß die *Amplitudenverhältnisse der verschiedenen Systempunkte von den Anfangsbedingungen nicht abhängen.*

5. Es ist sehr wichtig, festzustellen, daß die Phase $\lambda_1 t+\beta_1$ die für alle Systempunkte gemeinsame Phase ist. Also *befinden sich alle Systempunkte stets in einer Phase, wenn das System eine der Hauptschwingungen ausführt.* Das bedeutet, daß alle Systempunkte *gleichzeitig* ihre Gleichgewichtslagen passieren (in den Augenblicken, in denen $\sin(\lambda_1 t+\beta_1)=0$ ist) und gleichzeitig die maximalen Abweichungen von den Gleichgewichtslagen erreichen (in den Augenblicken, in denen $\sin(\lambda_1 t+\beta_1)=\pm 1$ ist).

Die letztere Eigenschaft der Hauptschwingungen kann man auch in folgende Worte fassen: *Wenn das System eine der Hauptschwingungen ausführt, dann ist das Argument des Sinus zu jeder Zeit in der Gleichung für die Verschiebungen aller Systempunkte gleich.*

§ 148. Die Querschwingungen eines mit zwei Massen belegten Trägers

Zur Aufstellung der Differentialgleichungen der Eigenschwingungen eines Systems mit zwei Freiheitsgraden haben wir im § 146 die Methode von LAGRANGE benutzt. In der allgemeinen Untersuchung, die in den §§ 146 und 147 beschrieben wurde, war diese Methode ganz angebracht. Bei der Lösung konkreter Aufgaben aber führen unkompliziertere Verfahren häufig schneller und einfacher zum Ziel. Im § 146 haben wir uns bereits bei der Aufstellung von Differentialgleichungen der Bewegung in kartesischen Koordinaten eines elementaren Verfahrens bedient. Dasselbe Verfahren werden wir auch im vorliegenden Paragraphen anwenden.

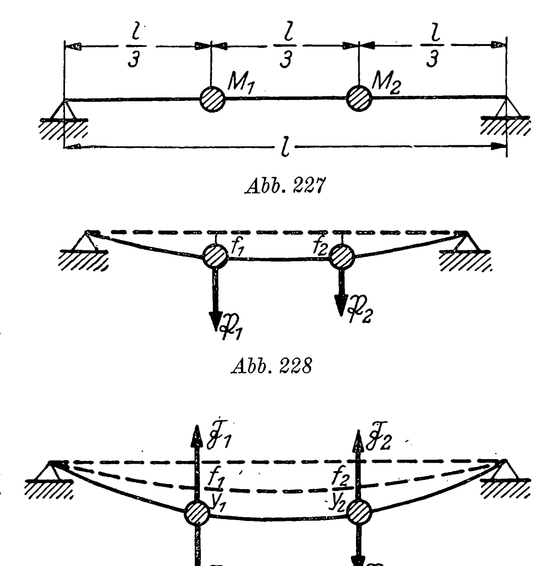


Abb. 227

Abb. 228

Abb. 229

Ein elastischer Träger von der Länge l, der auf zwei Stützen ruht, ist in den Punkten, welche die Länge l in drei gleiche Teile teilen, durch die Lasten M_1 und M_2 belastet (Abb. 227). Wir werden die Eigenschwingungen dieses Systems untersuchen, wobei wir die Masse des Trägers im Vergleich zu den Massen der Lasten M_1 und M_2 als vernachlässigbar klein ansehen wollen.

Wir wollen zuerst den Gleichgewichtszustand unseres Systems festlegen. Wir bezeichnen das Gewicht der Lasten M_1 und M_2 mit $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ und die statischen Durchbiegungen des Trägers an den Punkten M_1 und M_2 mit f_1 und f_2 (Abb. 228). Wir wollen nun voraussetzen, daß das System aus dem Gleichgewicht gebracht ist und kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage ausführt; die zusätzlichen Durchbiegungen des Trägers an den Punkten M_1 und M_2 bezeichnen wir mit y_1 und y_2 (Abb. 229).

Da die Lage des Systems durch die beiden Koordinaten y_1 und y_2 bestimmt wird, hat das System zwei Freiheitsgrade. Wir betrachten die Lasten M_1 und M_2 als materielle Punkte und stellen die Differentialgleichungen der Bewegung dieser Punkte in der Projektion auf die vertikale Achse auf. Bezeichnen wir die Massen der Lasten M_1 und M_2 mit m_1 und m_2 und die elastischen Reaktionen des Trägers, die an diesen Lasten angreifen, mit $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$, so gilt:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= P_1 - F_1, \\ m_2 \ddot{y}_2 &= P_2 - F_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Dies sind die Differentialgleichungen der Eigenschwingungen unseres Systems. Nun müssen noch die elastischen Reaktionen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ errechnet werden. Zu dem Zweck kehren wir zum Gleichgewichtszustand des Systems zurück und berechnen zuerst die statischen Durchbiegungen f_1 und f_2, die der Träger unter der Wirkung der Belastungen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ erhält. Ohne uns bei der Lösung dieser statischen Aufgabe aufzuhalten (sie wird nach dem üblichen Verfahren der Festigkeitslehre gelöst), führen wir die Resultate an:

$$f_1 = \frac{(8\,P_1 + 3\,P_2)\,l^3}{486\,E\,J},$$

$$f_2 = \frac{(3\,P_1 + 8\,P_2)\,l^3}{486\,E\,J},$$

wobei E der Elastizitätsmodul und J das Trägheitsmoment des Trägerquerschnittes in bezug auf die Hauptträgheitsachse ist, die senkrecht zur Krümmungsebene verläuft. Lösen wir diese Gleichungen nach P_1 und P_2 auf, so gilt:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{486\,E\,J}{55\,l^3}(8\,f_1 - 3\,f_2),\\ P_2 &= \frac{486\,E\,J}{55\,l^3}(8\,f_2 - 3\,f_1). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Im Gleichgewichtszustand des Systems sind aber die Gewichte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ mit den elastischen Reaktionen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ im Gleichgewicht. Nehmen wir $P_1 = F_1$ und $P_2 = F_2$ in den soeben gewonnenen Gleichungen an und führen zur Abkürzung die Bezeichnung

$$c = \frac{486\,E\,J}{55\,l^3} \tag{3}$$

ein, so finden wir die Ausdrücke für die elastischen Reaktionen im Gleichgewichtszustand des Systems

$$F_1 = c\,(8\,f_1 - 3\,f_2), \qquad F_2 = c\,(8\,f_2 - 3\,f_1).$$

Hieraus ergeben sich leicht die Ausdrücke für die elastischen Reaktionen auch in einem beliebigen anderen Zustande des Systems: Man muß nur anstatt der statischen Durchbiegungen f_1 und f_2 entsprechend $f_1 + y_1$ und $f_2 + y_2$ einsetzen.

Wir haben also in einem beliebigen Zustande des Systems

$$F_1 = c\,[8\,(f_1 + y_1) - 3\,(f_2 + y_2)],$$

$$F_2 = c\,[8\,(f_2 + y_2) - 3\,(f_1 + y_1)].$$

Setzen wir nun diese Ausdrücke für F_1 und F_2 in die Gln. (1) ein, so erhalten wir:

$$m_1\,\ddot{y}_1 = P_1 - c\,(8\,f_1 - 3\,f_2) - c\,(8\,y_1 - 3\,y_2),$$

$$m_2\,\ddot{y}_2 = P_2 - c\,(8\,f_2 - 3\,f_1) - c\,(8\,y_2 - 3\,y_1).$$

Es ist leicht zu sehen, daß sich die konstanten Glieder in diesen Gleichungen auf Grund der Gln. (2) und (3) wegheben. Endgültig erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \frac{c}{m_1}(8\,y_1 - 3\,y_2) = 0\,, \\ \ddot{y}_2 + \frac{c}{m_2}(8\,y_2 - 3\,y_1) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Nachdem wir die Differentialgleichungen der Eigenschwingungen unseres Systems aufgestellt haben, gehen wir zur Ermittlung der Hauptschwingungen über. Wir wissen bereits, daß die Hauptschwingungen den Partikulärlösungen des Systems (4) in der Form

$$y_1 = \alpha^{(1)} \sin(\lambda t + \beta),$$
$$y_2 = \alpha^{(2)} \sin(\lambda t + \beta)$$

entsprechen.

Setzen wir diese Ausdrücke für y_1 und y_2 in die Gln. (4) ein und kürzen durch $\sin(\lambda t + \beta)$, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{8c}{m_1} - \lambda^2\right)\alpha^{(1)} - \frac{3c}{m_1}\alpha^{(2)} = 0\,, \\ -\frac{3c}{m_2}\alpha^{(1)} + \left(\frac{8c}{m_2} - \lambda^2\right)\alpha^{(2)} = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

woraus wir die Frequenzgleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{8c}{m_1} - \lambda^2, & -\frac{3c}{m_1} \\ -\frac{3c}{m_2}, & \frac{8c}{m_2} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\left(\frac{8c}{m_1} - \lambda^2\right)\left(\frac{8c}{m_2} - \lambda^2\right) - \frac{9c^2}{m_1 m_2} = 0$$

gewinnen.

Die weiteren Berechnungen führen wir unter der Voraussetzung

$$m_2 = \frac{m_1}{2}$$

durch.

In diesem Spezialfall nimmt die Frequenzgleichung die Form

$$\lambda^4 - \frac{24c}{m_1}\lambda^2 + \frac{110c^2}{m_1^2} = 0$$

an.

Hieraus folgt

$$\lambda_1^2 = \frac{c}{m_1}\left(12 - \sqrt{34}\right) = 6{,}17\,\frac{c}{m_1},$$

$$\lambda_2^2 = \frac{c}{m_1}\left(12 + \sqrt{34}\right) = 17{,}83\,\frac{c}{m_1}.$$

Auf diese Art finden wir zwei Eigenfrequenzen:

$$\lambda_1 = 2{,}484\sqrt{\frac{c}{m_1}}, \qquad \lambda_2 = 4{,}223\sqrt{\frac{c}{m_1}}$$

und zwei Hauptschwingungen

$$y_1 = \alpha_1^{(1)} \sin(\lambda_1 t + \beta_1),$$
$$y_2 = \alpha_1^{(2)} \sin(\lambda_1 t + \beta_1)$$

und

$$y_1 = \alpha_2^{(1)} \sin(\lambda_2 t + \beta_2),$$
$$y_2 = \alpha_2^{(2)} \sin(\lambda_2 t + \beta_2).$$

Was die Amplituden $\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}$ und entsprechend $\alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}$ anbetrifft, so sind diese durch die Gln. (5) miteinander verbunden. Behalten wir im Auge, daß

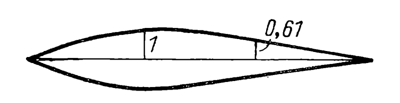
$$\frac{8c}{m_1} - \lambda_1^2 = 1{,}83\,\frac{c}{m_1},$$

$$\frac{8c}{m_1} - \lambda_2^2 = -\,9{,}83\,\frac{c}{m_1}$$

ist, so erhalten wir aus der ersten Gl. (5):

$$\frac{\alpha_1^{(2)}}{\alpha_1^{(1)}} = \frac{1{,}83}{3} = 0{,}61,$$

$$\frac{\alpha_2^{(2)}}{\alpha_2^{(1)}} = -\,\frac{9{,}83}{3} = -\,3{,}28.$$



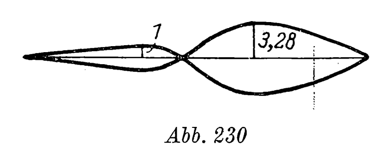


Abb. 230

In der Abb. 230 sind die Formen des schwingenden Trägers dargestellt, die der Grundschwingung und der ersten Oberschwingung entsprechen.

Wir wissen bereits, daß sich die allgemeinste schwingende Bewegung unseres Systems durch die Überlagerung beider gewonnener Hauptschwingungen darstellen läßt.

§ 149. Der Fall gleicher Eigenfrequenzen

Die allgemeine Untersuchung der Hauptschwingungen wurde im § 147 unter der Voraussetzung durchgeführt, daß die Eigenfrequenzen λ_1 und λ_2 untereinander nicht gleich sind. Die in diesem Paragraphen aufgestellten Wechselbeziehungen hören auf, richtig zu sein, wenn $\lambda_1 = \lambda_2$ ist. Wir wollen nun speziell den Fall der gleichen Eigenfrequenzen betrachten.

Wir setzen voraus, daß die in bezug auf λ^2 quadratische Frequenzgleichung (3) die gleichen Wurzeln $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ besitzt. Im § 147 galten die Ungleichungen

$$0 < \lambda_1^2 < \frac{c_{11}}{a_{11}}, \qquad \frac{c_{22}}{a_{22}} < \lambda_2^2 < +\infty,$$

die unter der Voraussetzung

$$\frac{c_{11}}{a_{11}} < \frac{c_{22}}{a_{22}}$$

aufgestellt waren.

Hieraus ersieht man, daß im Fall $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ die Wechselbeziehungen

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{c_{22}}{a_{22}}$$

Geltung haben müssen.

Substituieren wir nun

$$\lambda_1^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}$$

in Gl. (3), § 147, so finden wir:

$$c_{12} - \lambda_1^2 a_{12} = 0$$

und

$$\lambda_1^2 = \frac{c_{12}}{a_{12}}.$$

Also gilt im Falle gleicher Eigenfrequenzen:

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{c_{22}}{a_{22}} = \frac{c_{12}}{a_{12}}.$$

Greifen wir auf die Gln. (2), § 147, zurück, so sehen wir, daß diese bei der Substitution $\lambda^2 = \lambda_1^2$ identisch befriedigt werden. Folglich sind die Konstanten $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_2^{(1)}$, $\alpha_2^{(2)}$ in den Partikulärlösungen (4) und (5), § 147, durch keinerlei Abhängigkeiten miteinander verbunden. Wir setzen

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_1, \qquad \alpha_1^{(2)} = 0, \qquad \alpha_2^{(1)} = 0, \qquad \alpha_2^{(2)} = \alpha_2,$$

wobei α_1 und α_2 beliebige konstante Größen sind. Auf diese Art erhalten wir zwei Partikulärlösungen der Bewegungsgleichungen

$$q_1 = \alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1), \qquad q_2 = 0$$

und

$$q_1 = 0, \qquad q_2 = \alpha_2 \sin(\lambda_1 t + \beta_2).$$

Addieren wir diese Partikulärlösungen, so finden wir die neue Lösung

$$q_1 = \alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1),$$
$$q_2 = \alpha_2 \sin(\lambda_1 t + \beta_2).$$

Da diese Lösung die vier willkürlichen Konstanten α_1, α_2, β_1 und β_2 enthält, ist sie damit die allgemeinste Lösung der Gln. (4), § 146, im Fall gleicher Eigenfrequenzen.

Um ein klares Bild der Schwingungsbewegung des Systems im betrachteten Fall zu erhalten, gehen wir zu den kartesischen Koordinaten über.

Setzen wir die soeben gewonnenen Ausdrücke für q_1 und q_2 in die Gln. (10), § 147, ein, so erhalten wir für die Verrückungen u_i, v_i und w_i des Punktes M_i die Ausdrücke

$$u_i = A_1^{(i)} \alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1) + A_2^{(i)} \alpha_2 \sin(\lambda_1 t + \beta_2),$$

$$v_i = B_1^{(i)} \alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1) + B_2^{(i)} \alpha_2 \sin(\lambda_1 t + \beta_2),$$

$$w_i = C_1^{(i)} \alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1) + C_2^{(i)} \alpha_2 \sin(\lambda_1 t + \beta_2).$$

Die Eleminierung der Zeit t aus diesen Gleichungen führt zu der Gleichung

$$\begin{vmatrix} u_i, & v_i, & w_i \\ A_1^{(i)}, & B_1^{(i)}, & C_1^{(i)} \\ A_2^{(i)}, & B_2^{(i)}, & C_2^{(i)} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, die durch die Gleichgewichtslage des Punktes M^i ($u_i = v_i = w_i = 0$) geht. Also bewegt sich jeder Punkt des Systems in der Ebene' die durch seine Gleichgewichtslage geht. Wir wählen die Koordinatenachsen x, y und z so, daß die xy-Ebene parallel zu der Ebene liegt, in der sich der Punkt M_i bewegt. Dann ist

$$w_i = 0.$$

Ferner erhalten wir, wenn wir die Bezeichnungen

$$A_1^{(i)} \alpha_1 \sin \beta_1 + A_2^{(i)} \alpha_2 \sin \beta_2 = m_1,$$

$$A_1^{(i)} \alpha_1 \cos \beta_1 + A_2^{(i)} \alpha_2 \cos \beta_2 = n_1,$$

$$B_1^{(i)} \alpha_1 \sin \beta_1 + B_2^{(i)} \alpha_2 \sin \beta_2 = m_2,$$

$$B_1^{(i)} \alpha_1 \cos \beta_1 + B_2^{(i)} \alpha_2 \cos \beta_2 = n_2$$

einführen:

$$u_i = m_1 \cos \lambda_1 t + n_1 \sin \lambda_1 t,$$

$$v_i = m_2 \cos \lambda_1 t + n_2 \sin \lambda_1 t.$$

Eliminieren wir die Zeit aus diesen Gleichungen, so finden wir

$$(m_2 u_i - m_1 v_i)^2 + (n_2 u_i - n_1 v_i)^2 = (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse. Also führt jeder Punkt des Systems eine elliptische Bewegung in einer Ebene aus, die durch seine Gleichgewichtslage geht.

Die Hauptschwingungen eines Systems (wie im § 147 gezeigt) werden dadurch charakterisiert, daß bei jeder Hauptschwingung die Systempunkte geradlinige Schwingungen ausführen. Elliptische Bewegungen der Punkte eines schwingenden Systems sind stets die Folge der Überlagerung der zwei Hauptschwingungen mit gleicher Eigenfrequenz.

Wir werden das Gesagte an einem einfachen Beispiel erklären.

Wir stellen uns einen elastischen Stab vor, der am unteren Ende befestigt ist und an dem oberen Ende die Last M trägt (Abb. 231). Wir setzen voraus, daß der Stab in den beiden Hauptebenen gleiches elastisches Verhalten zeigt (z. B. ein Stab von rundem Querschnitt); die Masse des Stabes werden wir vernachlässigen und die Last M als materiellen Punkt betrachten. Wir wollen die Schwingungen der Last M um ihre Gleichgewichtslage untersuchen.

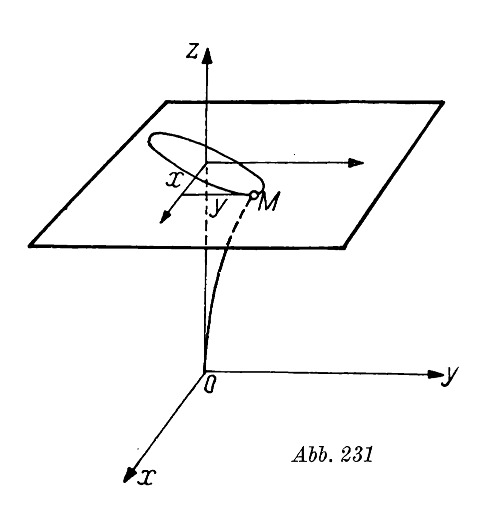


Abb. 231

Wir wählen die Koordinatenachsen x, y, z und richten die z-Achse längs des ungekrümmten Stabes (Abb. 231). Die Lage des gegebenen Systems wird durch die Koordinaten x und y des Punktes M bestimmt; folglich hat unser System zwei Freiheitsgrade. Bezeichnen wir die Masse der Last M mit m, die Federkonstante des Stabes mit c, wobei

$$c = \frac{3\,E\,J}{l^3}$$

ist (E ist der Elastizitätsmodul, J — das äquatoriale Trägheitsmoment des Stabquerschnittes, l — die Länge des Stabes), so gelten die Differentialgleichungen der Eigenschwingungen des Systems:

$$m\,\ddot{x} = -\,c\,x\,,$$

$$m\,\ddot{y} = -\,c\,y\,.$$

Hieraus folgt, daß das System zwei gleiche Eigenfrequenzen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

hat.

Die aus dem Gleichgewichtszustand gebrachte Last M wird eine elliptische Bewegung um die Gleichgewichtslage herum ausführen.

§ 150. Die erzwungenen Schwingungen zweier Massen mit elastischer Kopplung

Im § 145 haben wir die Eigenschwingungen eines Systems betrachtet, das aus den beiden Massen M_1 und M_2 besteht, von welchen die erste mit einer Schraubenfeder an einem festen Punkt aufgehängt ist, die andere aber mit einer zweiten Feder an der ersten aufgehängt ist (Abb. 224). Wir wenden uns nun den erzwungenen Schwingungen dieses Systems zu.

Wir nehmen an, daß auf die Masse M_1 die vertikale Erregerkraft $\mathfrak{S}$ wirkt, die als Zeitfunktion vorgegeben ist. Wir beschränken uns auf die Betrachtung des Falles einer periodischen Erregerkraft und setzen voraus, daß die Kraft $\mathfrak{S}$ als periodische Zeitfunktion mit der Schwingungsdauer T vorgegeben ist. Wir beginnen mit der Zerlegung der Kraft $\mathfrak{S}$ in ihre harmonischen Komponenten. Wir setzen ferner voraus, daß der Mittelwert der Kraft $\mathfrak{S}$ in einer Periode gleich Null ist; in einem solchen Falle fehlt das konstante Glied bei der Zerlegung der Größe S in eine FOURIER-Reihe, und es gilt:

$$S = \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \cos n p t + B_n \sin n p t),$$

wobei $p = \frac{2\pi}{T}$ die Grundfrequenz der Kraft $\mathfrak{S}$ ist und A_n und B_n die gegebenen Konstanten sind.

Wir haben das Fehlen des konstanten Gliedes bei der Zerlegung der Kraft $\mathfrak{S}$ vorausgesetzt, um eine gewisse Vereinfachung der weiteren Ableitung herbeizuführen — diese Voraussetzung schränkt nicht wesentlich die Allgemeingültigkeit der Untersuchung ein (das konstante Glied bei der Zerlegung der Kraft $\mathfrak{S}$ ruft nur eine gewisse zusätzliche statische Verlängerung der oberen Feder hervor).

Wir stellen nun die Differentialgleichungen der Bewegung unseres Systems auf. Wenn wir die im § 145 eingeführten Bezeichnungen beibehalten und die Erregerkraft $\mathfrak{S}$ zu den auf die Masse M_1 wirkenden Kräfte hinzufügen, erhalten wir:

$$m_1 \ddot{x}_1 = P_1 + F_2 - F_1 + S,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = P_2 - F_2.$$

Wenn wir hier (wie im § 145)

$$F_1 = c_1(f_1 + x_1),$$

$$F_2 = c_2(f_2 + x_2 - x_1)$$

annehmen und die Gleichgewichtsbedingungen

$$P_1 + c_2 f_2 - c_1 f_1 = 0,$$

$$P_2 - c_2 f_2 = 0$$

beachten, erhalten wir

$$m_1 \ddot{x}_1 = c_2 x_2 - c_2 x_1 - c_1 x_1 + S,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = - c_2 x_2 + c_2 x_1.$$

Führen wir darauf (wie im § 145) die Bezeichnungen

$$\frac{c_1 + c_2}{m_1} = 2a, \quad \frac{c_2}{m_1} = 2b, \quad \frac{c_2}{m_2} = 2c \tag{1}$$

ein und zerlegen S in eine FOURIER-Reihe, so ergibt sich endgültig:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + 2a\,x_1 - 2b\,x_2 = \frac{1}{m_1}\sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n \cos npt + B_n \sin npt), \\ &\ddot{x}_2 - 2c\,x_1 + 2c\,x_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Wir haben ein System von zwei inhomogenen, linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gewonnen. Wie bekannt, setzt sich die allgemeine Lösung eines solchen Systems aus einer beliebigen partikulären Lösung und der Lösung des entsprechenden homogenen Gleichungssystems zusammen. Die allgemeine Lösung des entsprechenden homogenen Gleichungssystems wurde bereits im § 145 gewonnen, sie entspricht den Eigenschwingungen des gegebenen Systems. Nun muß noch irgendeine partikuläre Lösung des Systems (2) gefunden werden.

Diese partikuläre Lösung werden wir in folgender Form suchen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sum_{n=1}^{n=\infty}(a_n^{(1)} \cos npt + b_n^{(1)} \sin npt), \\ x_2 &= \sum_{n=1}^{n=\infty}(a_n^{(2)} \cos npt + b_n^{(2)} \sin npt), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wobei $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$, $b_n^{(2)}$ unbestimmte Koeffizienten sind, die bestimmt werden müssen. Setzen wir die Ausdrücke für x_1 und x_2 in die Gln. (2) ein, so ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\left[(2a - n^2p^2)\,a_n^{(1)} - 2b\,a_n^{(2)}\right]\cos npt + \left[(2a - n^2p^2)\,b_n^{(1)} - 2b\,b_n^{(2)}\right]\sin npt\right\}$$
$$= \frac{l}{m_1}\sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n \cos npt + B_n \sin npt),$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\left[(2c - n^2p^2)\,a_n^{(2)} - 2c\,a_n^{(1)}\right]\cos npt + \left[(2c - n^2p^2)\,b_n^{(2)} - 2c\,b_n^{(1)}\right]\sin npt\right\} = 0.$$

Diese Gleichungen verwandeln sich in dem Falle in Identitäten, wenn

$$\begin{aligned} &(2a - n^2p^2)\,a_n^{(1)} - 2b\,a_n^{(2)} = \frac{A_n}{m_1}, \\ &(2c - n^2p^2)\,a_n^{(2)} - 2c\,a_n^{(1)} = 0, \\ &(2a - n^2p^2)\,b_n^{(1)} - 2b\,b_n^{(2)} = \frac{B_n}{m_1}, \\ &(2c - n^2p^2)\,b_n^{(2)} - 2c\,b_n^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

gilt.

Führen wir als abkürzende Schreibweise die Bezeichnung

$$\varDelta(n^2p^2) = (2a - n^2p^2)(2c - n^2p^2) - 4bc \tag{4}$$

ein, so erhalten wir aus den soeben angeführten Gleichungen

$$a_n^{(1)} = \frac{(2c - n^2p^2)A_n}{m_1\varDelta(n^2p^2)}, \qquad b_n^{(1)} = \frac{(2c - n^2p^2)B_n}{m_1\varDelta(n^2p^2)},$$

$$a_n^{(2)} = \frac{2cA_n}{m_1\varDelta(n^2p^2)}, \qquad b_n^{(2)} = \frac{2cB_n}{m_1\varDelta(n^2p^2)}.$$

Setzen wir diese Gleichungen in die Gln. (3) ein, so finden wir die gesuchte Partikulärlösung

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{l}{m_1}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(2c - n^2p^2)(A_n\cos npt + B_n\sin npt)}{\varDelta(n^2p^2)}, \\ x_2 &= \frac{l}{m_1}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(2cA_n\cos npt + B_n\sin npt)}{\varDelta(n^2p^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Fügen wir zu dieser Partikulärlösung die Lösung (12), § 145, der homogenen Gln. (2) desselben Paragraphen hinzu, so erhalten wir die allgemeine Lösung unserer Gln. (2). Die Gln. (12), § 145, entsprechen den Eigenschwingungen des Systems; wir wollen die den Gln. (5) entsprechende Bewegung *erzwungene Schwingungen* des Systems nennen. Wie man sieht, setzt sich die Bewegung des Systems aus seinen freien und erzwungenen Schwingungen zusammen.

Wir schließen die freien Schwingungen ab und wenden uns einem ausführlichen Studium der erzwungenen Schwingungen des Systems zu.

Aus den Gln. (5) folgt, daß jede harmonische Komponente der Erregerkraft $\mathfrak{S}$ die entsprechende harmonische Schwingung des Systems hervorruft; wenn sich diese harmonischen Schwingungen überlagern, bilden sie eine zusammengesetzte erzwungene schwingende Bewegung des Systems.

Wir beschäftigen uns mit der harmonischen Schwingung, die der n-ten harmonischen Komponente der Kraft $\mathfrak{S}$ entspricht. Der Einfachheit halber wollen wir auch noch $B_n = 0$ annehmen. In einem solchen Fall wird der n-ten harmonischen Komponente $A_n \cos npt$ der Kraft S die harmonische Schwingung

$$x_1 = a_n^{(1)}\cos npt, \qquad x_2 = a_n^{(2)}\cos npt$$

entsprechen, wobei

$$a_n^{(1)} = \frac{(2c - n^2p^2)A_n}{m_1\varDelta(n^2p^2)}, \qquad a_n^{(2)} = \frac{2cA_n}{m_1\varDelta(n^2p^2)} \tag{6}$$

ist.

Aus den Gln. (6) werden die Schwingungsamplituden der Massen M_1 und M_2 bestimmt. Wir wollen verfolgen, wie sich diese Amplituden bei der Veränderung der Frequenz unserer harmonischen Komponente np von 0 bis ∞ verändern.

Wir wollen uns vor allem die Gln. (7), § 145, für die Eigenfrequenzen λ_1 und λ_2 unseres Systems ins Gedächtnis zurückrufen. Es galt:

$$\lambda_1^2 = a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4bc},$$
$$\lambda_2^2 = a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4bc}.$$

Hieraus folgt

$$\lambda_1^2 - 2c = a - c - \sqrt{(a-c)^2 + 4bc} < 0,$$
$$\lambda_2^2 - 2c = a - c + \sqrt{(a-c)^2 + 4bc} > 0.$$

Somit liegen die Größen λ_1, $2c$ und λ_2 in nachstehender Reihenfolge:

$$0 < \lambda_1 < \sqrt{2c} < \lambda_2 < \infty.$$

Vergleichen wir die Gl. (4) mit der Gl. (5), § 145, die durch die Eigenfrequenz λ_1 und λ_2 befriedigt wird, so sehen wir, daß diese letzte Gleichung die Form

$$\Delta(\lambda^2) = 0$$

annimmt.

Da λ_1 und λ_2 die Wurzeln dieser Gleichung sind, gelten die Identitäten:

$$\Delta(\lambda_1^2) = 0, \qquad \Delta(\lambda_2^2) = 0$$

d. h., der Ausdruck $\Delta(n^2p^2)$ wird bei $np = \lambda_1$ und $np = \lambda_2$ zu Null. Beachten wir, daß

$$\Delta(0) = 4c(a-b) > 0$$

ist, so können wir weiter schließen, daß

$$\begin{array}{lll} \text{bei} & 0 < np < \lambda_1 & \Delta(n^2p^2) > 0, \\ \text{bei} & \lambda_1 < np < \lambda_2 & \Delta(n^2p^2) < 0, \\ \text{bei} & \lambda_2 < np < \infty & \Delta(n^2p^2) > 0 \end{array}$$

gilt.

Wir wollen nun die Vorzeichen der Amplituden $a_n^{(1)}$ und $a_n^{(2)}$ bei verschiedenen Werten der Frequenz np betrachten. Beachten wir die Vorzeichen der Größe $\Delta(n^2p^2)$ und nehmen $A_n > 0$ an, so kommen wir zu den nachstehenden Schlußfolgerungen:

1. Bei $0 < np < \lambda_1$ erhalten wir $a_n^{(1)} > 0$, $a^{(2)} > 0$. Das bedeutet, daß sich die Schwingungen

$$x_1 = a_n^{(1)} \cos npt, \qquad x_2 = a_n^{(2)} \cos npt$$

der beiden Massen M_1 und M_2 in Phase mit der harmonischen Komponente $A_n \cos npt$ befinden.

2. Bei $\lambda_1 < np < \sqrt{2c}$ ist $a_n^{(1)} < 0$, $a_n^{(2)} < 0$. Die Schwingungen beider Massen befinden sich in entgegengesetzter Phase zu der harmonischen Komponente $A_n \cos npt$.

3. Bei $\sqrt{2c} < np < \lambda_2$ ist $a_n^{(1)} > 0$, $a_n^{(2)} < 0$. Die Schwingungen der oberen Masse sind wieder in Phase mit der harmonischen Komponente der Erregerkraft, die Schwingungen der unteren Masse bleiben in entgegengesetzter Phase zu dieser harmonischen Komponente.

4. Bei $\lambda_2 < np < \infty$ ist $a_n^{(1)} < 0$, $a_n^{(2)} > 0$. Das Bild verändert sich; nun befinden sich die Schwingungen der oberen Masse in entgegengesetzter Phase, die Schwingungen der unteren Masse dagegen in Phase mit der harmonischen Komponente der Kraft S.

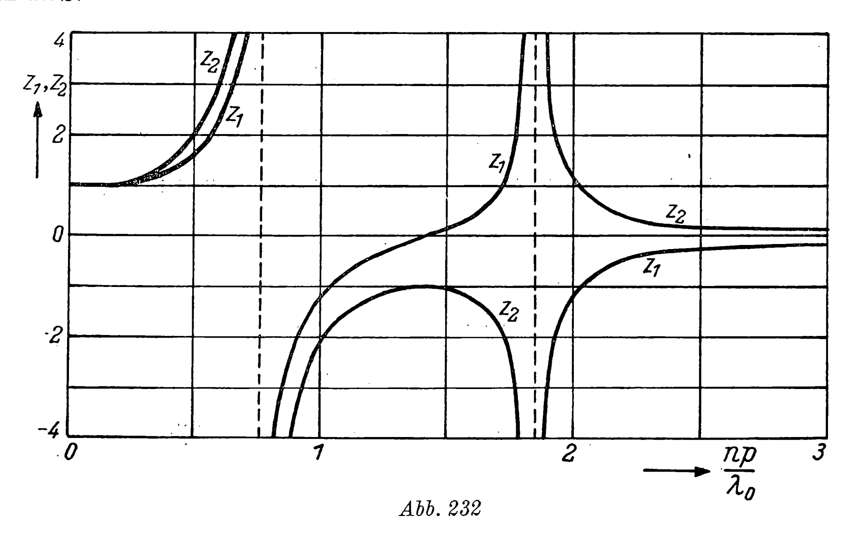


Abb. 232

Bei $np = \lambda_1$ und $np = \lambda_2$ werden die Nenner in den Gln. (6) Null, und folglich nehmen die Amplituden $a_n^{(1)}$ und $a_n^{(2)}$ unendlich große Werte an. Wir haben es hier mit der Erscheinung der *Resonanz* zu tun.

Wie man sieht, tritt Resonanz bei allen Werten der Frequenz der Erregerkraft p ein, die in den Gleichungen

$$p = \frac{\lambda_1}{n}, \qquad p = \frac{\lambda_2}{n}$$

enthalten sind, wobei n eine ganze Zahl ist.

Alle diese Werte der Frequenz p heißen *kritische* Frequenzen der Erregerkraft. Bei $p = \lambda_1$ und $p = \lambda_2$ tritt die erste harmonische Komponente der Erregerkraft in Resonanz, wir sprechen von Resonanzen erster Ordnung; bei $p = \frac{\lambda_1}{2}$ und $p = \frac{\lambda_2}{2}$ wird die Resonanz von der zweiten harmonischen Komponente hervorgerufen. Wir haben Resonanzen zweiter Ordnung usw.

In Abb. 232 sind die Funktionskurven der Amplituden $a_n^{(1)}$ und $a_n^{(2)}$ in Abhängigkeit von der Frequenz np dargestellt. Diese Diagramme sind unter der Voraussetzung $m_1 = 2m_2$, $c_1 = c_2$ aufgebaut.

In diesem Fall gilt nach den Gln. (1) und (7), § 145:

$$a = \frac{c_1}{m_1}, \qquad b = \frac{c_1}{2m_1}, \qquad c = \frac{c_1}{m_1},$$

$$\lambda_1^2 = 0{,}586 \frac{c_1}{m_1}, \qquad \lambda_2^2 = 3{,}414 \frac{c_1}{m_1}.$$

Wir bezeichnen mit λ_0 die Eigenfrequenz der Schwingungen der oberen Masse m_1 bei Fehlen der unteren Masse m_2, d. h., wir setzen

$$\lambda_0^2 = \frac{c_1}{m_1}.$$

In einem solchen Falle erhalten wir für die Eigenfrequenzen unseres Systems

$$\lambda_1 = 0{,}766\,\lambda_0, \qquad \lambda_2 = 1{,}85\,\lambda_0.$$

Ferner führen wir die Bezeichnungen

$$z_1 = \frac{c_1}{A_n} a_n^{(1)}, \qquad z_2 = \frac{c_1}{A_n} a_n^{(2)}$$

ein.

Gemäß den Gln. (6) gilt:

$$z_1 = \lambda_0^2 \frac{2c - n^2 p^2}{\Delta(n^2 p^2)}, \qquad z_2 = \lambda_0^2 \frac{2c}{\Delta(n^2 p^2)}$$

oder, wenn wir den Wert für c einsetzen,

$$z_1 = \lambda_0^2 \frac{2\lambda_0^2 - n^2 p^2}{\Delta(n^2 p^2)}, \qquad z_2 = \frac{2\lambda_0^4}{\Delta(n^2 p^2)}.$$

Andererseits gilt, wenn wir die Werte a, b und c in die Gl. (4) einsetzen:

$$\Delta(n^2 p^2) = (2\lambda_0^2 - n^2 p^2)^2 - 2\lambda_0^4 = \lambda_0^4 \left[\left(2 - \frac{n^2 p^2}{\lambda_0^2}\right)^2 - 2\right].$$

Folglich ist

$$z_1 = \frac{2 - \dfrac{n^2 p^2}{\lambda_0^2}}{\left(2 - \dfrac{n^2 p^2}{\lambda_0^2}\right)^2 - 2}, \qquad z_2 = \frac{2}{\left(2 - \dfrac{n^2 p^2}{\lambda_0^2}\right)^2 - 2}.$$

In Abb. 232 sind auf der horizontalen Achse die Werte $\frac{np}{\lambda_0}$ abgetragen, auf der vertikalen Achse die Werte z_1 und z_2. Bei $np = \lambda_1$ und $np = \lambda_2$ wachsen die Größen z_1 und z_2 und folglich auch die Amplituden $a_n^{(1)}$ und $a_n^{(2)}$ ins Unendliche, was der Resonanzerscheinung entspricht.

Es ist interessant, die Veränderung der *Amplitudenverhältnisse* $a_n^{(1)}$ und $a_n^{(2)}$ bei der Veränderung der Frequenz np zu verfolgen; von der Größe dieses Verhältnisses hängt die *Form* der erzwungenen Schwingung unseres Systems bei verschiedenen Werten der Frequenz np ab. Aus den Gln. (6) folgt:

$$\frac{a_n^{(1)}}{a_n^{(2)}} = \frac{2c - n^2 p^2}{2c}.$$

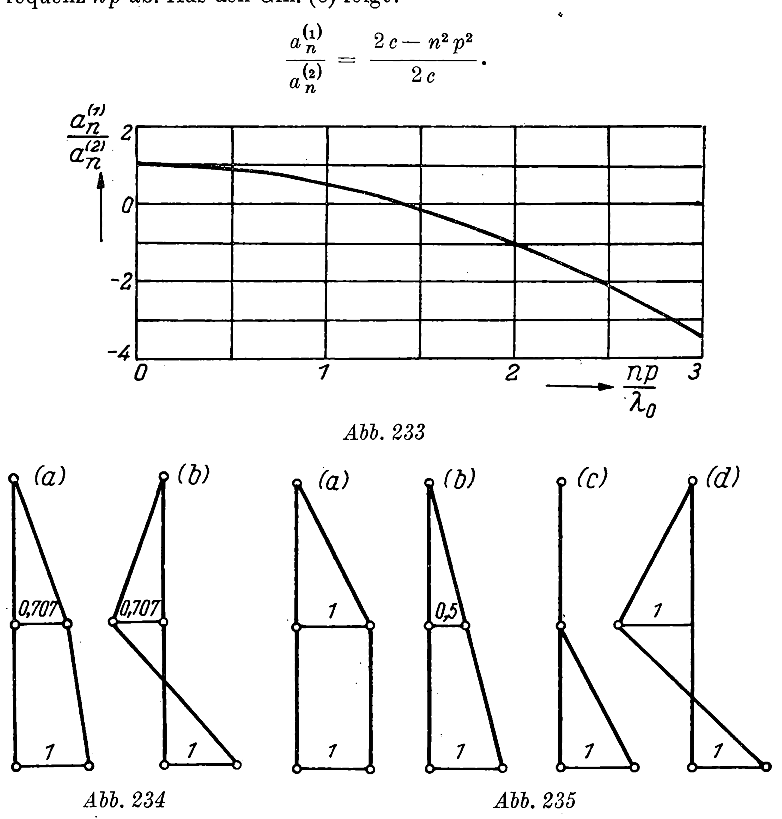


Abb. 233

Abb. 234

Abb. 235

Das Diagramm der Abhängigkeit des Amplitudenverhältnisses $\frac{a_n^{(1)}}{a_n^{(2)}}$ von der Frequenz np ist in Abb. 233 (für den Fall $m_2 = m_1$, $c_1 = c_2$) dargestellt.

Wir erinnern daran, daß wir beim Studium der Eigenschwingungen eines gegebenen Systems (§ 145) fanden, daß die Amplitudenverhältnisse der Massen m_1 und m_2 bei den Hauptschwingungen des Systems folgende Werte haben:

$$\frac{a_1^{(1)}}{a_1^{(2)}} = \frac{2c - \lambda_1^2}{2c} \quad \text{(für die erste Hauptschwingung)},$$

$$\frac{a_2^{(1)}}{a_2^{(2)}} = \frac{2c - \lambda_2^2}{2c} \quad \text{(für die zweite Hauptschwingung)}.$$

Wie man sieht, wird bei $np = \lambda_1$ und $np = \lambda_2$ das Amplitudenverhältnis der erzwungenen Schwingungen $\frac{a_n^{(1)}}{a_n^{(2)}}$ gleich dem Amplitudenverhältnis der Eigenschwingungen bei der entsprechenden Hauptschwingung des Systems. Folglich fällt die Form der erzwungenen Schwingungen im Resonanzfall bei $np = \lambda_1$ und $np = \lambda_2$ mit der Form der entsprechenden Hauptschwingungen zusammen.

In Abb. 234 sind die Formen der Hauptschwingungen unseres Systems für den Fall $m_2 = 2\,m_1$, $c_1 = c_2$ dargestellt. In Abb. 235 sind die Formen der erzwungenen Schwingungen unter der gleichen Voraussetzung bei $np = 0$, $np = \lambda_0$, $np = \sqrt{2c}$ $= 1{,}414\,\lambda_0$, $np = 2\lambda_0$ gegeben. Die Diagramme der Abb. 234 und 235 sind ebenso konstruiert wie im § 145.

§ 151. Das Schema eines Schwingungsdämpfers

Wenn wir nochmals auf die Gln. (6) des vorhergehenden Paragraphen zurückgreifen, vermerken wir den Spezialfall $np = \sqrt{2c}$: Bei diesem Wert der Frequenz np wird die Amplitude $a_n^{(1)}$ Null, d. h., die obere Masse m_1 bleibt unbeweglich; die entsprechende Schwingungsform ist in Abb. 235c dargestellt.

Dieses Resultat bietet die Möglichkeit, die Schwingungen zu dämpfen, ohne daß am System Widerstände angreifen, d. h. ohne Absorption der Schwingungsenergie, sondern durch Hinzufügen eines geeigneten zusätzlichen Schwingers an das schwingende System. Ein derartiger zusätzlicher Schwinger heißt *Schwingungstilger.*

Wir nehmen also an, daß wir ein System mit einem Freiheitsgrad haben, das wir uns schematisch in Form der Masse m_1 vorstellen, die an einer Feder an einem festen Punkt aufgehängt ist. Wenn wir die Federkonstante der Feder mit c_1 bezeichnen, wird die Eigenfrequenz des Systems gleich

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}$$

sein.

Wir nehmen an, daß auf die Masse m_1 eine periodische Erregerkraft wirkt. Wenn die Frequenz der n-ten harmonischen Komponente dieser Kraft (wir bezeichnen diese Frequenz wie bisher mit np) nahe der Frequenz λ_0 ist, befindet sich die n-te harmonische Komponente der Erregerkraft unter Bedingungen, die nahe der Resonanz sind, und wir werden bedeutende Amplituden der Masse m_1 erhalten, die durch diese harmonische Komponente hervorgerufen und von verhältnismäßig unbedeutenden Schwingungen begleitet sind, die den übrigen harmonischen Komponenten der Erregerkraft entsprechen.

Um die Schwingungen der n-ten Ordnung der Masse m_1, d. h. die Schwingungen dieser Masse, die durch die n-te harmonische Komponente der auf diese Masse wirkenden Erregerkraft hervorgerufen werden, zu vernichten, verfahren wir folgendermaßen. Wir fügen zu der Masse m_1 eine neue Masse m_2 hinzu, wobei wir diese an der ersten Masse mit einer Feder mit der Federkonstanten c_2 aufhängen. Wir erhalten

das System mit zwei Freiheitsgraden, das wir im § 150 untersucht haben. Wir wissen bereits, daß die Schwingungen der Masse m_1, die der n-ten harmonischen Komponente entsprechen, restlos vernichtet werden, wenn die Masse m_2 und die Federkonstante c_2 so gewählt werden, daß die Bedingung

$$np = \sqrt{2c}$$

oder, was dasselbe ist,

$$np = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$$

(s. Gln. (1), § 145) erfüllt ist. In diesem Falle wirkt die Masse m_2 als Schwingungsdämpfer.

Wir sehen, daß $\sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$ nichts anderes ist als die Eigenfrequenz, welche die Masse m_2 besitzen würde, wenn ihre Feder nicht an der Masse m_1, sondern an einem *festen Punkt* aufgehängt wäre. Die von uns soeben gewonnene Bedingung wird darauf zurückgeführt, daß diese Eigenfrequenz des Schwingungsdämpfers gleich der Frequenz np sein muß. Oder anders gesagt, der Schwingungsdämpfer muß auf Resonanz mit der Frequenz derjenigen Schwingungen abgestimmt sein, die er zu löschen hat.

Man darf nicht vergessen, daß der Schwingungsdämpfer nur Schwingungen einer bestimmten Ordnung dämpft, die Schwingungen der übrigen Ordnungen aber bleiben ungedämpft. Es kann sogar vorkommen, daß durch die Wirkungen des Schwingungsdämpfers die Schwingungen irgendeiner Ordnung nicht nur nicht abgeschwächt, sondern im Gegenteil verstärkt werden. Wir erhalten tatsächlich nach Anschluß des Schwingungsdämpfers an das Grundsystem ein System mit zwei Freiheitsgraden, das zwei Eigenfrequenzen λ_1 und λ_2 besitzt. Wenn eine dieser Eigenfrequenzen nahe der Frequenz einer der harmonischen Komponenten der ungedämpften erzwungenen Schwingungen ist, erweist sich diese harmonische Komponente als verstärkend und die Wirkung des Schwingungsdämpfers kann negativ sein. Beim Projektieren eines Schwingungsdämpfers muß man sich davon überzeugen (durch Berechnung der Eigenfrequenzen λ_1 und λ_2), daß dieses nicht vorkommen kann.

Es muß noch erwähnt werden, daß ein nach dem besprochenen Schema aufgebauter Schwingungsdämpfer nur in dem Fall zuverlässig funktionieren kann, wenn die Frequenz p der Erregerkraft einen festen Wert hat. Wenn sich aber (wie das häufig vorkommt) die Frequenz p verändern kann, wird der Schwingungsdämpfer unvermeidlich aus der Resonanz mit denjenigen Schwingungen geraten, die er dämpfen soll, und wenn sich die Frequenz np dieser Schwingungen einer der Eigenfrequenzen λ_1 und γ_2 nähert, werden diese zur Dämpfung bestimmten Schwingungen nicht nur nicht gelöscht, sondern sogar verstärkt werden.

In allen ähnlichen Fällen ist die Einführung irgendwelcher Widerstände in das schwingende System, welche die Energie der Schwingungen verzehren, ein radikales Mittel zur Vernichtung unerwünschter Schwingungen. Allein auch in diesen Fällen kann sich der Anschluß eines Schwingungsdämpfers an das Grundsystem als nützlich erweisen. Oft ist es schwierig, einen Widerstand in das schwingende Grundsystem einzuführen; in solchen Fällen kann man, nachdem man an das System einen Schwingungsdämpfer angeschlossen hat, den Widerstand in den Schwingungsdämpfer einführen.

Dieser Widerstand wird, wenn er die Schwingungen des Schwingungsdämpfers dämpft, gleichzeitig auch die Schwingungen im Grundsystem dämpfen.

Auf diesem Prinzip ist der FRAHMsche Schlingertank für Schiffe aufgebaut, der eine weite Verbreitung gefunden hat.

In dieser Konstruktion werden durch die Schwingungen des Schiffes Schwingungen des Wassers in den beiden miteinander in Verbindung stehenden, auf dem Schiff angebrachten Behältern hervorgerufen. Hier ist der Rumpf des auf den Wellen schaukelnden Schiffes das Grundsystem; das Wasser in den miteinander in Verbindung stehenden Behältern ist der Schwingungsdämpfer. Die Schwingungen des Wassers in den Behältern werden durch eine besondere Drosselvorrichtung gedämpft. Hierdurch wird eine bedeutende Herabminderung der Schwingungsamplitude des Schiffes erreicht.

KAPITEL XXV

KLEINE SCHWINGUNGEN EINES SYSTEMS MIT EINER ENDLICHEN ANZAHL VON FREIHEITSGRADEN

§ 152. Die Differentialgleichungen der Eigenschwingungen eines Systems

Wir wenden uns nun der allgemeinen Theorie der kleinen Schwingungen eines Systems mit einer beliebigen endlichen Anzahl von Freiheitsgraden zu. Wir beginnen mit der Betrachtung der Eigenschwingungen des Systems.

Wir stellen uns ein konservatives System vor, das aus den materiellen Punkten M_1, $M_2, \ldots, M_n$ besteht. Wir nehmen an, daß dieses System k Freiheitsgrade besitzt, und bezeichnen die verallgemeinerten Koordinaten des Systems mit $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Wir wollen die kleinen Schwingungen des Systems um seine Gleichgewichtslage untersuchen, die wir als stabil voraussetzen. In der Gleichgewichtslage sind die Koordinatenwerte $q_1 = q_2 = \ldots = q_k = 0$.

Wir wollen die Differentialgleichungen der kleinen Schwingungen unseres Systems in den Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ aufstellen.

Nach der Methode von LAGRANGE gilt

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= -\frac{\partial V}{\partial q_1}, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= -\frac{\partial V}{\partial q_2}, \\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= -\frac{\partial V}{\partial q_k},
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wobei T und V die kinetische und die potentielle Energie des Systems sind.

Beachten wir, daß die Zwangsbedingungen unseres Systems als skleronom vorausgesetzt werden, so können wir bei der Berechnung der kinetischen Energie die Gleichung

$$T = \frac{1}{2}\big(A_{11}\dot q_1^2 + A_{22}\dot q_2^2 + \cdots + A_{kk}\dot q_k^2 + 2A_{12}\dot q_1\dot q_2 + 2A_{13}\dot q_1\dot q_3 + \cdots + 2A_{k-1,k}\dot q_{k-1}\dot q_k\big) \tag{2}$$

benutzen, wobei $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{k-1,k}$ Funktionen von $q_1, q_2, \ldots, q_k$ sind.

Diese Gleichung kann man kürzer in die Form

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=k} A_{ij}\dot q_i\dot q_j$$

schreiben unter der Bedingung $A_{ij} = A_{ji}$.

Beim Betrachten der kleinen Schwingungen des Systems um seine Gleichgewichtslage werden wir die verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ und auch die verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot q_1, \dot q_2 \ldots, \dot q_k$ als kleine Größen erster Ordnung ansehen. Wir wollen im Ausdruck der kinetischen Energie T nur die kleinen Glieder zweiter Ordnung behalten und entwickeln die Funktionen A_{ij} in Reihen nach den Potenzen der kleinen Größen $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Dann gilt:

$$A_{ij} = a_{ij} + \cdots$$

Hier ist a_{ij} der Wert der Funktion A_{ij} an der Stelle $q_1 = q_2 = \ldots = q_k = 0$, die Auslassungspunkte vertreten die Glieder, die $q_1, q_2, \ldots, q_k$ im ersten Grade und höheren Graden enthalten. Alle diese Glieder werden nach der Multiplikation mit $\dot q_i \dot q^j$ kleine Größen dritter und höherer Ordnung sein. Vernachlässigen wir diese Größen, so erhalten wir:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=k} a_{ij}\dot q_i\dot q_j .$$

Wir bemerken, daß hier die Koeffizienten a_{ij} konstante Größen sind, wobei $a_{ij} = a_{ji}$ ist.

Wir gehen nun zur Berechnung der potentiellen Energie V über. Wir wissen, daß V eine Funktion der Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ ist. Entwickeln wir diese Funktion nach Potenzen der kleinen Größen $q_1, q_2, \ldots, q_k$, so gilt

$$V = V_0 + \sum_{i=1}^{i=k}\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=k}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\,\partial q_j}\right) q_i q_j + \cdots,$$

wobei V_0, $\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0$ usw. Werte der Funktion V und ihrer Ableitungen bei $q_1 = q_2 = \ldots = q_k = 0$ sind, d. h. Werte, die der Gleichgewichtslage des Systems entsprechen.

Wir bemerken nun, daß in der Gleichgewichtslage die ersten Ableitungen der potentiellen Energie nach den verallgemeinerten Koordinaten (die gleich den entsprechenden negativen verallgemeinerten Kräften sind) gleich Null werden. Folglich gilt

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 = 0 .$$

Ferner nehmen wir den Wert der potentiellen Energie in der Gleichgewichtslage unseres Systems zu Null an; in diesem Fall haben wir:

$$V_0 = 0.$$

Führen wir die Bezeichnungen

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right) = c_{ij}$$

ein und behalten im Ausdruck für die potentielle Energie nur die kleinen Glieder zweiter Ordnung, so erhalten wir endgültig:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=k} c_{ij} q_i q_j.$$

Wir bemerken, daß hier die Koeffizienten c_{ij} konstante Größen sind, wobei $c_{ij} = c_{ji}$ ist. Wir werden voraussetzen, daß wenigstens eine dieser Größen ungleich Null ist.

Ganz am Anfang dieser Paragraphen sind wir bereits von der Voraussetzung ausgegangen, daß die Gleichgewichtslage $q_1 = q_2 = \ldots = q_k = 0$ stabil ist. Das bedeutet (nach dem Theorem von Dirichlet), daß die potentielle Energie V in der Gleichgewichtslage ein Minimum hat. Folglich sind die Werte der potentiellen Energie in den Lagen des Systems, die nahe der Gleichgewichtslage sind, größer als die Werte der potentiellen Energie in der Gleichgewichtslage. Wir haben aber die Werte der potentiellen Energie des Systems in der Gleichgewichtslage mit Null angenommen. Hieraus folgt, daß in allen Lagen des Systems, die hinreichend nahe der Gleichgewichtslage sind, mit den obigen Annahmen die potentielle Energie V eine positive Größe sein muß.

Nachdem wir die Ausdrücke der kinetischen und der potentiellen Energie des Systems gewonnen haben, gehen wir nun zur Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung des Systems über.

Es gilt:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = a_{i1} \dot{q}_1 + a_{i2} \dot{q}_2 + \cdots + a_{ik} \dot{q}_k, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = c_{i1} q_1 + c_{i2} q_2 + \cdots + c_{ik} q_k.$$

Setzen wir diese Größen in die Gln. (1) ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + \cdots + a_{1k}\ddot{q}_k + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + \cdots + c_{1k}q_k &= 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + \cdots + a_{2k}\ddot{q}_k + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + \cdots + c_{2k}q_k &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\ddot{q}_1 + a_{k2}\ddot{q}_2 + \cdots + a_{kk}\ddot{q}_k + c_{k1}q_k + c_{k2}q_2 + \cdots + c_{kk}q_k &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Wir erinnern nochmals daran, daß hier $a_{ij} = a_{ji}$ und $c_{ij} = c_{ji}$ ist. Dies sind die Differentialgleichungen der kleinen Schwingungen eines Systems mit k Freiheitsgraden.

§ 153. Die Hauptschwingungen und Eigenfrequenzen

Wir gehen jetzt zur Integration der Gln. (3), § 152, über und wollen ihre Einzellösungen in der Form

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \alpha^{(1)} \sin(\lambda t + \beta), \\ q_2 &= \alpha^{(2)} \sin(\lambda t + \beta), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_k &= \alpha^{(k)} \sin(\lambda t + \beta) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ansetzen, wobei $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(k)}, \lambda, \beta$ Konstanten sind.

Setzen wir die Ausdrücke für $q_1, q_2, \dots, q_k$ in die Gln. (3), § 152 ein und dividieren durch $\sin(\lambda t + \beta)$, so erhalten wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (c_{11} - \lambda^2 a_{11})\alpha^{(1)} + (c_{12} - \lambda^2 a_{12})\alpha^{(2)} + \cdots + (c_{1k} - \lambda^2 a_{1k})\alpha^{(k)} = 0, \\ (c_{21} - \lambda^2 a_{21})\alpha^{(1)} + (c_{22} - \lambda^2 a_{22})\alpha^{(2)} + \cdots + (c_{2k} - \lambda^2 a_{2k})\alpha^{(k)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (c_{k1} - \lambda^2 a_{k1})\alpha^{(1)} + (c_{k2} - \lambda^2 a_{k2})\alpha^{(2)} + \cdots + (c_{kk} - \lambda^2 a_{kk})\alpha^{(k)} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Diese Gleichungen, die linear und homogen in bezug auf die Konstanten $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(k)}$ sind, lassen in bezug auf diese Konstanten eine von Null verschiedene Lösung nur in dem Falle zu, daß die Koeffizientendeterminante des Systems gleich Null ist. Bezeichnen wir diese Koeffizientendeterminante mit $\Delta(\lambda^2)$, d. h., nehmen wir

$$\Delta(\lambda^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda^2 a_{11}, & c_{12} - \lambda^2 a_{12}, & \dots, & c_{1k} - \lambda^2 a_{1k}, \\ c_{21} - \lambda^2 a_{21}, & c_{22} - \lambda^2 a_{22}, & \dots, & c_{2k} - \lambda^2 a_{2k}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} - \lambda^2 a_{k1}, & c_{k2} - \lambda^2 a_{k2}, & \dots, & c_{kk} - \lambda^2 a_{kk} \end{vmatrix}$$

an, so erhalten wir die Gleichung

$$\Delta(\lambda^2) = 0, \qquad (3)$$

die durch die Größe λ befriedigt werden muß. Diese Gleichung heißt *Frequenzgleichung*.

Wie man sieht, ist die Frequenzgleichung eine Gleichung k-ten Grades in bezug auf λ^2. Man kann zeigen, daß alle Wurzeln dieser Gleichung reell und positiv sind.

Wenn λ^2 die Gl. (3) befriedigt, lassen die Gln. (2) eine unendliche Anzahl von Lösungen in bezug auf $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(k)}$ zu. Dabei sind die Größen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(k)}$, welche die Gln. (2) befriedigen, reell, wenn λ^2 reell ist; wenn aber λ^2 eine komplexe Größe ist, dann sind auch die Größen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(k)}$, komplexe Größen.

Nun wollen wir zeigen, daß es komplexe Größen für λ^2, welche die Gl. (3) befriedigen, in Wirklichkeit nicht geben kann.

Wir wollen das Gegenteil annehmen. Wir setzen voraus, daß die Gl. (3) eine komplexe Wurzel

$$\lambda_1^2 = m + in$$

hat.

In diesem Falle muß die Gl. (3) auch eine konjugiert komplexe Wurzel

$$\lambda_2^2 = m - i n$$

haben.

Wir bezeichnen die Größen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(k)}$, die der Wurzel λ_1^2 entsprechen, mit

$$\alpha_1^{(1)} = \gamma_1 + i\,\delta_1, \qquad \alpha_1^{(2)} = \gamma_2 + i\,\delta_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha_1^{(k)} = \gamma_k + i\,\delta_k.$$

In einem solchen Fall entsprechen der Wurzel λ_2^2 die konjugierten Werte

$$\alpha_2^{(1)} = \gamma_1 - i\,\delta_1, \qquad \alpha_2^{(2)} = \gamma_2 - i\,\delta_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha_2^{(k)} = \gamma_k - i\,\delta_k.$$

Der Kürze halber schreiben wir das Gleichungssystem (2) in folgende Form um:

$$\sum_{j=1}^{j=k} (c_{sj} - \lambda^2 a_{sj})\,\alpha^{(j)} = 0 \quad (s = 1,\ 2, \ldots, k) \tag{2}$$

und setzen in dieses Gleichungssystem $\lambda^2 = \lambda_1^2$, $\alpha^{(j)} = \alpha_1^{(j)}$ ein; das ergibt k Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{j=k} (c_{sj} - \lambda_1^2 a_{sj})\,\alpha_1^{(j)} = 0 \quad (s = 1,\ 2, \ldots, k).$$

Multiplizieren wir jede dieser Gleichungen entsprechend mit $\alpha_2^{(s)}$ und addieren die gewonnenen Resultate, so erhalten wir:

$$\sum_{s=1}^{s=k} \sum_{j=1}^{j=k} (c_{sj} - \lambda_1^2 a_{sj})\,\alpha_1^{(j)} \alpha_2^{(s)} = 0$$

oder

$$\sum_{s=1}^{s=k} \sum_{j=1}^{j=k} c_{sj}\,\alpha_1^{(j)} \alpha_2^{(s)} - \lambda_1^2 \sum_{s=1}^{s=k} \sum_{j=1}^{j=k} a_{sj}\,\alpha_1^{(j)} \alpha_2^{(s)} = 0. \tag{4}$$

Wir werden nun zeigen, daß die beiden in dieser Gleichung enthaltenen doppelten Summen reelle und positive Größen sind. Nehmen wir die erste Summe und in dieser Summe die beiden Summanden

$$c_{sj}\,\alpha_1^{(j)} \alpha_2^{(s)} + c_{js}\,\alpha_1^{(s)} \alpha_2^{(j)}.$$

Erinnern wir uns daran, daß $c_{sj} = c_{js}$ ist und setzen die Werte für $\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(s)}, \alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(j)}$ ein, so haben wir

$$\begin{aligned} c_{sj}\,\alpha_1^{(j)} \alpha_2^{(s)} + c_{js}\,\alpha_1^{(s)} \alpha_2^{(j)} &= c_{sj} \left(\alpha_1^{(j)} \alpha_2^{(s)} + \alpha_1^{(s)} \alpha_2^{(j)}\right) \\ &= c_{sj} \left[(\gamma_j + i\,\delta_j)(\gamma_s - i\,\delta_s) + (\gamma_s + i\,\delta_s)(\gamma_j - i\,\delta_j)\right] \\ &= c_{sj} (2\gamma_s \gamma_j + 2\,\delta_s\,\delta_j) = c_{sj} (\gamma_s \gamma_j + \delta_s\,\delta_j) + c_{sj} (\gamma_j \gamma_s + \delta_j\,\delta_s). \end{aligned}$$

Wie man sieht, verändert sich die Summe der von uns genommenen beiden Summanden bei einer Vertauschung der Produkte $\alpha_1^{(j)}, \alpha_2^{(s)}$ und $\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(j)}$ entsprechend den Größen $\gamma_s \gamma_j + \delta_s \delta_j$ und $\gamma_j \gamma_s + \delta_j \delta_s$ nicht. Hieraus folgt, daß sich auch die ganze uns interessierende doppelte Summe bei dieser Vertauschung nicht verändert. Es gilt also:

$$\sum_{s=1}^{s=k} \sum_{j=1}^{j=k} c_{sj} \alpha_1^{(j)} \alpha_2^{(s)} = \sum_{s=1}^{s=k} \sum_{j=1}^{j=k} c_{sj} (\gamma_s \gamma_j + \delta_s \delta_j)$$

$$= \sum_{s=1}^{s=k} \sum_{j=1}^{j=k} c_{sj} \gamma_s \gamma_j + \sum_{s=1}^{s=k} \sum_{j=1}^{j=k} c_{sj} \delta_s \delta_j .$$

Unter der Berücksichtigung, daß die potentielle Energie

$$V = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{s=k} \sum_{j=1}^{j=k} c_{sj} q_s q_j$$

unseres Systems eine positive Größe ist (wegen der von uns vorausgesetzten Stabilität der Gleichgewichtslage des Systems) und nur Null bei $q_1 = q_2 = \ldots = q_k = 0$ wird, gilt folglich bei allen reellen (und gleichzeitig von Null verschiedenen) Werten von $q_1, q_2, \ldots, q_k$:

$$\sum_{s=1}^{s=k} \sum_{j=1}^{j=k} c_{sj} q_s q_j > 0 .$$

Da $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ und $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ reelle Zahlen sind, schließen wir, daß

$$\sum_{s=1}^{s=k} \sum_{j=1}^{j=k} c_{sj} \gamma_s \gamma_j > 0 , \qquad \sum_{s=1}^{s=k} \sum_{j=1}^{j=k} c_{sj} \delta_s \delta_j > 0$$

ist, und daraus folgt, daß

$$\sum_{s=1}^{s=k} \sum_{j=1}^{j=k} c_{sj} \alpha_s \alpha_j > 0$$

gilt.

Entsprechend überzeugen wir uns, da $\alpha_{sj} = \alpha_{js}$ ist, daß auch die kinetische Energie T unseres Systems eine positive Größe ist, also

$$\sum_{s=1}^{s=k} \sum_{j=1}^{j=k} a_{sj} \alpha_s \alpha_j > 0 .$$

Wir setzen nun $\lambda_1^2 = (m + in)$ in die Gl. (4) ein. Setzen wir nun einzeln den reellen und den imaginären Teil desjenigen komplexen Ausdruckes gleich Null, den wir im linken Teil der Gleichung haben, so erhalten wir

$$\sum_{s=1}^{s=k} \sum_{j=1}^{j=k} c_{sj} \alpha_s \alpha_j - m \sum_{s=1}^{s=k} \sum_{j=1}^{j=k} a_{sj} \alpha_s \alpha_j = 0 ,$$

$$n \sum_{s=1}^{s=k} \sum_{j=1}^{j=k} a_{sj} \alpha_s \alpha_j = 0 .$$

woraus

$$m = \frac{\sum\limits_{s=1}^{s=k} \sum\limits_{j=1}^{j=k} c_{sj} \alpha_s \alpha_j}{\sum\limits_{s=1}^{s=k} \sum\limits_{j=1}^{j=k} a_{sj} \alpha_s \alpha_j} > 0, \quad n = 0$$

folgt.

Also wird in der von uns vorausgesetzten komplexen Wurzel $\lambda_1^2 = (m + in)$ der Frequenzgleichung der imaginäre Teil Null, der Realteil aber ist positiv. Hieraus folgt, daß alle Wurzeln der Frequenzgleichung nur reelle positive Größen sein können.

Ordnen wir diese Wurzeln in der Reihenfolge ihres Index an und bezeichnen sie mit $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_k^2$; dann erhalten wir k reelle positive Werte $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2, \ldots$, $\lambda = \lambda_k$, bei denen das Gleichungssystem (3), § 152, Einzellösungen in der Form (1) zuläßt.

Also gestatten die Gln. (3), § 152, k linear unabhängige Einzellösungen:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = \alpha_i^{(1)} \sin(\lambda_i t + \beta_i), \\ q_2 = \alpha_i^{(2)} \sin(\lambda_i t + \beta_i), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_k = \alpha_i^{(k)} \sin(\lambda_i t + \beta_i), \end{array}\right\} \tag{5}$$

die den Werten $i = 1, 2, \ldots, k$ entsprechen.

Jeder dieser Einzellösungen entspricht eine gewisse harmonische Schwingungsbewegung unseres Systems. Diese k harmonischen Schwingungsbewegungen des Systems heißen *Hauptschwingungen*. Die Frequenzen der Hauptschwingungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ heißen *Eigenfrequenzen* des Systems.

Da wir keinerlei Bedingungen erhalten haben, welche die Wahl der Konstanten β in der Partikulärlösung (1) einschränken, bleiben in den Gln. (5) die Anfangsphasen β_i ganz willkürlich. Was die Konstanten $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(k)}$ in der Lösung (1) anbetrifft, so müssen diese die Gln. (2) befriedigen. Nehmen wir in diesen Gleichungen $\lambda = \lambda_i$, $\alpha^{(1)} = \alpha_i^{(1)}, \alpha^{(2)} = \alpha_i^{(2)}, \ldots, \alpha^{(k)} = \alpha_i^{(k)}$ an, so haben wir:

$$\left.\begin{array}{l} (c_{11} - \lambda_i^2 a_{11})\alpha_i^{(1)} + (c_{12} - \lambda_i^2 a_{12})\alpha_i^{(2)} + \cdots + (c_{1k} - \lambda_i^2 a_{1k})\alpha_i^{(k)} = 0, \\ (c_{21} - \lambda_i^2 a_{21})\alpha_i^{(1)} + (c_{22} - \lambda_i^2 a_{22})\alpha_i^{(2)} + \cdots + (c_{2k} - \lambda_i^2 a_{2k})\alpha_i^{(k)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (c_{k1} - \lambda_i^2 a_{k1})\alpha_i^{(1)} + (c_{k2} - \lambda_i^2 a_{k2})\alpha_i^{(2)} + \cdots + (c_{kk} - \lambda_i^2 a_{kk})\alpha_i^{(k)} = 0. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Die Koeffizientendeterminante dieses Systems ist gleich Null, da $\lambda = \lambda_i$ die Gl. (3) befriedigt; folglich ist eine dieser Gleichungen die Folge der anderen. Wir können die aufgeschriebenen Gleichungen befriedigen, wenn wir

$$\frac{\alpha_i^{(1)}}{\Delta_{1k}(\lambda_i^2)} = \frac{\alpha_i^{(2)}}{\Delta_{2k}(\lambda_i^2)} = \cdots = \frac{\alpha_i^{(k)}}{\Delta_{kk}(\lambda_i^2)} = \alpha_i$$

annehmen, wobei α_i eine beliebige Zahl ist und $\Delta_{sj}(\lambda^2)$ eine Unterdeterminante der Koeffizientendeterminante $\Delta(\lambda^2)$ ist, die durch Ausstreichen der s-ten Spalte und der j-ten Zeile gewonnen und mit $(-1)^{j+s}$ multipliziert ist. Auf diese Art erhalten die Gleichungen der i-ten Hauptschwingung endgültig die Form:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \Delta_{1k}(\lambda_i^2)\alpha_i \sin(\lambda_i t + \beta_i), \\ q_2 &= \Delta_{2k}(\lambda_i^2)\alpha_i \sin(\lambda_i t + \beta_i), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_k &= \Delta_{kk}(\lambda_i^2)\alpha_i \sin(\lambda_i t + \beta_i). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Somit haben die Differentialgleichungen (3), § 152, k Einzellösungen von der Form (7), die den Werten $i = 1, 2, \ldots, k$ entsprechen. Da diese Gln. (3), § 152, linear sind, erhalten wir, wenn wir diese Einzellösungen addieren, die neue Lösung

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \sum_{i=1}^{i=k} \Delta_{1k}(\lambda_i^2)\alpha_i \sin(\lambda_i t + \beta_i), \\ q_2 &= \sum_{i=1}^{i=k} \Delta_{2k}(\lambda_i^2)\alpha_i \sin(\lambda_i t + \beta_i), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_k &= \sum_{i=1}^{i=k} \Delta_{kk}(\lambda_i^2)\alpha_i \sin(\lambda_i t + \beta_i). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Da das System (3), § 152, von $2\,k$-ter Ordnung ist, so ist die Lösung (8), die $2\,k$ willkürliche Konstanten α_i, β_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ enthält, die allgemeinste Lösung dieses Systems. Hieraus folgt, daß *die allgemeinste Schwingungsbewegung unseres Systems die Resultierende der Überlagerung seiner k Hauptschwingungen ist.* Das ist das *Prinzip der Überlagerung* kleiner Schwingungen.

Die in der allgemeinen Lösung (8) enthaltenen willkürlichen Konstanten α_i und β_i werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt, d. h. aus den Anfangswerten der verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ und der verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k$. Wenn wir auf diese Art α_i und β_i bestimmen, erhalten wir im allgemeinen Fall eine zusammengesetzte Schwingungsbewegung, in der alle Hauptschwingungen des Systems enthalten sind. Es versteht sich von selbst, daß man immer über die Anfangsbedingungen so verfügen kann, daß man eine beliebige Hauptschwingung in reiner Form erhält. So z. B. muß man, um die erste Hauptschwingung des Systems hervorzurufen, folgende Anfangsbedingungen wählen: $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_k = 0$. Es ist offensichtlich, daß sich die Gln. (8) in diesem Fall in die Gleichungen verwandeln, die der ersten Hauptschwingung entsprechen.

Wir kehren nochmals zu den Wechselbeziehungen

$$\frac{\alpha_i^{(1)}}{\Delta_{1k}(\lambda_i^2)} = \frac{\alpha_i^{(2)}}{\Delta_{2k}(\lambda_i^2)} = \cdots = \frac{\alpha_i^{(k)}}{\Delta_{kk}(\lambda_i^2)} \tag{9}$$

zurück.

Durch diese Gleichungen werden die Beziehungen der Amplituden $\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \ldots, \alpha_i^{(k)}$, die der i-ten Hauptschwingung des Systems entsprechen, restlos bestimmt und damit auch die *Schwingungsform*, die der Frequenz λ_i entspricht.

Wir haben die Wechselbeziehungen (9) aus den Gln. (6) gewonnen, indem wir die k-te Gleichung dieses Systems abspalteten. Wir hätten aber die gleichen Beziehungen der Amplituden $\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \ldots, \alpha_i^{(k)}$ aus dem System (6) erhalten können, wenn wir in demselben eine beliebige andere, z. B. die j-te Gleichung abgespaltet hätten (wobei j eine der Zahlen 1, 2, ..., k ist). Auf diese Weise hätten wir

$$\frac{\alpha_i^{(1)}}{\Delta_{1j}(\lambda_i^2)} = \frac{\alpha_i^{(2)}}{\Delta_{2j}(\lambda_i^2)} = \cdots = \frac{\alpha_i^{(k)}}{\Delta_{kj}(\lambda_i^2)} \tag{10}$$

erhalten.

Dividieren wir die Gleichungen gliedweise durch die Gln. (9), so finden wir:

$$\frac{\Delta_{ij}(\lambda_i^2)}{\Delta_{ik}(\lambda_i^2)} = \frac{\Delta_{2j}(\lambda_i^2)}{\Delta_{2k}(\lambda_i^2)} = \cdots = \frac{\Delta_{kj}(\lambda_i^2)}{\Delta_{kk}(\lambda_i^2)}.$$

Wir werden im § 157 Gelegenheit haben, diese Wechselbeziehungen zwischen den Unterdeterminanten $\Delta_{sj}(\lambda_i^2)$ zu benutzen.

Wir hatten in diesem Paragraphen vorausgesetzt, daß alle Wurzeln der Frequenzgleichung voneinander verschieden sind. Der Fall gleicher Wurzeln bietet einige Besonderheiten, auf die wir hier nicht eingehen werden.

§ 154. Die Hauptkoordinaten

Wir führen in die Betrachtung die Größen

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1), \\ p_2 &= \alpha_2 \sin(\lambda_2 t + \beta_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_k &= \alpha_k \sin(\lambda_k t + \beta_k) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ein.

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gln. (8), § 153, ein, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \sum_{i=1}^{i=k} \Delta_{1k}(\lambda_i^2) p_i, \\ q_2 &= \sum_{i=1}^{i=k} \Delta_{2k}(\lambda_i^2) p_i, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_k &= \sum_{i=1}^{i=k} \Delta_{kk}(\lambda_i^2) p_i. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hieraus ersieht man, daß man die Größen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ als verallgemeinerte Koordinaten unseres Systems betrachten kann. Tatsächlich werden durch das Vorgeben der Größen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ nach Gl. (2) die Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ und folglich auch die Lage des Systems bestimmt.

Wir wollen die Größen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ als neue verallgemeinerte Koordinaten des Systems ansehen. In diesen neuen Koordinaten erhalten die Gleichungen der Eigenschwingungen des Systems eine besonders einfache Form, und zwar entstehen die Gln. (1).

Wir wollen sehen, wie die Gleichungen der Hauptschwingungen in unseren neuen Koordinaten lauten.

Wir wissen bereits, daß man für die erste Hauptschwingung solche Anfangsbedingungen wählen muß, daß $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ ist. Setzen wir diese Werte in die Gln. (1) ein, so sehen wir, daß die Gleichungen der ersten Hauptschwingung in den Koordinaten $p_1, p_2, \ldots, p_k$ folgende Form annehmen:

$$p_1 = \alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \beta_1), \qquad p_2 = 0, \qquad p_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad p_k = 0. \tag{3}$$

Ebenso erhalten wir, wenn wir $\alpha_2 \neq 0, \alpha_1 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_k = 0$ annehmen, was der zweiten Hauptschwingung entspricht:

$$p_2 = \alpha_2 \sin(\lambda_2 t + \beta_2), \qquad p_1 = 0, \qquad p_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad p_k = 0. \tag{4}$$

Die Gleichungen der i-ten Hauptschwingung erhalten die sehr einfache Form:

$$p_i = \alpha_i \sin(\lambda_i t + \beta_i), \quad p_1 = 0, \quad \ldots, \quad p_{i-1} = 0, \quad p_{i+1} = 0, \quad \ldots, \quad p_k = 0. \tag{5}$$

Somit verändert sich (und zwar harmonisch) nur eine Koordinate, wenn das System eine Hauptschwingung ausführt. Die übrigen Koordinaten bleiben gleich Null. Jede der Koordinaten $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ist mit einer bestimmten Hauptschwingung des Systems verbunden. Diese Koordinaten heißen *normale oder Hauptkoordinaten* des Systems.

Die Ausdrücke für die kinetische und die potentielle Energie vereinfachen sich in dem Falle sehr, wenn das System auf seine Hauptkoordinaten bezogen wird. Nehmen wir an, daß die kinetische und die potentielle Energie des Systems in den Koordinaten $p_1, p_2, \ldots, p_k$ durch die Gleichungen

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=k} \bar{a}_{ij} \dot{p}_i \dot{p}_j, \qquad V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=k} \bar{c}_{ij} p_i p_j \tag{6}$$

ausgedrückt werden, wobei $\bar{a}_{ij}$ und $\bar{c}_{ij}$ konstante Koeffizienten sind und $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ji}$ und $c_{ij} = \bar{c}_{ji}$ ist.

Wir stellen nun die Differentialgleichungen der Eigenschwingungen des Systems in den Koordinaten $p_1, p_2, \ldots, p_k$ nach der Regel von LAGRANGE auf:

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_{11} \ddot{p}_1 + \bar{a}_{12} \ddot{p}_2 + \cdots + \bar{a}_{1k} \ddot{p}_k + \bar{c}_{11} p_1 + \bar{c}_{12} p_2 + \cdots + \bar{c}_{1k} p_k = 0, \\
&\bar{a}_{21} \ddot{p}_1 + \bar{a}_{22} \ddot{p}_2 + \cdots + \bar{a}_{2k} \ddot{p}_k + \bar{c}_{21} p_1 + \bar{c}_{22} p_2 + \cdots + \bar{c}_{2k} p_k = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\bar{a}_{k1} \ddot{p}_1 + \bar{a}_{k2} \ddot{p}_2 + \cdots + a_{kk} \ddot{p}_k + \bar{c}_{k1} p_1 + \bar{c}_{k2} p_2 + \cdots + \bar{c}_{kk} p_k = 0.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun annehmen, daß das System seine erste Hauptschwingung ausführt. Setzen wir in die soeben aufgestellten Gleichungen die Ausdrücke (3) ein und betrachten die zweite Gleichung, so gilt:

$$-\bar{a}_{21}\lambda_1^2 = \bar{c}_{21} = 0.$$

Umgekehrt, setzen wir in dieselben Gleichungen die Ausdrücke (4) ein, die der zweiten Hauptschwingung entsprechen, und betrachten die erste Gleichung, so erhalten wir:

$$-\bar{a}_{12}\lambda_2^2 + \bar{c}_{12} = 0.$$

Hieraus finden wir, wenn wir berücksichtigen, daß $\bar{a}_{21} = \bar{a}_{12}$ und $\bar{c}_{21} = \bar{c}_{12}$ ist,

$$\bar{a}_{12}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) = 0.$$

Wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist (wie wir voraussetzen), müssen wir schließen, daß

$$\bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = 0$$

ist, und daraus folgt ferner:

$$\bar{c}_{12} = \bar{c}_{21} = 0.$$

Ebenso überzeugen wir uns, daß überhaupt

$$\bar{a}_{ij} = 0, \qquad c_{ij} = 0$$

gilt, wenn $i \neq j$ ist. Wir kommen zu der Schlußfolgerung, daß in den Ausdrücken (6) alle Glieder außer denjenigen verschwinden, welche die Quadrate der verallgemeinerten Geschwindigkeiten und verallgemeinerten Koordinaten enthalten; die Ausdrücke der kinetischen und potentiellen Energie in Hauptkoordinaten nehmen die Form

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left(\bar{a}_{11}\dot{p}_1^2 + \bar{a}_{22}\dot{p}_2^2 + \cdots + \bar{a}_{kk}\dot{p}_k^2\right), \\ V &= \frac{1}{2}\left(\bar{c}_{11}p_1^2 + \bar{c}_{22}p_2^2 + \cdots + \bar{c}_{kk}p_k^2\right) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

an.

Gleichzeitig vereinfachen sich die Differentialgleichungen der freien Schwingungen des Systems bedeutend und nehmen in Hauptkoordinaten die Form

$$\left.\begin{aligned} &\bar{a}_{11}\ddot{p}_1 + \bar{c}_{11}p_1 = 0, \\ &\bar{a}_{22}\ddot{p}_2 + \bar{c}_{22}p_2 = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\bar{a}_{kk}\ddot{p}_k + \bar{c}_{kk}p_k = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

an.

Integrieren wir diese Gleichungen und setzen

$$\lambda_1^2 = \frac{\bar{c}_{11}}{\bar{a}_{11}}, \qquad \lambda_2^2 = \frac{\bar{c}_{22}}{\bar{a}_{22}}, \qquad \ldots, \qquad \lambda_k^2 = \frac{\bar{c}_{kk}}{\bar{a}_{kk}} \tag{9}$$

ein, so kehren wir zu den Gln. (1) zurück.

Wie man sieht, vereinfacht die Anwendung der Hauptkoordinaten die ganze Theorie der freien Schwingungen eines Systems außerordentlich. An Stelle eines Systems von gekoppelten Differentialgleichungen, durch welche die Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ bestimmt wurden, haben wir hier k voneinander unabhängige Gln. (8). Zugleich entfällt für uns die Notwendigkeit, die Wurzeln der Frequenzgleichung zu ermitteln; die Eigenfrequenzen des Systems werden unmittelbar aus den Gln. (9) bestimmt.

Man muß jedoch bemerken, daß wir beim Einführen der Hauptkoordinaten durch die Gln. (2) voraussetzten, daß die Aufgabe der Eigenschwingungen des Systems in den Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ bereits gelöst war. Man könnte die Hauptkoordinaten auch unmittelbar ohne eine solche Voraussetzung einführen. Aber die unmittelbare Ermittlung der Hauptkoordinaten des Systems (oder, was dasselbe ist, die Reduktion der kinetischen und der potentiellen Energie des Systems auf die Form (7)) erweist sich als Aufgabe von gleicher Kompliziertheit wie die Ermittlung der Eigenschwingungen in unseren ursprünglichen Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Dieser Umstand mindert ihren praktischen Wert herab, ohne die theoretische Bedeutung der Hauptkoordinaten zu verringern; in praktischer Beziehung ergeben sich durch die Anwendung dieser Koordinaten bei der Ermittlung der Eigenschwingungen keine besonderen Vorzüge.

§ 155. Die Gleichungen der Eigenschwingungen in kartesischen Koordinaten. Die Eigenschaften der Hauptschwingungen

Um eine klare Vorstellung von der von uns untersuchten Bewegung des Systems zu erhalten, wollen wir uns jetzt der Betrachtung der Bewegung jedes einzelnen materiellen Punktes M_s zuwenden, der zu unserem System gehört.

Wir wählen das kartesische Koordinatensystem x, y, z und bezeichnen die kartesischen Koordinaten des Punktes M_s mit x_s, y_s, z_s; die Koordinaten der Gleichgewichtslage des Punktes M_s bezeichnen wir mit x_s^0, y_s^0, z_s^0. Führen wir in die Betrachtung die Verrückung des Punktes M_s aus seiner Gleichgewichtslage ein und bezeichnen die Komponenten dieser Verrückung auf den Achsen x, y, z mit u_s, v_s, w_s, so gilt:

$$u_s = x_s - x_s^0, \qquad v_s = y_s - y_s^0, \qquad w_s = z_s - z_s^0.$$

Andererseits wissen wir, daß die Koordinaten x_s, y_s, z_s als Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ ausgedrückt werden können:

$$x_s = x_s(q_1, q_2, \ldots, q_k),$$
$$y_s = y_s(q_1, q_2, \ldots, q_k),$$
$$z_s = z_s(q_1, q_2, \ldots, q_k).$$

Entwickeln wir diese Funktionen nach Potenzen der kleinen Größen $q_1, q_2, \ldots, q_k$ und beachten, daß die konstanten Glieder in diesen Entwicklungen nichts anderes sind als die Werte der Koordinaten x_s, y_s, z_s an der Stelle $q_1 = q_2 = \ldots = q_k = 0$, d. h. in der Gleichgewichtslage des Systems, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_s &= x_s^0 + L_1^{(s)} q_1 + L_2^{(s)} q_2 + \cdots + L_k^{(s)} q_k + \cdots, \\ y_s &= y_s^0 + M_1^{(s)} q_1 + M_2^{(s)} q_2 + \cdots + M_k^{(s)} q_k + \cdots, \\ z_s &= z_s^0 + N_1^{(s)} q_1 + N_2^{(s)} q_2 + \cdots + N_k^{(s)} q_k + \cdots, \end{aligned}$$

wobei $L_1^{(s)}$, $L_2^{(s)}$ usw. vorgegebene konstante Größen sind.

Hieraus finden wir, wenn wir die kleinen Größen zweiter und höherer Ordnung vernachlässigen:

$$\left.\begin{aligned} u_s &= L_1^{(s)} q_1 + L_2^{(s)} q_2 + \cdots + L_k^{(s)} q_k, \\ v_s &= M_1^{(s)} q_1 + M_2^{(s)} q_2 + \cdots + M_k^{(s)} q_k, \\ w_s &= N_1^{(s)} q_1 + N_2^{(s)} q_2 + \cdots + N_k^{(s)} q_k. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Um die Bewegungsgleichungen des Punktes M_s in kartesischen Koordinaten zu erhalten, muß man in diesen Gleichungen anstatt der verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_k$ deren Ausdrücke als Zeitfunktionen einsetzen.

Jetzt nehmen wir an, daß unser System die i-te Hauptschwingung ausführt. Substituieren wir in den soeben erhaltenen Gleichungen anstatt $q_1, q_2, \ldots, q_k$ deren Ausdrücke (7), § 153, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} u_s &= [L_1^{(s)} \Delta_{1k}(\lambda_i^2) + L_2^{(s)} \Delta_{2k}(\lambda_i^2) + \cdots + L_k^{(s)} \Delta_{kk}(\lambda_i^2)]\, \alpha_i \sin(\lambda_i t + \beta_i), \\ v_s &= [M_1^{(s)} \Delta_{1k}(\lambda_i^2) + M_2^{(s)} \Delta_{2k}(\lambda_i^2) + \cdots + M_s^{(k)} \Delta_{kk}(\lambda_i^2)]\, \alpha_i \sin(\lambda_i t + \beta_i), \\ w_s &= [N_1^{(s)} \Delta_{1k}(\lambda_i^2) + N_2^{(s)} \Delta_{2k}(\lambda_i^2) + \cdots + N_k^{(s)} \Delta_{kk}(\lambda_i^2)]\, \alpha_i \sin(\lambda_i t + \beta_i). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dies sind die Gleichungen der *i-ten Hauptschwingung in kartesischen Koordinaten.* Nehmen wir hier $s = 1, 2, \ldots, n$ an, so haben wir die Bewegungsgleichungen aller Punkte unseres Systems.

Die allgemeinste Schwingungsbewegung unseres Systems ist das Resultat der Überlagerung seiner Hauptschwingungen. Hieraus folgt, daß im allgemeinsten Fall die Verrückungen u_s, v_s, w_s das Resultat der Summierung der Ausdrücke (2) sind, die allen Hauptschwingungen des Systems entsprechen:

$$\left.\begin{aligned} u_s &= \sum_{i=1}^{i=k} [L_1^{(s)} \Delta_{1k}(\lambda_i^2) + L_2^{(s)} \Delta_{2k}(\lambda_i^2) + \cdots + L_k^{(s)} \Delta_{kk}(\lambda_i^2)]\, \alpha_i \sin(\lambda_i t + \beta_i), \\ v_s &= \sum_{i=1}^{i=k} [M_1^{(s)} \Delta_{1k}(\lambda_i^2) + M_2^{(s)} \Delta_{2k}(\lambda_i^2) + \cdots + M_k^{(s)} \Delta_{kk}(\lambda_i^2)]\, \alpha_i \sin(\lambda_i t + \beta_i), \\ w_s &= \sum_{i=1}^{i=k} [N_1^{(s)} \Delta_{1k}(\lambda_i^2) + N_2^{(s)} \Delta_{2k}(\lambda_i^2) + \cdots + N_k^{(s)} \Delta_{kk}(\lambda_i^2)]\, \alpha_i \sin(\lambda_i t + \beta_i). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Dies sind die Gleichungen der allgemeinsten Schwingungsbewegung eines Systems in kartesischen Koordinaten.

Durch Analysieren der Gln. (2), die sich auf eine der Hauptschwingungen des Systems beziehen, könnten wir erneut zu den Eigenschaften der Hauptschwingungen gelangen, die wir schon für den Fall eines Systems mit zwei Freiheitsgraden im § 147 aufgestellt haben. Wir wollen diese Analyse nicht wiederholen, sondern unterstreichen nochmals die Grundeigenschaften der Hauptschwingungen:

1. *Die Hauptschwingungen sind harmonische Schwingungen.*

2. *Bei einer Hauptschwingung bewegt sich jeder Systempunkt auf einer Geraden, die durch seine Gleichgewichtslage geht.*

3. Die Eigenfrequenzen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *hängen nicht von den Anfangsbedingungen ab.* Dasselbe kann man von den Schwingungsdauern der Hauptschwingungen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ sagen, wobei

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}, \qquad \tau_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}, \qquad \ldots, \qquad \tau_k = \frac{2\pi}{\lambda_k}$$

ist.

4. *Von den Anfangsbedingungen hängen die Schwingungsamplituden der Systempunkte und auch die Anfangsphase der Schwingung ab; die Beziehungen zwischen den Amplituden der verschiedenen Systempunkte aber hängen nicht von den Anfangsbedingungen ab.*

5. *Alle Punkte eines Systems, das eine Hauptschwingung ausführt, befinden sich stets in einer Phase.*

§ 156. Die erzwungenen Schwingungen

Wir gehen nun zur Betrachtung der erzwungenen Schwingungen unseres Systems über. Wir setzen voraus, daß an den Systempunkten außer den Kräften $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, die ein Potential besitzen, auch noch die Erregerkräfte $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ angreifen, die sich im Laufe der Zeit nach einem im voraus gegebenen Gesetz verändern.

Die Differentialgleichungen der Bewegung unseres Systems haben die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \Phi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{1}$$

wobei Φ_i die verallgemeinerten Erregerkräfte sind. Berechnen wir diese Größen.

Es gilt

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{j=n}\left(S_{jx}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} + S_{jy}\frac{\partial y_j}{\partial q_i} + S_{jz}\frac{\partial z_j}{\partial q_i}\right),$$

wobei S_{jx}, S_{jy}, S_{jz} die Komponenten der Kraft $\mathfrak{S}_j$ auf den Achsen der kartesischen Koordinaten sind; x_j, y_j, z_j sind die kartesischen Koordinaten des Angriffspunktes dieser Kraft.

Wir bemerken, daß die Ableitungen der Koordinaten x_j, y_j, z_j gleich den Ableitungen der entsprechenden Verrückungen u_j, v_j und w_j sind; denken wir an die Gln. (1), so finden wir:

$$\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{\partial u_j}{\partial q_i} = L_i^{(j)}, \qquad \frac{\partial y_j}{\partial q_i} = \frac{\partial v_j}{\partial q_i} = M_i^{(j)}, \qquad \frac{\partial z_j}{\partial q_i} = \frac{\partial w_j}{\partial q_i} = N_i^{(j)}.$$

Folglich gilt:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{j=n} \left(L_i^{(j)} S_{jx} + M_i^{(j)} S_{jy} + N_i^{(j)} S_{jz}\right).$$

Wir werden uns im weiteren auf die Betrachtung der periodischen Erregerkräfte beschränken und voraussetzen, daß S_{jx}, S_{jy}, S_{jz} gegebene periodische Funktionen der Zeit mit der allgemeinen Schwingungsdauer T sind. In einem solchen Falle sind, wie aus der soeben aufgestellten Gleichung hervorgeht, auch die verallgemeinerten Erregerkräfte Φ_i gegebene Zeitfunktionen mit der gleichen Schwingungsdauer.

Zerlegen wir die verallgemeinerten Kräfte Φ_i in harmonische Komponenten und bezeichnen

$$p = \frac{2\pi}{T},$$

so erhalten wir:

$$\Phi_i = A_0^{(i)} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(A_n^{(i)} \cos npt + B_n^{(i)} \sin npt\right),$$

wobei $A_o^{(i)}$, $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$ konstante Größen sind.

Die Substitutionen dieser Ausdrücke und ebenso der im § 152 ermittelten Ausdrücke der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie V in den Gln. (1) führt zu den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + \cdots + a_{1k}\ddot{q}_k + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + \cdots + c_{1k}q_k \\
&\qquad = A_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(A_n^{(1)} \cos npt + B_n^{(1)} \sin npt\right), \\
&a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + \cdots + a_{2k}\ddot{q}_k + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + \cdots + c_{2k}q_k \\
&\qquad = A_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(A_n^{(2)} \cos npt + B_n^{(2)} \sin npt\right), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{k1}\ddot{q}_1 + a_{k2}\ddot{q}_2 + \cdots + a_{kk}\ddot{q}_k + c_{k1}q_1 + c_{k2}q_2 + \cdots + c_{kk}q_k \\
&\qquad = A_0^{(k)} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(A_n^{(k)} \cos npt + B_n^{(k)} \sin npt\right).
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Dies sind die Differentialgleichungen der erzwungenen Schwingungen unseres Systems.

Wir haben ein System von inhomogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten erhalten. Die allgemeine Lösung dieses Systems setzt sich aus irgendeiner seiner Partikulärlösungen und der allgemeinen Lösung des entsprechenden Systems von homogenen Gleichungen zusammen. Die allgemeine Lösung des Systems von homogenen Gleichungen ist uns bereits bekannt; sie entspricht den Eigenschwingungen des gegebenen Systems. Es muß nun noch irgendeine Partikulärlösung des Systems (2) gefunden werden.

Wir werden diese Partikulärlösung in der Form

$$
\left.\begin{aligned}
q_1 &= a_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(a_n^{(1)} \cos n p t + b_n^{(1)} \sin n p t\right), \\
q_2 &= a_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(a_n^{(2)} \cos n p t + b_n^{(2)} \sin n p t\right), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
q_k &= a_0^{(k)} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(a_n^{(k)} \cos n p t + b_n^{(k)} \sin n p t\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3}
$$

ansetzen, wobei $a_0^{(1)}$, $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$ usw. unbestimmte Koeffizienten sind, die bestimmt werden müssen. Setzen wir diese Ausdrücke für $q_1, q_2, \ldots, q_k$ in die Gln. (2) ein und setzen die Koeffizienten von $\cos npt$ und von $\sin npt$ und ebenfalls die freien Glieder der linken und rechten Seiten dieser Gleichungen einander gleich, dann erhalten wir:

$$
\left.\begin{aligned}
c_{11} a_0^{(1)} + c_{12} a_0^{(2)} + \cdots + c_{1k} a_0^{(k)} &= A_0^{(1)}, \\
c_{21} a_0^{(1)} + c_{22} a_0^{(2)} + \cdots + c_{2k} a_0^{(k)} &= A_0^{(2)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_{k1} a_0^{(1)} + c_{k2} a_0^{(2)} + \cdots + c_{kk} a_0^{(k)} &= A_0^{(k)},
\end{aligned}\right\} \tag{4}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
(c_{11} - n^2 p^2 a_{11}) a_n^{(1)} + (c_{12} - n^2 p^2 a_{12}) a_n^{(2)} + \cdots + (c_{1k} - n^2 p^2 a_{1k}) a_n^{(k)} &= A_n^{(1)}, \\
(c_{21} - n^2 p^2 a_{21}) a_n^{(1)} + (c_{22} - n^2 p^2 a_{22}) a_n^{(2)} + \cdots + (c_{2k} - n^2 p^2 a_{2k}) a_n^{(k)} &= A_n^{(2)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(c_{k1} - n^2 p^2 a_{k1}) a_n^{(1)} + (c_{k2} - n^2 p^2 a_{k2}) a_n^{(2)} + \cdots + (c_{kk} - n^2 p^2 a_{kk}) a_n^{(k)} &= A_n^{(k)},
\end{aligned}\right\} \tag{5}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
(c_{11} - n^2 p^2 a_{11}) b_n^{(1)} + (c_{12} - n^2 p^2 a_{12}) b_n^{(2)} + \cdots + (c_{1k} - n^2 p^2 a_{1k}) b_n^{(k)} &= B_n^{(1)}, \\
(c_{21} - n^2 p^2 a_{21}) b_n^{(1)} + (c_{22} - n^2 p^2 a_{22}) b_n^{(2)} + \cdots + (c_{2k} - n^2 p^2 a_{2k}) b_n^{(k)} &= B_n^{(2)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(c_{k1} - n^2 p^2 a_{k1}) b_n^{(1)} + (c_{k2} - n^2 p^2 a_{k2}) b_n^{(2)} + \cdots + (c_{kk} - n^2 p^2 a_{kk}) b_n^{(k)} &= B_n^{(k)}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}
$$

Diese Gleichungen dienen zur Bestimmung der Unbekannten $a_0^{(1)}$, $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$ usw. Erinnern wir uns an die Koeffizientendeterminante des Ausdruckes $\Delta(\lambda^2)$ im § 153, so ist leicht ersichtlich, daß die des Systems (4) gleich Δ (0) ist, die der Systeme (5) und (6) aber gleich Δ $(n^2\, p^2)$ sind. Lösen wir diese Gleichungen und bezeich-

nen (wie im § 153) mit Δ_{ij} die durch Ausstreichen der i-ten Spalte und der j-ten Zeile erhaltene Unterdeterminante, multipliziert mit $(-1)^{i+j}$, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
a_0^{(1)} &= \frac{\sum\limits_{j=1}^{j=k} A_0^{(j)} \Delta_{1j}(0)}{\Delta(0)}, \\
a_0^{(2)} &= \frac{\sum\limits_{j=1}^{j=k} A_0^{(j)} \Delta_{2j}(0)}{\Delta(0)}, \quad \ldots, \quad a_0^{(k)} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{j=k} A_0^{(j)} \Delta_{kj}(0)}{\Delta(0)}; \\
a_n^{(1)} &= \frac{\sum\limits_{j=1}^{j=k} A_n^{(j)} \Delta_{1j}(n^2 p^2)}{\Delta(n^2 p^2)}, \\
a_n^{(2)} &= \frac{\sum\limits_{j=1}^{j=k} A_n^{(j)} \Delta_{2j}(n^2 p^2)}{\Delta(n^2 p^2)}, \quad \ldots, \quad a_n^{(k)} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{j=k} A_n^{(j)} \Delta_{kj}(n^2 p^2)}{\Delta(n^2 p^2)}, \\
b_n^{(1)} &= \frac{\sum\limits_{j=1}^{j=k} B_n^{(j)} \Delta_{1j}(n^2 p^2)}{\Delta(n^2 p^2)}, \\
b_n^{(2)} &= \frac{\sum\limits_{j=1}^{j=k} B_n^{(j)} \Delta_{2j}(n^2 p^2)}{\Delta(n^2 p^2)}, \quad \ldots, \quad b_n^{(k)} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{j=k} B_n^{(j)} \Delta_{kj}(n^2 p^2)}{\Delta(n^2 p^2)}.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Wenn wir diese Ausdrücke in die Gln. (3) einsetzen, erhalten wir die gesuchte Partikulärlösung der Gl. (2); fügen wir zu dieser Partikulärlösung die allgemeine Lösung (8), § 153, des Systems homogener Gln. (3), § 152, hinzu, so erhalten wir die allgemeine Lösung unserer Gln. (2). Die Gln. (8), § 153, entsprechen den Eigenschwingungen des Systems; die den Gln. (3) entsprechende Bewegung nennen wir erzwungene Schwingungen. Die von uns dargestellte Bewegung des Systems setzt sich aus seinen Eigenschwingungen und den erzwungenen Schwingungen zusammen.

Wie wir aus den Gln. (3) und (7) ersehen können, entspricht jeder harmonischen Komponente der Erregerkräfte eine entsprechende harmonische Schwingung des Systems; die konstanten Glieder A_0^j in der Entwicklung der Erregerkräfte rufen dagegen nur eine konstante (statische) Verrückung des Systems aus seiner Gleichgewichtslage hervor.

§ 157. Die Resonanzen verschiedener Ordnungen. Die Resonanzschwingungen

Wir wollen nun jene harmonische Schwingung des Systems näher untersuchen, die der n-ten harmonischen Komponente der Erregerkräfte entspricht. Diese Schwingung wird durch die Gleichungen

$$q_1 = a_n^{(1)} \cos npt + b_n^{(1)} \sin npt,$$
$$q_2 = a_n^{(2)} \cos npt + b_n^{(2)} \sin npt,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$q_k = a_n^{(k)} \cos npt + b_n^{(k)} \sin npt$$

dargestellt, wobei die Größen $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$ usw. durch die Gln. (7), § 156, gegeben sind.

Unter Berücksichtigung, daß die Eigenfrequenzen des Systems $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ die Wurzeln der Gleichungen

$$\Delta(\lambda^2) = 0$$

sind, ist leicht zu sehen, daß in den Ausdrücken der Größen $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$ usw. der Hauptnenner $\Delta(n^2 p^2) = \Delta(\lambda_i^2)$ Null wird und diese Größen unendlich große Werte erhalten, wenn die Frequenz np der von uns betrachteten harmonischen Komponente mit einer der Eigenfrequenzen des Systems, z. B. mit der i-ten Eigenfrequenz λ_i, zusammenfällt. Wir haben es hier mit einer *Resonanz*erscheinung zu tun. Also tritt die Resonanz in dem Falle ein, in dem

$$np = \lambda_i$$

ist, d. h., *wenn die Frequenz einer der harmonischen Komponenten der Erregerkräfte mit einer der Eigenfrequenzen des Systems zusammenfällt.* Alle Werte der Grundfrequenz p der Erregerkräfte, die in

$$p = \frac{\lambda_i}{n}$$

enthalten sind, heißen *kritische Frequenzen.*

Wie man sieht, kann jede harmonische Komponente der Erregerkräfte im System eine Resonanz hervorrufen, und zwar nicht nur eine, sondern k verschiedene Fälle der Resonanz. Alle Resonanzen, die durch die n-te harmonische Komponente der Erregerkräfte hervorgerufen werden, heißen *Resonanzen* der n-ten *Ordnung.*

Also tritt das System mit k Freiheitsgraden in die Resonanz erster Ordnung bei

$$p = \lambda_1, \qquad p = \lambda_2, \quad \dots, \qquad p = \lambda_k;$$

es hat Resonanzen zweiter Ordnung bei

$$q = \frac{\lambda_1}{2}, \qquad p = \frac{\lambda_2}{2}, \quad \dots, \qquad p = \frac{\lambda_k}{2}$$

usw.

Aus den Gln. (7), § 156, ersieht man, daß im Falle einer Resonanz die Amplituden der erzwungenen Schwingungen unendlich groß werden. Natürlich liegt dieses Resultat daran, daß wir bei der Untersuchung der erzwungenen Schwingungen keinerlei Bewegungswiderstände in Betracht gezogen haben. Hätten wir diese Widerstände berücksichtigt und sie als proportional den ersten Graden der Geschwindigkeiten angenommen, so hätten wir gefunden (wie das ausführlich im § 142 für den Fall eines Systems mit einem Freiheitsgrad beschrieben ist), daß die Amplituden der *Resonanzschwingungen* (so heißen erzwungene Schwingungen, deren Frequenz mit einer der Eigenfrequenzen des Systems zusammenfallen) endlich bleiben; und zwar sind die Amplituden der Resonanzschwingungen um so größer, je kleiner die Bewegungswiderstände sind. Wir müssen schließen, daß die Berechnungen der erzwungenen Schwingungen nach den Gln. (3) und (7), § 156, nur unter der Bedingung einer hinreichenden Entfernung von der Resonanzstelle zulässig sind.

Wir befassen uns hier nicht mit der Theorie der Resonanzschwingungen unter Berücksichtigung der Bewegungswiderstände, sondern wollen nur eine Eigenschaft der Resonanzschwingungen feststellen, die man auch aus den Gln. (7), § 156, ersehen kann.

Aus diesen Gleichungen folgt, daß die *Amplitudenverhältnisse* ihre endlichen (und bestimmten) Werte behalten, obgleich die Amplituden der erzwungenen Schwingungen beim Durchgang durch die Resonanz unendlich große Werte annehmen. Durch die Amplitudenverhältnisse werden aber, wie wir wissen, die *Schwingungsformen* des Systems bestimmt.

Nach den Gln. (7), § 156, gilt

$$\frac{a_n^{(1)}}{\sum\limits_{j=1}^{j=k} A_n^{(j)} \Delta_{1j}(n^2 p^2)} = \frac{a_n^{(2)}}{\sum\limits_{j=1}^{j=k} A_n^{(j)} \Delta_{2j}(n^2 p^2)} = \cdots = \frac{a_n^{(k)}}{\sum\limits_{j=1}^{j=k} A_n^{(j)} \Delta_{kj}(n^2 p^2)}.$$

Nehmen wir an, daß die Frequenz np mit einer der Eigenfrequenzen des Systems zusammenfällt, z. B.

$$n p = \lambda_i,$$

so erhalten wir für die Resonanzschwingungen

$$\frac{a_n^{(1)}}{\sum\limits_{j=1}^{j=k} A_n^{(j)} \Delta_{1j}(\lambda_i^2)} = \frac{a_n^{(2)}}{\sum\limits_{j=1}^{j=k} A_n^{(j)} \Delta_{2j}(\lambda_i^2)} = \cdots = \frac{a_n^{(k)}}{\sum\limits_{j=1}^{j=k} A_n^{(j)} \Delta_{kj}(\lambda_i^2)}. \tag{1}$$

Am Ende des § 153 haben wir die Wechselbeziehungen

$$\frac{\Delta_{1j}(\lambda_i^2)}{\Delta_{1k}(\lambda_i^2)} = \frac{\Delta_{2j}(\lambda_i^2)}{\Delta_{2k}(\lambda_i^2)} = \cdots = \frac{\Delta_{kj}(\lambda_i^2)}{\Delta_{kk}(\lambda_i^2)}$$

aufgestellt.

Wir bezeichnen die in diesen Gleichungen enthaltenen Quotienten allgemein mit e_j. Nehmen wir in den Gln. (1)

$$\Delta_{1j}(\lambda_i^2) = e_j \Delta_{1k}(\lambda_i^2), \qquad \Delta_{2j}(\lambda_i^2) = e_j \Delta_{2k}(\lambda_i^2), \qquad \Delta_{kj}(\lambda_i^2) = e_j \Delta_{kk}(\lambda_i^2)$$

an und dividieren durch den gemeinsamen Divisor

$$\sum_{j=1}^{j=k} A_n^{(j)} e_j,$$

so gilt

$$\frac{a_n^{(1)}}{\Delta_{1k}(\lambda_i^2)} = \frac{a_n^{(2)}}{\Delta_{2k}(\lambda_i^2)} = \cdots = \frac{a_n^{(k)}}{\Delta_{kk}(\lambda_i^2)}.$$

Ganz entsprechend erhalten wir:

$$\frac{b_n^{(1)}}{\Delta_{1k}(\lambda_i^2)} = \frac{b_n^{(2)}}{\Delta_{2k}(\lambda_i^2)} = \cdots = \frac{b_n^{(k)}}{\Delta_{kk}(\lambda_i^2)}.$$

Wir haben aber im § 153 gesehen, daß die Amplituden $\alpha\binom{1}{i}$, $\alpha\binom{2}{i}$, ..., $\alpha\binom{n}{i}$, die der i-ten Hauptschwingung entsprechen, die gleichen Wechselbeziehungen

$$\frac{\alpha_i^{(1)}}{\Delta_{1k}(\lambda_i^2)} = \frac{\alpha_i^{(2)}}{\Delta_{2k}(\lambda_i^2)} = \cdots = \frac{\alpha_i^{(k)}}{\Delta_{kk}(\lambda_i^2)}$$

befriedigen.

Hieraus müssen wir die Schlußfolgerung ziehen, daß die Amplitudenverhältnisse der Resonanzschwingungen bei $np = \lambda_i$ gleich den Verhältnissen der entsprechenden Amplituden der i-ten Hauptschwingung sind, oder mit anderen Worten: *Die Form der Resonanzschwingung ist mit der Form jener Hauptschwingung des Systems identisch, die der Frequenz λ_i entspricht.*

§ 158. Die Torsionsschwingungen von Wellen

Als Beispiel für Schwingungen eines Systems mit mehreren Freiheitsgraden wollen wir eine Aufgabe über Torsionsschwingungen einer Welle betrachten. Diese Aufgabe hat eine große praktische Bedeutung bei den Kurbelwellen von Kolbenmotoren. In diesem Paragraphen beginnen wir mit der Betrachtung eines vereinfachten Schemas.

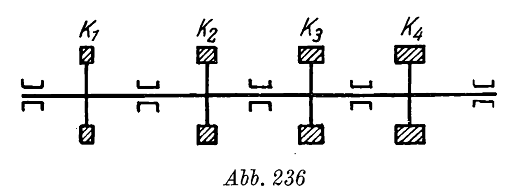


Abb. 236

Wir stellen uns eine Welle von konstantem Querschnitt vor, auf der die Scheiben K_1, K_2, K_3 und K_4 aufgekeilt sind (Abb. 236). Wir wollen annehmen, daß der Welle ein gewisser Drehimpuls erteilt wird und sie sich daraufhin selbst überlassen ist. Unter der Wirkung der bei der Torsion entstehenden elastischen Kräfte beginnt das System zu schwingen, wobei die auf die Welle aufgesetzten Scheiben Drehschwingungen um die Wellenachse ausführen; solche Schwingungen heißen *Torsionsschwingungen* der Welle. Es sollen die Eigenfrequenzen bestimmt und die Formen der Hauptschwingungen dieses Systems ermittelt werden.

Wir werden die Masse der Welle im Vergleich zu den Massen der Scheiben vernachlässigen. In diesem Falle wird die momentane Lage des ganzen Systems durch die Vorgabe von vier Parametern bestimmt, und zwar durch die Drehwinkel jeder der Scheiben K_1, K_2, K_3 und K_4; wir schließen daraus, daß unser System vier Freiheitsgrade besitzt. Die Drehwinkel der Scheiben bezeichnen wir mit φ_1, φ_2, φ_3, φ_4.

Um die Eigenfrequenzen des Systems zu ermitteln, beginnen wir mit der Aufstellung der Differentialgleichungen der Eigenschwingungen unseres Systems. Wir erhalten diese Gleichungen leicht, wenn wir für jede Scheibe die bekannte Differentialgleichung der Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse aufstellen.

Wir wollen vereinbaren, die Drehwinkel φ_1, φ_2, φ_3 und φ_4 von der Gleichgewichtslage unseres Systems aus so zu zählen, daß den Werten $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ irgendein ungedrillter Zustand der Welle entspricht. In diesem Falle werden die Verdrehungen der Wellenabschnitte zwischen den Scheiben K_1 und K_2, K_2 und K_3, K_3 und K_4 gleich den Differenzen $\varphi_2 - \varphi_1$, $\varphi_3 - \varphi_2$, $\varphi_4 - \varphi_3$ sein. Wenn wir die Längen dieser Wellenabschnitte mit l_1, l_2 und l_3 und die Größe der Verdrehung dieser Abschnitte, bezogen auf die Längeneinheit, mit ϑ_1, ϑ_2 und ϑ_3 bezeichnen, gilt

$$\vartheta_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l_1}, \qquad \vartheta_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{l_2}, \qquad \vartheta_3 = \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{l_3}.$$

Diesen Verdrehungen entsprechen die Drehmomente:

$$M_1 = G J_p \vartheta_1, \qquad M_2 = G J_p \vartheta_2, \qquad M_3 = G J_p \vartheta_3$$

oder

$$M_1 = \frac{G J_p}{l_1}(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad M_2 = \frac{G J_p}{l_2}(\varphi_3 - \varphi_2), \qquad M_3 = \frac{G J_p}{l_3}(\varphi_4 - \varphi_3),$$

wobei G der Schubmodul und J_p das polare Trägheitsmoment des Wellenquerschnittes ist.

Die Wellenabschnitte zwischen den einzelnen Scheiben befinden sich unter der Wirkung dieser Momente. Da die Wirkung gleich der Gegenwirkung ist, haben auch die Momente der elastischen Kräfte der beiden an die Scheibe angrenzenden Wellenabschnitte die gleichen Werte.

Folglich erhalten wir, wenn wir für jede Scheibe die Differentialgleichung der Drehung um eine feste Achse aufstellen und die Trägheitsmomente der Scheiben in bezug auf die Wellenachse mit J_1, J_2, J_3 und J_4 bezeichnen:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 &= M_1, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 &= M_2 - M_1, \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 &= M_3 - M_2, \\ J_4 \ddot{\varphi}_4 &= -M_3. \end{aligned}$$

Substituieren wir hier die Ausdrücke für die Momente M_1, M_2, M_3 und bezeichnen wir der Kürze halber

$$c_1 = \frac{G J_p}{l_1}, \qquad c_2 = \frac{G J_p}{l_2}, \qquad c_3 = \frac{G J_p}{l_3}, \tag{1}$$

so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 &= c_1(\varphi_2 - \varphi_1), \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 &= c_2(\varphi_3 - \varphi_2) - c_1(\varphi_2 - \varphi_1), \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 &= c_3(\varphi_4 - \varphi_3) - c_2(\varphi_3 - \varphi_2), \\ J_4 \ddot{\varphi}_4 &= - c_3(\varphi_4 - \varphi_3). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dies sind die Differentialgleichungen der Torsionsschwingungen unserer Welle. Wir wenden uns der Ermittlung der Hauptschwingungen zu und setzen

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha^{(1)} \sin(\lambda t + \beta), \\ \varphi_2 &= \alpha^{(2)} \sin(\lambda t + \beta), \\ \varphi_3 &= \alpha^{(3)} \sin(\lambda t + \beta), \\ \varphi_4 &= \alpha^{(4)} \sin(\lambda t + \beta). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gln. (2) ein und dividieren durch $\sin(\lambda t + \beta)$, so erhalten wir zur Bestimmung der Konstanten λ, $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$, $\alpha^{(4)}$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} -\lambda^2 J_1 \alpha^{(1)} &= c_1(\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)}), \\ -\lambda^2 J_2 \alpha^{(2)} &= c_2(\alpha^{(3)} - \alpha^{(2)}) - c_1(\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)}), \\ -\lambda^2 J_3 \alpha^{(3)} &= c_3(\alpha^{(4)} - \alpha^{(3)}) - c_2(\alpha^{(3)} - \alpha^{(2)}), \\ -\lambda^2 J_4 \alpha^{(4)} &= - c_3(\alpha^{(4)} - \alpha^{(3)}). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dies sind die in bezug auf die Amplituden $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ und $\alpha^{(4)}$ linearen und homogenen Gleichungen. Damit diese Gln. (4) in bezug auf die Größen $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$ und $\alpha^{(4)}$ eine von Null verschiedene Lösung haben, ist es notwendig, daß die Koeffizientendeterminante dieses Systems gleich Null ist. Stellen wir diese auf und setzen sie gleich Null, so erhalten wir eine Gleichung vierten Grades für λ^2. Dies ist die Frequenzgleichung, welche die Eigenfrequenzen unseres Systems bestimmt.

Es ist leicht zu sehen, daß eine der Wurzeln der Frequenzgleichung $\lambda^2 = 0$ sein muß. Man kann tatsächlich unmittelbar sehen, daß die Gln. (4) bei $\lambda^2 = 0$ in bezug auf $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$, $\alpha^{(4)}$ eine Lösung zulassen, die verschieden von Null ist, und zwar

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \alpha^{(3)} = \alpha^{(4)}.$$

Andererseits kann man durch unmittelbare Substitution in den Gln. (2) leicht nachprüfen, daß diese Gleichungen die Partikulärlösung

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \omega t + \varphi_0$$

zulassen, wobei ω und φ_0 willkürliche Konstanten sind. Dies ist die Partikulärlösung, die der Wurzel $\lambda^2 = 0$ entspricht; wie man sieht, entspricht dieser Wurzel die gleichförmige Rotation unserer Welle ohne Deformation. Den drei übrigen Wurzeln der Frequenzgleichung, die nicht gleich Null sind, entsprechen drei Hauptschwingungen, die der gleichförmigen Rotation der Welle überlagert werden.

Die weitere Berechnung der drei Eigenfrequenzen unseres Systems werden wir an einem Zahlenbeispiel durchführen.

Darin seien:

$$J_1 = J_2 = 3\,\text{kgm s}^2, \qquad l_1 = 30\,\text{cm}, \qquad J_p = 602\,\text{cm}^4,$$

$$J_3 = 10 \;\;,, \;\;, \qquad l_2 = 20 \;\;,, \;\;, \qquad G = 830\,000\,\text{kg cm}^2.$$

$$J_4 = 15 \;\;,, \;\;, \qquad l_3 = 25 \;\;,, \;\;.$$

Dann wird:

$$G J_p = 5{,}000 \cdot 10^8\,\text{kg cm}^2 = 5 \cdot 10^4\,\text{kgm}^2.$$

Berechnen wir die Größen c_1, c_2, c_3 aus den Gln. (1), so erhalten wir:

$$c_1 = \frac{5}{3} \cdot 10^5\,\text{kgm}, \qquad c_2 = \frac{5}{2} \cdot 10^5\text{kgm}, \qquad c_3 = 2 \cdot 10^5\,\text{kgm}.$$

Wir stellen die Gln. (4) auf; der Vereinfachung halber führen wir die Bezeichnung

$$x = \frac{\lambda^2}{10^5} \tag{5}$$

ein und erhalten

$$\left.\begin{aligned}
-\;\;3\,x\,\alpha^{(1)} &= \frac{5}{3}\left(\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)}\right), \\
-\;\;3\,x\,\alpha^{(2)} &= \frac{5}{2}\left(\alpha^{(3)} - \alpha^{(2)}\right) - \frac{5}{3}\left(\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)}\right), \\
-\,10\,x\,\alpha^{(3)} &= 2\left(\alpha^{(4)} - \alpha^{(3)}\right) - \frac{5}{2}\left(\alpha^{(3)} - \alpha^{(2)}\right), \\
-\,15\,x\,\alpha^{(4)} &= -\,2\left(\alpha^{(4)} - \alpha^{(3)}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante erhalten wir die Frequenzgleichung. Man kann aber die Frequenzgleichung auch auf eine andere Art erhalten, und zwar durch eine aufeinanderfolgende Eliminierung der Unbekannten $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$, $\alpha^{(4)}$ aus den Gln. (6). Wir wollen jetzt diesen Weg einschlagen.

Aus den ersten drei Gln. (6) erhalten wir:

$$\frac{5}{3}\left(\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)}\right) = -\,3\,x\,\alpha^{(1)},$$

$$\frac{5}{2}\left(\alpha^{(3)} - \alpha^{(2)}\right) = -\,3\,x\alpha^{(2)} - 3\,x\,\alpha^{(1)},$$

$$2\left(\alpha^{(4)} - \alpha^{(3)}\right) = -\,10\,x\,\alpha^{(3)} - 3\,x\,\alpha^{(2)} - 3\,x\alpha^{(1)}.$$

Hiermit ist

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{(2)} &= \alpha^{(1)} - 1{,}8\, x \alpha^{(1)}, \\ \alpha^{(3)} &= \alpha^{(2)} - 1{,}2\, x \left(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}\right), \\ \alpha^{(4)} &= \alpha^{(3)} - 5\, x \alpha^{(3)} - 1{,}5\, x \left(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Eliminieren wir aus den rechten Teilen dieser Gleichungen die Größen $\alpha^{(2)}$ und $\alpha^{(3)}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha^{(2)} &= \alpha^{(1)} \left(1 - 1{,}8\, x\right), \\ \alpha^{(3)} &= \alpha^{(1)} \left[\left(1 - 1{,}8\, x\right)\left(1 - 1{,}2\, x\right) - 1{,}2\, x\right] = \alpha^{(1)} \left(1 - 4{,}2\, x + 2{,}16\, x^2\right), \\ \alpha^{(4)} &= \alpha^{(1)} \left[\left(1 - 4{,}2\, x - 2{,}16\, x^2\right)\left(1 - 5\, x\right) - 1{,}5\, x \left(2 - 1{,}8\, x\right)\right] \\ &= \alpha^{(1)} \left(1 - 12{,}2\, x + 25{,}86\, x^2 - 10{,}8\, x^3\right). \end{aligned}$$

Die Substitution der gewonnenen Ausdrücke für $\alpha^{(3)}$ und $\alpha^{(4)}$ in der letzten Gl. (6) führt zu der Gleichung

$$\left[15\, x \left(1 - 12{,}2\, x + 25{,}86\, x^2 - 10{,}8\, x^3\right) - 2\left(-8\, x + 23{,}7\, x^2 - 10{,}8\, x^3\right)\right] \alpha^{(1)} = 0 .$$

Dividieren wir diese Gleichung durch $x\alpha^{(1)}$ (der Faktor x entspricht der Wurzel $\lambda^2 = 0$ der Frequenzgleichung, von der weiter oben die Rede war), so erhalten wir die Gleichung dritten Grades

$$162\, x^3 - 409{,}5\, x^2 + 230{,}4\, x - 31 = 0 ,$$

die durch die Größe x befriedigt werden muß. Dies ist die Frequenzgleichung; ihre drei Wurzeln entsprechen den drei Eigenfrequenzen unserer Welle.

Wenn wir die gewonnene Gleichung durch den Koeffizienten von x^3 dividieren, finden wir

$$x^3 - 2{,}52778\, x^2 + 1{,}42222\, x - 0{,}19136 = 0 . \tag{8}$$

Wie wir wissen, kann durch Substitution von

$$x = z + \frac{1}{3}\, 2{,}52778 = z + 0{,}84259 \tag{9}$$

diese Gleichung auf eine dreigliedrige Gleichung dritten Grades von der Form

$$z^3 - a z - b = 0$$

gebracht werden.

Nachdem wir die Substitution ausgeführt haben, finden wir:

$$a = 0{,}70757 , \qquad b = 0{,}18944 .$$

Wir wissen bereits, daß die Wurzeln der letzten Gleichung (wir bezeichnen sie mit z_1, z_2, z_3) bestimmt reell sein werden[1]. Wir werden diese Wurzeln aus den bekannten Gleichungen

$$z_1 = 2\sqrt{\frac{a}{3}}\cos\left(\frac{\vartheta}{3} - 240^\circ\right), \qquad z_2 = 2\sqrt{\frac{a}{3}}\cos\left(\frac{\vartheta}{3} - 120^\circ\right),$$

$$z_3 = 2\sqrt{\frac{a}{3}}\cos\frac{\vartheta}{3}$$

finden, wobei ϑ der Winkel ist, der in den Grenzen $0 < \vartheta < 90^\circ$ eingeschlossen ist und die Gleichung

$$\cos\vartheta = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{27}{a^3}}$$

befriedigt.

Haben wir diese Berechnungen ausgeführt, so erhalten wir:

$$z_1 = -0{,}64239\,,$$

$$z_2 = -0{,}30971\,,$$

$$z_3 = -0{,}95212\,.$$

Nun finden wir aus der Gl. (9) die Wurzeln der Gl. (8):

$$x_1 = 0{,}2002\,,$$

$$x_2 = 0{,}5329\,,$$

$$x_3 = 1{,}7947\,.$$

Rückschauend auf die Abhängigkeit (5) finden wir die Quadrate der Eigenfrequenzen $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$; ziehen wir die Quadratwurzel, so ergibt sich

$$\lambda_1 = 141{,}5\,\frac{1}{\text{s}}\,,$$

$$\lambda_2 = 230{,}8\,\frac{1}{\text{s}}\,,$$

$$\lambda_3 = 423{,}6\,\frac{1}{\text{s}}\,.$$

[1] Dies erfordert die Erfüllung der Bedingung

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 > \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Substituieren wir die gewonnenen Ausdrücke für a und b, so ist es leicht nachzuprüfen, daß diese Bedingung tatsächlich erfüllt ist.

Dies sind die Eigenfrequenzen unserer Welle; die diesen entsprechenden Drehzahlen sind gleich:

$$n_1 = \frac{30}{\pi} \lambda_1 = 1341 \text{ U/Min},$$

$$n_2 = \frac{30}{\pi} \lambda_2 = 2204 \text{ U/Min},$$

$$n_3 = \frac{30}{\pi} \lambda_3 = 4045 \text{ U/Min}.$$

Wir beginnen nun mit der Berechnung der Amplitudenverhältnisse der einzelnen Scheiben für jede der Hauptschwingungen des Systems; wir wissen bereits, daß durch diese Verhältnisse die Form jeder Hauptschwingung charakterisiert ist. Am einfachsten werden diese Beziehungen aus den Gln. (7) berechnet. Nehmen wir in diesen Gleichungen $x = x_1 = 0{,}2002$ an und bezeichnen die Amplituden der Schwingungen der Scheiben bei der ersten Hauptschwingung mit $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_1^{(4)}$, so finden wir:

$$\frac{\alpha_1^{(2)}}{\alpha_1^{(1)}} = 0{,}640, \qquad \frac{\alpha_1^{(3)}}{\alpha_1^{(1)}} = 0{,}246, \qquad \frac{\alpha_1^{(4)}}{\alpha_1^{(1)}} = -0{,}493.$$

Ganz entsprechend erhalten wir für die zweite und dritte Hauptschwingung, wenn wir in den Gln. (7) $x = x_2 = 0{,}5329$ und $x = x_3 = 1{,}7947$ annehmen:

$$\frac{\alpha_2^{(2)}}{\alpha_2^{(1)}} = 0{,}041. \qquad \frac{\alpha_2^{(3)}}{\alpha_2^{(1)}} = -0{,}625, \qquad \frac{\alpha_2^{(4)}}{\alpha_2^{(1)}} = 0{,}208,$$

$$\frac{\alpha_3^{(2)}}{\alpha_3^{(1)}} = -2{,}230, \qquad \frac{\alpha_3^{(3)}}{\alpha_3^{(1)}} = 0{,}420, \qquad \frac{\alpha_3^{(4)}}{\alpha_3^{(1)}} = -0{,}034.$$

Wir wollen diese Resultate graphisch darstellen. Wir nehmen die Schwingungsamplitude der ersten Scheibe als Eins an (d. h., wir setzen $\alpha_1^{(1)} = \alpha_2^{(1)} = \alpha_3^{(1)} = 1$) und tragen vereinbarungsgemäß die Schwingungsamplituden der Scheiben senkrecht zur Wellenmittellinie ab, wobei wir die positiven Amplituden in einem vereinbarten Maßstab nach oben und die negativen nach unten abtragen. Verbinden wir die Enden der abgetragenen Abschnitte nacheinander durch gerade Linien, so erhalten wir Schaubilder für die Haupttorsionsschwingungen der Welle (Abb. 237).

Der senkrechte Abstand von einem beliebigen Punkte auf der Wellenmittellinie bis zu der oben genannten Verbindungslinie stellt die Amplitude der Torsionsschwingungen des entsprechenden Wellenquerschnitts dar. Dort, wo die Verbindungslinien die Wellenachse schneiden, werden diese Amplituden Null, die entsprechenden Wellenquerschnitte bleiben unbeweglich. Solche Schnitte heißen *Knotenschnitte* oder kürzer

— *Knoten.* Aus Abb. 237 ersieht man, daß die *erste* Hauptschwingung der Welle *einen* Knoten hat, der *zweiten* Hauptschwingung entsprechen *zwei* Knoten, die *dritte* Hauptschwingung besitzt *drei* Knoten.

Wir haben hier den Fall einer Welle mit vier Massen untersucht; ganz entsprechend wird die Aufgabe der Eigenschwingungen der Welle mit einer beliebigen Anzahl aufgekeilter Massen gelöst. Es versteht sich von selbst, daß die Kompliziertheit der Berechnung mit der Vergrößerung der Anzahl dieser Massen stark zunimmt. Wir befassen uns hier nicht mit den in der Literatur angeführten speziellen Verfahren der Berechnung der Torsionsschwingungen von Wellen, die zum Ziel die möglichste Vereinfachung dieser Arbeit haben; wir verweisen die Interessenten auf die spezielle Fachliteratur[1].

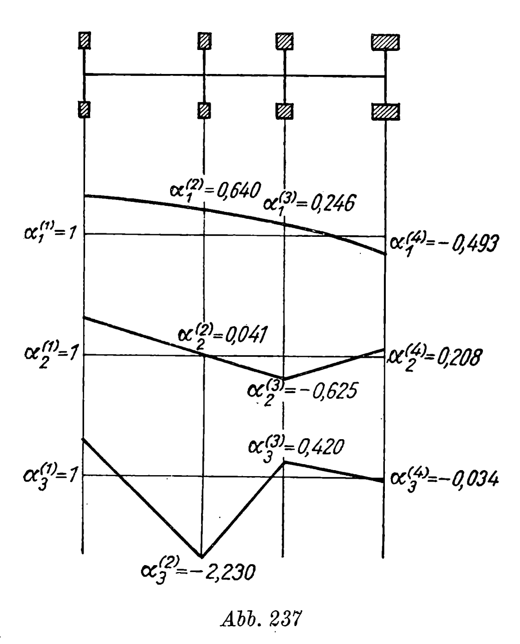


Abb. 237

Wir haben bereits erwähnt, daß die Torsionsschwingungen eine besonders wichtige Bedeutung bei der Anwendung auf Kurbelwellen von Kolbenmotoren bekommen. Natürlich ist das System einer Kurbelwelle eines Motors bedeutend komplizierter als das einfache Schema einer geradlinigen Welle von konstantem Durchmesser mit aufgekeilten rotierenden Massen, das wir betrachtet haben. Im System einer Kurbelwelle haben wir es mit einer Welle von nicht geradlinigen Abschnitten und (in den meisten Fällen) nicht konstantem Durchmesser zu tun; andererseits sind mit der Kurbelwelle nicht nur rotierende Massen (wie z. B. beim Schwungrad), sondern auch Massen verbunden, die eine komplizierte periodische Bewegung ausführen (Kurbelstangen und Kolben). Bei der Berechnung der Torsionsschwingungen einer Kurbelwelle wird das System der Kurbelwelle auf das vereinfachte Schema zurückgeführt, das wir hier untersucht haben; das kann man mit einer für die Praxis hinreichenden Genauigkeit durchführen. Dabei wird die tatsächliche Kurbelwelle durch eine ihr äquivalente geradlinige zylindrische Welle ersetzt, die kompliziertere Bewegungen ausführenden Massen aber werden durch äquivalente rotierende Massen ersetzt. Die Berechnung der Längen der Abschnitte der äquivalenten Welle und die Berechnung der Trägheitsmomente der äquivalenten rotierenden Massen (die sogenannte Reduktion der Längen und Reduktion der Massen) wird nach Verfahren durchgeführt, mit denen wir uns hier nicht befassen werden.

[1] Für ein ausführlicheres Studium von Torsionsschwingungen der Welle kann das Buch von S. P. Timoshenko, „Schwingungsprobleme der Technik", Deutsche Ausgabe, Berlin 1932, empfohlen werden.

§ 159. Die Berechnung der erzwungenen Schwingungen einer Welle

Wir wenden uns nun der Untersuchung der erzwungenen Schwingungen unserer Welle zu und legen dieser Untersuchung dasselbe Schema einer Welle mit vier Massen zugrunde, das wir im vorhergehenden Paragraphen untersucht haben (Abb. 236).

In einem Motor sind die periodisch veränderlichen Drehmomente, die an den einzelnen Kröpfungen der Welle angreifen, die Quelle der erzwungenen Torsionsschwingungen einer Kurbelwelle, die den Gang der Maschine begleiten. In unserem vereinfachten Schema entsprechen diesem veränderliche, sich periodisch verändernde Momente, die an beliebigen auf der Welle aufgekeilten Massen angreifen.

Aus der allgemeinen Theorie der erzwungenen Schwingungen ist uns bereits bekannt, daß eine Resonanz mit großen Schwingungsamplituden eintritt, wenn sich unter den harmonischen Komponenten dieser periodischen Momente ein solches befindet, dessen Frequenz gleich einer der Eigenfrequenzen λ_1, λ_2, λ_3 unserer Welle ist. Wenn die n-te harmonische Komponente eines Drehmomentes eine Frequenz hat, die gleich λ_1 ist, treten einknotige Resonanzschwingungen n-ter Ordnung ein; ist die Frequenz derselben n-ten harmonischen Komponente gleich λ_2 oder λ_3, so ergeben sich zweiknotige bzw. dreiknotige Resonanzschwingungen n-ter Ordnung.

Die Frequenzen der periodischen Drehmomente in Motoren befinden sich in einem einfachen Verhältnis zu der Drehzahl der Welle. Daher werden Resonanzschwingungen bei bestimmten Drehzahlen auftreten, die kritische Drehzahlen heißen. Es versteht sich von selbst, daß die Betriebsdrehzahlen des Motors hinreichend entfernt von diesen gefährlichen *kritischen Drehzahlen* sein müssen.

Wir setzen nun eine hinreichende Entfernung von der Resonanz voraus und stellen uns die Aufgabe, die Amplituden der erzwungenen Schwingungen der einzelnen auf die Welle aufgesetzten Massen zu berechnen.

Wir benutzen das Schema einer Welle mit vier Massen und nehmen der Einfachheit halber an, daß nur ein periodisches Moment vorhanden ist, das an der ersten Masse M_1 angreift; von diesem Moment nehmen wir nur eine seiner harmonischen Komponenten (wir wissen bereits, daß durch verschiedene harmonische Komponenten hervorgerufene erzwungene Schwingungen einfach überlagert werden). Also wollen wir annehmen, daß an der ersten Masse das harmonische Moment

$$M = A \cos p t$$

angreift, wobei A und p gegebene Größen sind.

Die freien Schwingungen, von denen die uns interessierenden erzwungenen Schwingungen begleitet sind, lassen wir beiseite; wir wissen, daß diese unter dem Einfluß der hier nicht in Betracht gezogenen, aber unvermeidlichen Widerstände abklingen. Auf die Amplituden der erzwungenen Schwingungen — bei hinreichender Entfernung von der Resonanz — wirken diese Widerstände im Gegenteil sehr wenig; bei der Errechnung der Amplituden der erzwungenen Schwingungen können wir die Widerstände vernachlässigen.

Wir wollen die Differentialgleichungen der erzwungenen Schwingungen unseres Systems aufstellen. Sie unterscheiden sich von den Gleichungen der Eigenschwin-

gungen (2), § 158, nur dadurch, daß im rechten Teil der ersten Gleichung das Erregermoment $M = A\cos pt$ hinzugefügt wird, das an der ersten Masse angreift. Wir werden also erhalten:

$$J_1\ddot{\varphi}_1 = c_1(\varphi_2 - \varphi_1) + A\cos pt,$$
$$J_2\ddot{\varphi}_2 = c_2(\varphi_3 - \varphi_2) - c_1(\varphi_2 - \varphi_1),$$
$$J_3\ddot{\varphi}_3 = c_3(\varphi_4 - \varphi_3) - c_2(\varphi_3 - \varphi_2),$$
$$J_4\ddot{\varphi}_4 = -c_3(\varphi_4 - \varphi_3).$$

Wollen wir die erzwungenen Schwingungen des Systems bestimmen, so suchen wir die partikulären Lösungen dieser Gleichungen in der Form

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= a_1\cos pt,\\ \varphi_2 &= a_2\cos pt,\\ \varphi_3 &= a_3\cos pt,\\ \varphi_4 &= a_4\cos pt. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Hierin sind a_1, a_2, a_3 und a_4 die gesuchten Amplituden der erzwungenen Schwingungen der einzelnen Massen.

Die Substitution dieser Ausdrücke für φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 in den vorhergehenden Gleichungen und die Division durch $\cos pt$ führt zu den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} -p^2J_1a_1 &= c_1(a_2 - a_1) + A,\\ -p^2J_2a_2 &= c_2(a_3 - a_2) - c_1(a_2 - a_1),\\ -p^2J_3a_3 &= c_3(a_4 - a_3) - c_2(a_3 - a_2),\\ -p^2J_4a_4 &= -c_3(a_4 - a_3), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

aus denen die Größen a_1, a_2, a_3 und a_4 ermittelt werden können.

Die weiteren Berechnungen werden wir an einem Zahlenbeispiel durchführen. Wir wollen die gleichen Angaben wie in dem im § 158 untersuchten Beispiel wählen, also:

$$J_1 = J_2 = 3\,\text{kgm}\,\text{s}^2, \qquad c_1 = \frac{5}{3}\cdot 10^5\,\text{kgm},$$

$$J_3 = 10\,\text{kgm}\,\text{s}^2, \qquad c_2 = \frac{5}{2}\cdot 10^5\,\text{kgm},$$

$$J_4 = 15\,\text{kgm}\,\text{s}^2, \qquad c_3 = 2\cdot 10^5\,\text{kgm}.$$

Ferner nehmen wir an:

$$p = 300\,\frac{1}{\text{s}}, \qquad A = 10\ \text{kgm}.$$

Nachdem wir diese Werte in die Gln. (2) eingesetzt und die erhaltenen Gleichungen durch 10^5 dividiert haben, erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
-2{,}7\,a_1 &= \frac{5}{3}(a_2-a_1)+10^{-4},\\
-2{,}7\,a_2 &= \frac{5}{2}(a_3-a_2)-\frac{5}{3}(a_2-a_1),\\
-9\,a_3 &= 2\,(a_4-a_3)-\frac{5}{2}(a_3-a_2),\\
-13{,}5\,a_4 &= -2(a_4-a_3).
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Aus den letzten drei Gln. (2) ergibt sich

$$\begin{aligned}
2\,(a_3-a_4) &= -13{,}5\,a_4,\\
\frac{5}{2}(a_2-a_3) &= -9\,a_3-13{,}5\,a_4,\\
\frac{5}{3}(a_1-a_2) &= -2{,}7\,a_2-9\,a_3-13{,}5\,a_4
\end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned}
a_3 &= 5{,}75\,a_4,\\
a_2 &= 9{,}55\,a_4,\\
a_1 &= 17{,}029\,a_4.
\end{aligned}$$

Setzen wir die gewonnenen Ausdrücke für a_1 und a_2 in die erste Gl. (3) ein, so ist

$$33{,}513\,a_4+10^{-4}=0.$$

Ermitteln wir hieraus den Wert a_4 und setzen ihn in die vorhergehenden Gleichungen ein, so erhalten wir endgültig:

$$\begin{aligned}
a_4 &= -\,0{,}29839\cdot10^{-5},\\
a_3 &= 1{,}7158\cdot10^{-5},\\
a_2 &= -\,2{,}8496\cdot10^{-5},\\
a_1 &= -\,5{,}0814\cdot10^{-5}.
\end{aligned}$$

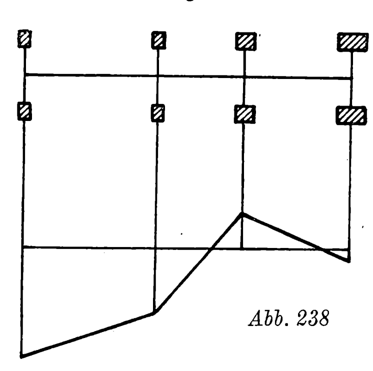


Abb. 238

Dies sind die Amplituden der erzwungenen Schwingungen der einzelnen Massen. Diese Amplituden sind im Bogenmaß ausgedrückt. Tragen wir diese Amplituden in einem vereinbarten Maßstab senkrecht zur Wellenmittellinie ab, so erhalten wir ein Diagramm, das die Schwingungsform der Welle darstellt (Abb. 238). Wie man sieht, handelt es sich hier um zweiknotige erzwungene Schwingungen der Welle.

Nachdem wir die Schwingungsamplituden der einzelnen Massen bestimmt haben, können wir nun auch die Werte der Drehmomente M_1, M_2, M_3 für die einzelnen Wellenabschnitte nach den Gleichungen

$$M_1 = c_1(\varphi_2 - \varphi_1),$$
$$M_2 = c_2(\varphi_3 - \varphi_2),$$
$$M_3 = c_3(\varphi_4 - \varphi_3)$$

berechnen.

Substituieren wir hier die Ausdrücke für φ_1, φ_2, φ_3 und φ_4 aus den Gln. (1), so folgt

$$M_1 = c_1(a_2 - a_1)\cos pt,$$
$$M_2 = c_2(a_3 - a_2)\cos pt,$$
$$M_3 = c_3(a_4 - a_3)\cos pt.$$

Die Substitution der Werte

$$c_1 = \frac{5}{3}\cdot 10^5\,\text{kgm}, \qquad c_2 = \frac{5}{2}\cdot 10^5\,\text{kgm}, \qquad c_3 = 2\cdot 10^5\,\text{kgm},$$
$$p = 300\ 1/\text{s}$$

und auch der ermittelten Werte der Amplituden a_1, a_2, a_3 und a_4 ergibt:

$$M_1 = 3{,}72\cos 300t\ \text{kgm},$$
$$M_2 = 11{,}41\cos 300t\ \text{kgm},$$
$$M_3 = -\ 4{,}03\cos 300t\ \text{kgm}.$$

Mit diesen Werten der Drehmomente können auch die Spannungen für die einzelnen Abschnitte der Welle berechnet werden. Für die größte Schubspannung τ im Wellenquerschnitt gilt die bekannte Gleichung

$$\tau = \frac{16\,M}{\pi\,d^3},$$

wobei M das Drehmoment und d der Wellendurchmesser ist[1].

Dem von uns angenommenen polaren Trägheitsmoment $J_p = 602{,}4\ \text{cm}^4$ entspricht der Durchmesser $d = 8{,}85$ cm. Substituiert man diesen Wert und auch die ermittelten Werte der Drehmomente, so erhält man für die einzelnen Wellenabschnitte:

$$\tau_1 = 2{,}73\cos 300t\ \text{kg/cm}^2,$$
$$\tau_2 = 8{,}38\cos 300t\ \text{kg/cm}^2,$$
$$\tau_3 = -\ 2{,}96\cos 300t\ \text{kg/cm}^2.$$

[1] Zur Vermeidung von Mißverständnissen unterstreichen wir, daß man bei der Benutzung dieser Gleichung unter dem Buchstaben d nicht den reduzierten, sondern den wirklichen Wellendurchmesser verstehen muß.

Wie man sieht, liegen die größten Spannungen infolge der Schwingung im mittleren Abschnitt der Welle (zwischen der zweiten und dritten Masse).

Wir bemerken, daß die Form der erzwungenen Schwingungen wesentlich davon abhängt, auf welche Masse das Erregermoment wirkt. Wir übertragen das Erregermoment von der ersten Masse K_1 auf die zweite K_2, indem wir alle übrigen Bedin-

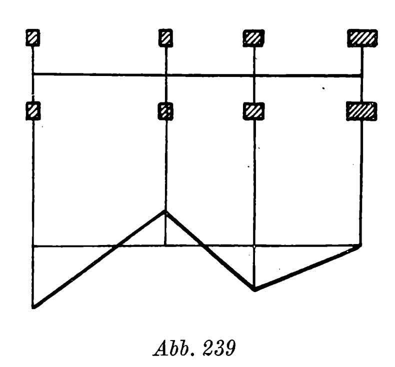


Abb. 239

gungen der Aufgabe unverändert lassen. In einem solchen Falle gelten zur Bestimmung der Amplituden a_1, a_2, a_3 und a_4 die Gleichungen

$$-2{,}7\,a_1 = \frac{5}{3}(a_2 - a_1),$$

$$-2{,}7\,a_2 = \frac{5}{2}(a_3 - a_2) - \frac{5}{3}(a_2 - a_1) + 10^{-4},$$

$$-9\,a_3 = 2(a_4 - a_3) - \frac{5}{2}(a_3 - a_2),$$

$$-13{,}5\,a_4 = -2(a_4 - a_3).$$

Hieraus finden wir:

$$a_1 = -2{,}8495\cdot 10^{-5},$$

$$a_2 = 1{,}7667\cdot 10^{-5},$$

$$a_3 = -1{,}0587\cdot 10^{-5},$$

$$a_4 = 0{,}1850\cdot 10^{-5}.$$

Das Diagramm dieser Schwingung ist in der Abb. 239 dargestellt. Wie man sieht, haben wir durch Übertragung des Erregermomentes von der ersten auf die zweite Masse die zweiknotigen erzwungenen Schwingungen in Schwingungen mit drei Knoten verwandelt.

NAMEN- UND SACHREGISTER